

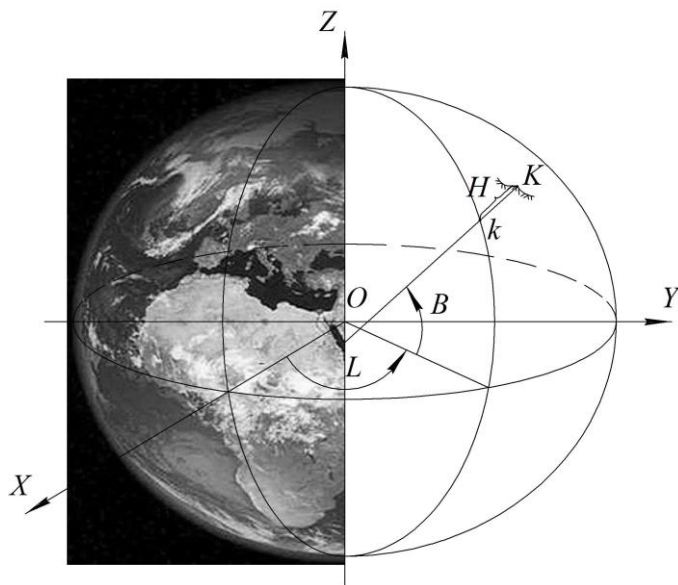
Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Житомирський державний технологічний університет

**Пилипенко П.П., Горелікова В.В.**

## **ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ**

### **Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт**

для студентів денної та заочної форм навчання,  
що навчаються за напрямом підготовки 6.050301 «Гірництво»



Житомир  
2012

Міністерство освіти і науки, молоді і спорту України  
Житомирський державний технологічний університет

**Пилипенко П.П., Горелікова В.В.**

## **ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ**

### **Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт**

для студентів денної та заочної форм навчання,  
що навчаються за напрямом підготовки 6.050301 «Гірництво»

Затверджено на засіданні  
кафедри маркшейдерії  
Протокол №1 від 29.08.2012 р.

Затверджено на засіданні  
методичної ради ГЕФ  
Протокол №4 від 30.08.2012 р.

Житомир  
2012

УДК 528(075)

П 32

Пилипенко П.П., Горелікова В.В. Основи вищої геодезії. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів денної та заочної форм навчання, що навчаються за напрямом підготовки 6.050301 «Гірництво». – Житомир: ЖДТУ, 2012. – 67 с.

Упорядники:

*Пилипенко Петро Павлович*, старший викладач кафедри маркшейдерії Житомирського державного технологічного університету

*Горелікова Вікторія Володимирівна*, асистент кафедри маркшейдерії Житомирського державного технологічного університету

Відповідальний за випуск:

*Соболевський Руслан Вадимович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри маркшейдерії Житомирського державного технологічного університету

Рецензент:

*Соболевський Руслан Вадимович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри маркшейдерії Житомирського державного технологічного університету

*Котенко Володимир Володимирович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри маркшейдерії Житомирського державного технологічного університету

©Пилипенко П.П., 2012.

©Горелікова В.В., 2012.

## Зміст

<b>Вступ</b> .....	4
<b>Лабораторна робота №1</b> «Обчислення довжин дуг меридіана та паралелі» .....	5
<b>Лабораторна робота №2</b> «Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції» .....	12
<b>Лабораторна робота №3</b> «Розв'язування сферичних трикутників» .....	19
<b>Лабораторна робота №4</b> «Розв'язування прямої і оберненої геодезичних задач» .....	33
<b>Лабораторна робота №5</b> «Розв'язування головних геодезичних задач в просторі» .....	42
<b>Вимоги до оформлення та виконання лабораторних робіт</b>	50
<b>ДОДАТОК 1.</b> Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №1 «Обчислення довжини дуг меридіана та паралелі» ...	51
<b>ДОДАТОК 2.</b> Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №2 «Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції» .....	57
<b>ДОДАТОК 3.</b> Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №4 «Розв'язування прямої і геодезичної задач» .....	60
<b>ДОДАТОК 4.</b> Зразок оформлення титульного аркуша .....	63
<b>ДОДАТОК 5.</b> Основні написи для текстових документів. Форма 2 та форма 2а .....	64
<b>Список рекомендованої літератури</b> .....	66

## Вступ

*Сфероїдна геодезія* – один із основних розділів вищої геодезії, предметом якого є вивчення геометрії поверхні земного еліпсоїда, методів розв'язку геодезичних задач на цій поверхні та зображення її на кулі або площині.

Основними задачами сфероїдної геодезії є:

1. Вивчення властивостей кривих на поверхні земного еліпсоїда та визначення взаємного розташування точок на цій поверхні або в просторі;

2. Вибір найбільш вигідної проєкції для зображення елементів поверхні еліпсоїда на сфері та площині;

3. Розробка методики переходу з еліпсоїда на площину та навпаки.

Трикутники триангуляції є сфероїдними або еліпсоїдальними трикутниками, оскільки вони утворені на поверхні еліпсоїда. На практиці зазвичай мають справу із трикутниками, сторони яких не перевищують 40-50 км і в деяких випадках 70-80 км. Таким чином, розв'язання трикутників триангуляції зводиться до розв'язування сферичних трикутників.

Кінцевою метою основних геодезичних робіт є визначення координат геодезичних пунктів. Так як в геодезичних обчисленнях фігура Землі приймається за еліпсоїд обертання, то задача зводиться до обчислення координат окремих точок поверхні еліпсоїда обертання. Положення геодезичних пунктів може бути визначено в різних системах координат; кожній системі координат відповідають свої методи обчислення. В даних методичних вказівках розглянуто методи обчислення геодезичних координат.

*Метою* даних методичних вказівок є вивчення майбутніми фахівцями методів визначення взаємного положення точок земної поверхні та навколосемного простору, в яких в якості вихідної координатної поверхні прийнята поверхня земного еліпсоїда, а виміряні величини, що використовуються в цих методах вільні від впливу відхилення виска.

*Результатом* засвоєння даного матеріалу є набуття навичок у обчисленні довжин дуг меридіана та паралелі, довжин сторін і площі сфероїдальної трапеції, а також у розв'язанні сферичних трикутників та головних геодезичних задач.

## Лабораторна робота №1

### Обчислення довжин дуг меридіана та паралелі

**Мета роботи:** засвоїти методику та виконати обчислення довжин дуг меридіана та паралелі.

#### Теоретичні відомості

Довжина дуги меридіана  $S_M$  між точками з широтами  $B_1$  і  $B_2$  визначається із розв'язання еліптичного інтеграла виду

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} M dB, \quad (1.1)$$

котрий не береться в елементарних функціях. Для розв'язання цього інтеграла використовують два способи:

1. Розкладають підінтегральний вираз в ряд і, обмежуючись якимось числом членів ряду, потім виконують почленне інтегрування як елементарних функцій.

2. Застосовують числове інтегрування відомими методами обчислювальної математики.

Другий спосіб більш точний і зручніший.

Застосуємо формулу Сімпсона

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} M dB = \frac{(B_2 - B_1)}{6\rho''} (M_1 + 4M_{cp} + M_2), \quad (1.2)$$

де

$$M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B_i)^{3/2}} = a(1-e^2) \frac{1+0,25e^2 \sin^2 B_i}{1-1,25e^2 \sin^2 B_i}, \quad (1.3)$$

де  $B_1$  і  $B_2$  – широти кінців дуги меридіана;

$M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{cp}$  – значення радіусів кривизни меридіана в точках з широтами  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_{cp}$ ;

$$B_{cp} = \frac{B_1 + B_2}{2};$$

$$\frac{1}{6\rho''} = 8080228 \cdot 10^{-13}.$$

Для контролю обчислень довжину дуги меридіана  $S_m$  потрібно поррахувати як суму дуг меридіана  $X_1$  і  $X_2$  від точки з широтою  $B_{cp}$  до точки з широтами  $B_1$  і  $B_2$  (рис. 1.1). За формулою (1.2) будемо мати

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{(B_{cp} - B_1)''}{6\rho''} (M_{cp} + 4M''_{cp} + M_1) \\ X_2 &= \frac{(B_2 - B_{cp})''}{6\rho''} (M_2 + 4M'_{cp} + M_{cp}) \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

де  $M'_{cp}$  і  $M''_{cp}$  – значення радіусів кривизни меридіана в точках з широтами  $B'_{cp} = \frac{B_2 + B_{cp}}{2}$  і  $B''_{cp} = \frac{B_{cp} + B_1}{2}$ , які визначаються за формулою (1.3).

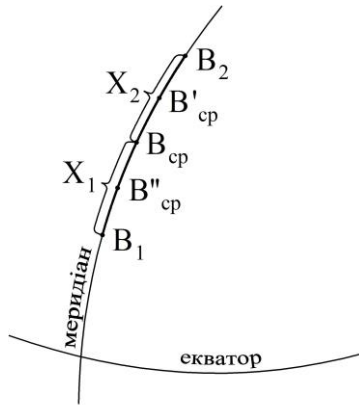


Рис. 1.1. Контроль обчислення довжини дуги меридіана

При наявності таблиць для обчислення координат Гаусса-Крюгера, довжину дуги меридіана  $S_m$  можна отримати як різницю довжин дуг меридіана від екватора до точок з широтами  $B_2$  і  $B_1$ .

*Примітка.* При віддальх між точками до 500 км формула (1.2) забезпечує точність обчислення 1-2 см. Якщо дуга меридіана перевищує 500 км, то для обчислення довжини дуги рекомендується розділити її на частини менше 500 км і використати формулу (1.2) до кожної частини окремо.

Довжина дуги паралелі  $S_n$  є частина довжини круга, яка обчислюється як добуток радіуса даної паралелі  $r=N\cos B$  на різницю довгот  $l$  кінцевих точок шуканої дуги,

$$S_n = \frac{l''}{\rho''} N \cos B, \quad (1.5)$$

де  $l'' = L_2 - L_1$ .

Значення радіуса кривизни першого вертикала  $N$  обчислюється за формулою

$$N = a \frac{1 - 0,25e^2 \sin^2 B}{1 - 0,75e^2 \sin^2 B}. \quad (1.6)$$

Для контролю обчислення довжини дуги паралелі слід визначити різницю довжин дуг  $Y_2$  і  $Y_1$ , відрахованих від меридіана з довготою  $L_1 - 30'$  (рис. 1.2).

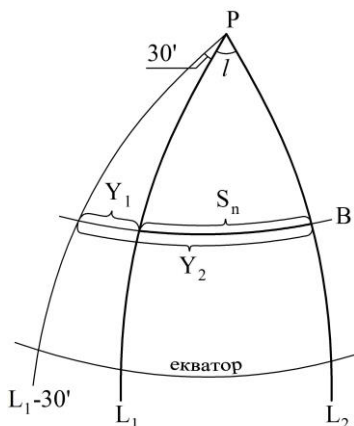


Рис. 1.2. Контроль обчислення довжини дуги паралелі

Значення величин  $Y_2$  і  $Y_1$  отримуємо, користуючись формулою (1.5):

$$Y_2 = \frac{(l + 1800)''}{\rho''} N \cos B,$$

$$Y_1 = \frac{1800''}{\rho''} N \cos B.$$



Довжину дуги паралелі отримаємо за формулою

$$S_n = Y_2 - Y_1.$$

*Примітки.*

1. Точність формули (1.5) залежить від величини  $l$ . Якщо  $l < 1^\circ$ , то, користуючись 8-значними таблицями тригонометричних функцій, довжина дуги паралелі (в середніх широтах) визначається з похибкою  $\pm 0,001$  м.

При  $l > 1^\circ$  для дотримання цієї точності потрібно визначати функцію до десятого знаку після коми.

2. Формули (1.3) і (1.6) отримані з використанням ланцюгових дробів.

### **Завдання:**

1. Обчислити довжину дуги меридіана між двома точками з широтами  $B_2$  і  $B_1$  (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 1, табл. 1.1*), користуючись формулою (1.2). Отриманий результат перевірити за формулою (1.4).

2. Обчислити довжину дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі, коли відома різниця довгот цих точок  $l = L_2 - L_1$  і широта паралелі  $B$  (значення різниці довгот точок та широта паралелі вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 1, табл. 1.2*). Розв'язання перевірити по контрольній формулі.

### **Числовий приклад:**

1. Обчислити довжину дуги меридіана між двома точками з широтами  $B_2 = 49^\circ 29' 58,938''$  і  $B_1 = 45^\circ 30' 17,221''$ , користуючись формулою (1.2). Отриманий результат перевірити за формулою (1.4).

*Таблиця 1.1*

**Схема обчислення довжини дуги меридіана між двома точками**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
$a$	6378245,0 м	$a$	6378245,0 м
$e^2$	0,00669342	$e^2$	0,00669342
$a(1 - e^2)$	6335552,717 м	$1,25e^2 \sin^2 B_1$	0,00425710
$1/6\rho''$	$8080228 \cdot 10^{-13}$	$1,25e^2 \sin^2 B_2$	0,00483777

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4
$B_2$	49°29'58,938"	$1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,00454832
$B_1$	45°30'17,221"	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B_1$	1,00085142
$B_{cp}$	47°30'08,080"	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B_2$	1,00096756
$0,25e^2$	0,00167336	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	1,00090966
$1,25e^2$	0,00836678	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B_1$	0,99574290
$\sin B_1$	0,71330897	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B_2$	0,99516223
$\sin B_2$	0,76040263	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,99545168
$\sin B_{cp}$	0,73730380	$M_1$	6368056,324
$\sin^2 B_1$	0,50880969	$M_2$	6372511,409
$\sin^2 B_2$	0,57821216	$M_{cp}$	6370290,021
$\sin^2 B_{cp}$	0,54361689	$(B_2 - B_1)''$	14381,717"
$0,25e^2 \sin^2 B_1$	0,00085142	$(B_2 - B_1)'' / (6\rho'')$	0,011620755
$0,25e^2 \sin^2 B_2$	0,00096756		
$0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,00090966	$S_M$	<b>444165,343 м</b>

Таблиця 1.2

**Контрольні обчислення довжини дуги меридіана  
МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
$a$	6378245,0 м	$0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,00090966
$(1 - e^2)$	0,99330658	$1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,00454832
$a(1 - e^2)$	6 335552.717 м	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	1,00090966
$1/(6\rho'')$	$8080228 \cdot 10^{-13}$	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B_{cp}$	0,99545168
$B_2$	49°29'58,938"	$0,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$	0,00093867
$B_1$	45°30'17,221"	$1,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$	0,00469336
$B_{cp}$	47°30'08,079"	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$	1,00093867
$B'_{cp}$	48°30'03,508"	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B'_{cp}$	0,99530664
$B''_{cp}$	46°30'12,650"	$0,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$	0,00088057
$e^2$	0,00669342	$1,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$	0,00440284
$0,25e^2$	0,00167336	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$	1,00088057
$1,25e^2$	0,00836677	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B''_{cp}$	0,99559716
$\sin B_{cp}$	0,73730380	$M_{cp}$	6370290,021
$\sin B'_{cp}$	0,74896699	$M'_{cp}$	6371402,932
$\sin B''_{cp}$	0,72541658	$M''_{cp}$	6369174,032

Продовження таблиці 1.2

1	2	3	4
$\sin^2 B_{cp}$	0,54361689	$(B_2 - B_{cp})''$	7190,859''
$\sin^2 B'_{cp}$	0,56095155	$(B_2 - B_{cp})''' / (6\rho'')$	0,005810378
$\sin^2 B''_{cp}$	0,52622921		
$(B_{cp} - B_I)''$	7190,858''	$(M_{cp} + 4M''_{cp} + M_I)$	38215042,473
$(B_{cp} - B_I)''' / (6\rho'')$	0,005810377	$X_2$	222121,530
$M_1$	6368056,324	$X_I$	222043,811
$M_2$	6372511,409	$S_m = (X_2 + X_I)$	<b>444165,341 м</b>
$(M_2 + 4M'_{cp} + M_{cp})$	38228413,158		

Контроль за таблицями

За широтою  $B_2$ 

$$X = 5485298,588 \text{ м}$$

За широтою  $B_I$ 

$$\underline{X = 5041133,243 \text{ м}}$$

$$S_m = \mathbf{444165,345 \text{ м}}$$

2. Обчислити довжину дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі, коли відома різниця довгот цих точок  $l = L_2 - L_1 = 0^\circ 45' 46,882''$  і широта паралелі  $B = 54^\circ 32' 19,354''$ . Розв'язання перевірити по контрольній формулі.

Таблиця 1.3

**Схема обчислення довжини дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$l$	$0^\circ 45' 46,882''$	$1 - 0,25e^2 \sin^2 B$	0,99888986
$B$	$54^\circ 32' 19,354''$	$1 - 0,75e^2 \sin^2 B$	0,99666958
$a$	6378245 м	$N$	6392453,854 м
$0,25 e^2$	0,00167336	$\cos B$	0,58015280
$0,75 e^2$	0,00502006	$l$	2746,882''
$\sin B$	0,81450766	$l/\rho''$	$4848137 \cdot 10^{-12}$
$\sin^2 B$	0,66342273	$N \cos B$	3708600,002
$0,25e^2 \sin^2 B$	0,00111014	$l''/\rho''$	0,01331726
$0,75e^2 \sin^2 B$	0,00333042	$S_n$	<b>49388,390 м</b>

Таблиця 1.4

**Контрольні обчислення довжини дуги паралелі між точками,  
які лежать на цій паралелі**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$N \cos B$	3708600,002	$Y_1$	32363,641
$l/\rho''$	$4848137 \cdot 10^{-12}$	$Y_2$	81752,029
$(l''+1800'')/\rho''$	0,0220439060	$S_n = Y_2 - Y_1$	<b>49388,388 м</b>
$1800''/\rho''$	0,0087266466		

**Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:**

1. Дайте визначення поняттям геодезична довгота і геодезична широта.
2. Перерахуйте основні параметри земного еліпсоїда та зв'язки між ними.
3. Що таке нормальний переріз та переріз першого вертикалу?
4. На якій географічній широті радіус кривизни меридіального перерізу буде рівний радіусу кривизни першого вертикалу?
5. Які Ви знаєте способи обчислення довжини дуги меридіана?

## Лабораторна робота №2

### Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції

**Мета роботи:** засвоїти методику та виконати обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції

#### Теоретичні відомості

Знімальна трапеція є частиною поверхні еліпсоїда обмеженого меридіанами і паралелями. Тому сторони трапеції рівні дугам меридіанів і паралелей, обрахованими за формулами (1.1) і (1.5). Північна і південна рамки є дугами паралелей  $a_1$  і  $a_2$ , а східна і західна – меридіанів  $c$ , рівними між собою,  $d$  – діагональ трапеції. Для отримання конкретних розмірів трапеції необхідно згадані дуги розділити на знаменник масштабу  $m$  і для отримання розмірів у сантиметрах помножити на 100.

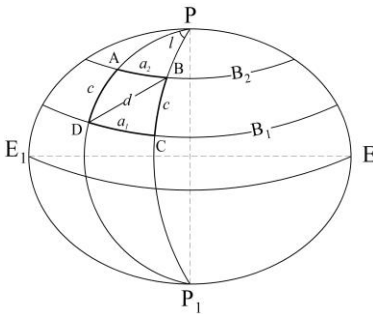


Рис. 2.1. Знімальна трапеція як частина поверхні еліпсоїда

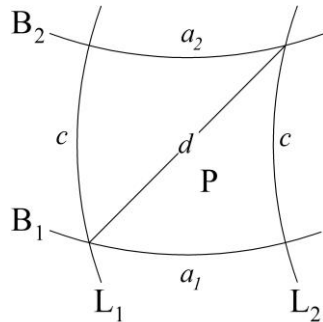


Рис. 2.2. Знімальна трапеція

З урахуванням (1.1) робочі формули мають наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{100}{m} \cdot \frac{N_1}{\rho''} \cos B_1 l'' \\ a_2 &= \frac{100}{m} \cdot \frac{N_2}{\rho''} \cos B_2 l'' \\ c &= \frac{100}{m} \cdot \frac{M_m}{\rho''} \Delta B'' \\ d &= \sqrt{a_1 a_2 + c^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

де  $m$  – знаменник масштабу знімальної трапеції,  $N_1$  і  $N_2$  – радіуси кривизни першого вертикала в точках з широтами  $B_1$  і  $B_2$ ,  $M_m$  – радіус кривизни меридіана в точці з широтою

$$B_m = \frac{(B_1 + B_2)}{2}, \Delta B = B_2 - B_1.$$

Рамки знімальної трапеції карт масштабу 1:100000 і крупніше зображуються практично прямими лініями, так як різниця між довжиною дуги  $a_1$  і довжиною хорди  $DC = S$  (пунктирна лінія) допустимо мала. Однак в тих випадках, коли цими різницями не можна нехтувати, різниця  $(a - S)$  визначається за формулою

$$a - S = \frac{8h^2}{3S}, \quad (2.2)$$

де  $h$  – стрілка прогину;

$$h = \frac{l^2 \sin 2B_m N_m}{16\rho^2}, \quad (2.3)$$

де  $l = L_C - L_D$  – різниця довгот точок  $C$  і  $D$ ;

$N_m$  – радіус кривизни першого вертикала в точці з широтою

$$B_m = \frac{B_D + B_C}{2}.$$

Формули (2.1) дають можливість визначити розміри трапеції, якщо вона зображується на площині без спотворень.

Теоретично, якщо знімальна трапеція крупного масштабу, наприклад, 1:10000 знаходиться на краю 6-градусної зони, то її довжини сторін спотворюються в проекції Гауса на величину, що перевищує графічну точність. Лінійне спотворення визначається за формулою

$$m - 1 = \frac{l^2}{2\rho^2} \cos^2 B_m, \quad (2.4)$$

де  $m$  – масштаб зображення еліпсоїда на площині,  $l$  – різниця довгот кінців рамки знімальної трапеції.

Практично зйомка масштабів  $1:1000000 \div 1:25000$  виконується з використанням 6-градусної зони, більш крупного масштабу – з використанням 3-градусної зони. В приведених випадках спотворення довжин рамок знімальних трапецій в проекції Гаусса достатньо малі і ними нехтують.

Елемент площі знімальної трапеції  $dP$  дорівнює добутку диференціалів дуг меридіанів і паралелей, якими вона обмежена, тобто

$$dP = MN \cos B dB dl, \quad (2.5)$$

де  $M$  і  $N$  – радіуси кривизни меридіана і першого вертикала, що визначаються за формулами (1.3) і (1.6).

Користуючись середнім радіусом кривизни еліпсоїда  $R = \sqrt{MN}$  і враховуючи, що  $R = \frac{b}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}$ , отримаємо

$$dP = \frac{b^2 \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB dl,$$

де  $b$  – мала піввісь референц-еліпсоїда Красовського.

Площа кінцевої трапеції, обмеженої широтами  $B_2$  і  $B_1$  і довготами  $L_2$  і  $L_1$  визначається подвійним інтегралом

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dl dB.$$

Інтегруючи по  $L$  в рамках від  $L_1$  до  $L_2$ , отримаємо

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB. \quad (2.6)$$

Розкладемо підінтегральну функцію в біноміальний ряд Ньютона і, виконуючи почленне інтегрування отриманого ряду, будемо мати

$$P = b^2(L_2 - L_1) \left[ \begin{aligned} & \sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \\ & + \frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \\ & + \frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \dots \end{aligned} \right] \quad (2.7)$$

Користуючись формулою (2.7) можна обчислити площину референц-еліпсоїда. В такому випадку  $L_2 - L_1 = 2\pi$ ,  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = \pi/2$ . Отримаємо площину еліпсоїда Красовського  $P = 510083035 \text{ км}^2$ . Радіус кулі, еквівалентного за площею цього еліпсоїда дорівнює  $R = 6371116 \text{ м}$ .

Для визначення площі знімальної трапеції за формулою (2.7) необхідно знати широти і довготи паралелей і меридіанів, які обмежують шукану трапецію потрібного масштабу.

### **Завдання:**

1. Обчислити розміри трапеції масштабу 1:50000, обмеженої паралелями  $B_2$  і  $B_1$  (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*). Інтервал трапецій вказаного масштабу по довготі буде  $l = L_2 - L_1$  (значення інтервалу трапецій вказаного масштабу по довготі вибирається згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*).

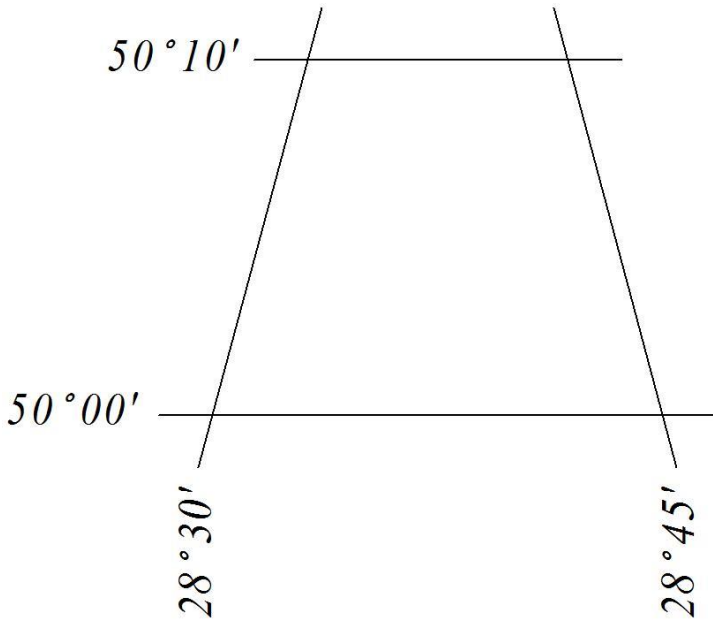
2. Обчислити на еліпсоїді Красовського площу трапеції масштабу 1:100000, обмеженої паралелями  $B_2$  і  $B_1$  (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*) з точністю до  $0,001 \text{ км}^2$ .

### **Числовий приклад:**

1. Обчислити розміри трапеції масштабу 1:50000, обмеженої паралелями  $B_2 = 50^\circ 10'$  і  $B_1 = 50^\circ 00'$ . Інтервал трапецій вказаного масштабу по довготі буде  $l = 15' = 900''$ . Величина  $\Delta B = B_2 - B_1 = 10' = 600''$ .



*M-35-70-B*



*M 1:50000*

*Рис. 2.3. Трапеція масштабу 1:50000, обмежена широтами  $B_1 = 50^{\circ}00'$  та  $B_2 = 50^{\circ}10'$  і довготами  $L_1 = 28^{\circ}30'$  та  $L_2 = 28^{\circ}45'$*

Таблиця 2.1

## Схема обчислення розмірів трапеції

Формули	Значення вимірювань	Формули	Значення вимірювань
$a$	6378245	$1 - 0,25e^2 \sin^2 B_1$	0,99902
$a(1 - e^2)$	6335552	$1 - 0,75e^2 \sin^2 B_1$	0,99705
$e^2$	0,00669342	$1 - 0,25e^2 \sin^2 B_2$	0,99901
$0,25e^2$	0,0016734	$1 - 0,75e^2 \sin^2 B_2$	0,99704
$0,75e^2$	0,0050201	$1 + 0,25e^2 \sin^2 B_m$	1,00098
$1,25e^2$	0,0083668	$1 - 1,25e^2 \sin^2 B_m$	0,99508
$B_1$	50°00'00"	$N_1$	6390847 м
$B_2$	50°10'00"	$N_2$	6390847 м
$B_m$	50°05'00"	$M_m$	6373116 м
$\sin B_1$	0,76604	$1/\rho''$	$4848137 \cdot 10^{-12}$
$\sin B_2$	0,76791	$N_1/\rho''$	30,984
$\sin B_m$	0,76698	$N_2/\rho''$	30,984
$\sin^2 B_1$	0,58682	$M_m/\rho''$	30,898
$\sin^2 B_2$	0,58969	$a_1$	<b>35,849 см</b>
$\sin^2 B_m$	0,58826	$a_2$	<b>35,725 см</b>
$\cos B_1$	0,64279	$c$	<b>37,078 см</b>
$\cos B_2$	0,64056	$a_1 a_2$	1280,70
100 $l/m$	9/5	$d^2$	2655,48
100 $\Delta B/m$	6/5	$d$	<b>51,531 см</b>

2. Обчислити на еліпсоїді Красовського площу трапеції масштабу 1:100000, обмеженої паралелями  $B_2 = 50^\circ 20'$  і  $B_1 = 50^\circ 00'$  з точністю до 0,001 км<sup>2</sup>.

Спростимо формулу (2.7). Позначимо:

$$\frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) = I,$$

$$\frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) = II,$$

$$\frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) = III,$$

отримаємо

$$P = \frac{b^2(L_2 - L_1)}{\rho''} [(\sin B_2 - \sin B_1) + I + II + III].$$

Таблиця 2.2

## Схема обчислення площі трапеції

Формули	Значення вимірювань	Формули	Значення вимірювань
$b$	6356,863 км	$\sin^7 B_1$	0,15480242
$e^2$	0,00669342	$2/3 e^2$	0,00446228
$1/\rho''$	$4848137 \cdot 10^{-12}$	$3/5 e^4$	0,00002688
$L_2 - L_1$	1800''	$4/7 e^6$	0,00000017
$1/\rho''$	$4848137 \cdot 10^{-12}$	$I$	0,00002942
$L_2 - L_1$	1800''	$II$	0,00000017
$\sin B_2$	0,76977104	$III$	0,0
$\sin^3 B_2$	0,45612587	$b^2(L_2 - L_1)/\rho''$	352641,9 км <sup>2</sup>
$\sin^5 B_2$	0,27027622	$b^2$	40409707,2 км <sup>2</sup>
$\sin^7 B_2$	0,16015148	$(\sin B_2 - \sin B_1) +$ $+ I + II + III$	0,00375619
$\sin B_1$	0,76604444		
$\sin^3 B_1$	0,44953332	$P$	<b>1324,590 км<sup>2</sup></b>
$\sin^5 B_1$	0,26379698		

**Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:**

1. Що таке сферойдна трапеція?
2. Дайте визначення поняттям «меридіан» та «паралель».
3. Назвіть порядок визначення номенклатури листа карти.
4. Що таке стрілка прогину рамки знімальної трапеції?
5. У яких випадках можна нехтувати спотворенням довжин рамок знімальної трапеції в проєкції Гаусса?

## **Лабораторна робота №3**

### **Розв'язування сфероїдальних трикутників**

**Мета роботи:** засвоїти методику та розв'язати малий та великий сферичні трикутники

#### **Теоретичні відомості**

Трикутник, утворений геодезичними лініями на поверхні еліпсоїда (сфероїда), називається сфероїдальним трикутником.

Розв'язати трикутник означає визначити всі його елементи (сторони і кути), в разі, якщо деякі з них відомі.

Сфероїдальний трикутник не можна розв'язати, користуючись елементарними функціями. Сторона сфероїдального трикутника, наприклад, в триангуляції 1 класу, має довжину від 20 до 60 км. В навігації, космічній геодезії, при з'єднанні геодезичних мереж різних країн сторони трикутників досягають декількох сот кілометрів. Нескладні розрахунки показують, що коли потрібно розв'язати трикутник з відносною похибкою  $10^{-8}$ , то сфероїдальний трикутник можна розглядати як сферичний, якщо його сторони не перевищують 240 км.

У зв'язку з цим, в геодезичній практиці застосовують спеціальні методи розв'язання таких трикутників: теорему Лежандра або спосіб аддитаментів.

### **1. Розв'язування малих сферичних трикутників**

#### *1.1. Розв'язування малих сферичних трикутників за теоремою Лежандра*

Теорема Лежандра стверджує, що кути плоского прямолінійного трикутника дорівнюють кутам сферичного трикутника, зменшеним на третину сферичного надлишку  $\varepsilon$ , якщо рівні відповідні сторони цих трикутників. Отже, при відомому значенні  $\varepsilon$ , розв'язування сферичного трикутника зводиться до розв'язування відповідного плоского трикутника, яке виконується за формулами прямолінійної тригонометрії (за теоремою синусів) (рис. 3.1).

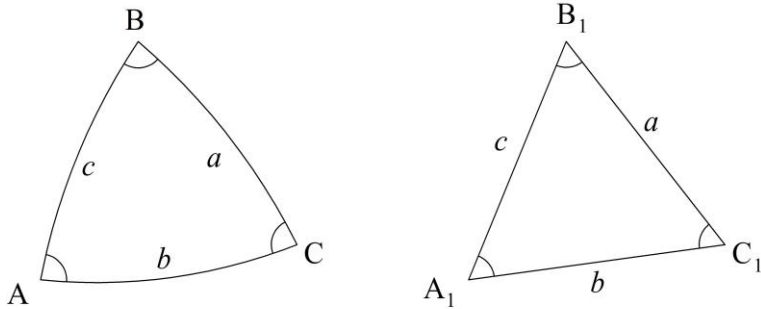


Рис. 3.1. Сферичний трикутник та відповідний йому плоский трикутник

Послідовність розв'язування трикутників за теоремою Лежандра:

1) обчислення сферичного надлишку  $\varepsilon$ ;

$$\varepsilon = \frac{\rho''}{2R_m^2} \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B},$$

де  $b$  – довжина вихідної сторони в км;

2) визначення нев'язки сферичного трикутника

$$\omega = (A + B + C) - (180^\circ + \varepsilon);$$

3) врівноваження кутів – введення в кожний кут поправки, яка дорівнює третині нев'язки  $\omega$ ;

4) застосування теореми Лежандра – введення поправки в урівняні кути, яка дорівнює третині сферичного надлишку  $\varepsilon$  (отримання кутів плоского трикутника) та обчислення невідомих сторін трикутника за теоремою синусів.

**Робочі формули:**

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}; \quad B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}; \quad C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = fD_1; \quad f = \frac{\rho''}{2R_m^2}; \quad D_1 = \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}; \quad \varepsilon = fbc \sin A, \quad (3.2)$$

$$a = D_{II} \cdot \sin A_1; \quad b = D_{II} \cdot \sin B_1; \quad c = D_{II} \cdot \sin C_1, \quad (3.3)$$

де  $R_m = \sqrt{MN}$  – середній радіус кривизни еліпсоїда для середньої широти  $B_m$ ;

$$D_{II} = \frac{a}{\sin A_1} = \frac{b}{\sin B_1} = \frac{c}{\sin C_1}.$$

1.2. Розв'язування сферичних трикутників способом аддитаментів. В основі цього способу лежить теорема синусів

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}, \quad (3.4)$$

де  $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$  – сторони трикутника в радіанній мірі, синуси цих величин можна розкласти в ряд. Обмежившись двома членами розкладу, отримаємо

$$\frac{a - \frac{a^3}{6R^2}}{\sin A} = \frac{b - \frac{b^3}{6R^2}}{\sin B} = \frac{c - \frac{c^3}{6R^2}}{\sin C}. \quad (3.5)$$

Ідея способу аддитаментів полягає в тому, що сторони сферичного трикутника  $a, b, c$  виправляють поправками, внаслідок чого отримують сторони плоского трикутника  $a', b', c'$  і невідомі сторони сферичного трикутника.

При цьому в логарифмічному варіанті аддитаментами називають поправки в логарифм  $A_a, A_b, A_c$ . У випадку нелогарифмічного розв'язування, аддитаментами являються величини

$$A_a = ka^3, A_b = kb^3, A_c = kc^3,$$

$$\text{де } k = \frac{1}{6R^2},$$

$R = \sqrt{MN}$  – середній радіус кривизни еліпсоїда для місця знаходження трикутника.

Розглянемо послідовність розв'язування сферичного трикутника за способом аддитаментів.

1. Від вихідної сторони  $b$  віднімають її аддитамент  $A_b$  і отримують сторону плоского трикутника  $b'$ .

2. За відомими кутами сферичного трикутника і сторони  $b'$  розв'язують трикутник як плоский, користуючись теоремою синусів, знаходять решту сторін плоского трикутника  $a'$  і  $c'$ .

3. Отримані значення сторін виправляють їх аддитаментами  $A_a$  і  $A_c$  і знаходять сторони сферичного трикутника  $ABC$ .

Спосіб аддитаментів застосовується як контрольний при розв'язуванні трикутників за теоремою Лежандра.

### Робочі формули:

$$A_s = ks^3, k = \frac{1}{6R^2}, b' = b - A_b = b - kb^3, \quad (3.6)$$

$$A_b = kb^3, \quad (3.7)$$

$$a' = \frac{b' \sin A}{\sin B}, c' = \frac{a' \sin C}{\sin A}, \quad (3.8)$$

$$a = a' + ka'^3 = a' + A_a, c = c' + kc'^3 = c' + A_c, \quad (3.9)$$

$$A_a = ka'^3, A_c = kc'^3. \quad (3.10)$$

## 2. Розв'язування великих сфероїдних трикутників

При розв'язанні великих трикутників, отриманих за результатами вимірювання сторін радіогеодезичними чи супутниковими навігаційними системами, потрібно визначити азимути виміряних сторін. Для цього потрібно знати кути між сторонами, тобто розв'язати отриманий сфероїдний трикутник, якщо відомі його сторони.

Якщо сторони трикутника більше ніж 240 км, то такі трикутники потрібно розглядати як сфероїдні і сферичний надлишок обчислюється за більш точними формулами.

Загальний хід розв'язання сфероїдних трикутників можна розглядати наступним чином.

Нехай дані кути сфероїдного трикутника  $A, B, C$ , вихідна сторона  $b$ , широти вершин трикутника  $B_A, B_B, B_C$  і середня широта розміщення трикутника  $B_m$ . Потрібно визначити дві сторони трикутника.

Кути сфероїдного трикутника можна розглядати як:

$$A = A_{cf} + \delta A; B = B_{cf} + \delta B; C = C_{cf} + \delta C, \quad (3.11)$$

де  $A_{сф}, B_{сф}, C_{сф}$  – сферичні кути трикутника;

$\delta A, \delta B, \delta C$  – поправки за сфероїдність трикутника.

Поправки за сфероїдність вираховують за формулами:

$$\delta A = \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_A - K}{K} \right); \delta B = \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_B - K}{K} \right); \delta C = \frac{\varepsilon}{12} \left( \frac{K_C - K}{K} \right), \quad (3.12)$$

де  $K = \frac{1}{R_m^2} = \frac{1}{(MN)_m}$  – гауссова кривизна еліпсоїда на середній

широті трикутника,

$K_A, K_B, K_C$  – гауссові кривизни еліпсоїда в вершинах трикутника, що розглядається;

$M, N$  – радіуси кривизни еліпсоїда.

Визначивши поправки за сфероїдність за формулами (3.12), переходимо до сферичних кутів трикутника згідно (3.11)

$$A_{сф} = A - \delta A; B_{сф} = B - \delta B; C_{сф} = C - \delta C \quad (3.13)$$

На основі вихідних даних і сферичних кутів визначаємо наближене значення сферичного надлишку

$$\varepsilon_{np} = f \frac{b^2 \sin A_{сф} \sin C_{сф}}{\sin B_{сф}}$$

де  $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$ ,

$R_m$  – середній радіус кривизни еліпсоїда на широті  $B_m$ .

Величину  $f$  можна взяти із таблиці 3.1 по широті  $B_m$ .

Таблиця 3.1

$B$	$x, км$	$f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$	$f' = \frac{1}{2R_m^2}$
44°	4874	0,0025357	$1,22935 \times 10^{-8}$
46°	5096	0,0025345	$1,22877 \times 10^{-8}$
48°	5319	0,0025333	$1,22820 \times 10^{-8}$
50°	5541	0,0025322	$1,22763 \times 10^{-8}$
52°	5763	0,0025310	$1,22706 \times 10^{-8}$



Після цього наближено визначаємо кути плоского трикутника за відомими формулами Лежандра:

$$A_1 = A_{cf} - \frac{\varepsilon}{3}; B_1 = B_{cf} - \frac{\varepsilon}{3}; C_1 = C_{cf} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

За теоремою синусів визначаємо наближені значення сторін

$$a = D_{II} \sin A_1; \quad b = D_{II} \sin B_1; \quad c = D_{II} \sin C_1.$$

Таким чином, спочатку розв'язуємо трикутник за теоремою Лежандра і отриманий результат використовуємо як наближений для подальших уточнень. Згідно сферичної тригонометрії для визначення сферичного надлишку скористаємось формулою:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \left( \frac{p}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{p-a}{2} \right) \right] \cdot \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{p-b}{2} \right) \right] \cdot \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{p-c}{2} \right) \right] \quad (3.14)$$

де  $a, b, c$  – сторони трикутника в градусній мірі,

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Для отримання точних значень плоских кутів трикутника отриманий по (3.14) сферичний надлишок розподілимо згідно розширеної теореми Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_{cf} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_A; \\ B_1 &= B_{cf} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_B; \\ C_1 &= C_{cf} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_C \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \Delta_A &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - a^2}{R_m^2}; & \Delta_B &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - b^2}{R_m^2}; \\ \Delta_C &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - c^2}{R_m^2}; & m^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

За допомогою точних значень плоских кутів знову розв'язуємо трикутник як плоский, користуючись формулами (3.1), (3.2), (3.3) і визначаємо шукані сторони. Для контролю можна порохувати сферичні кути трикутника за формулами:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(\frac{A_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)} \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{B_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)} \\ \operatorname{tg}^2\left(\frac{C_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-c)} \end{aligned} \right\}, \quad (3.17)$$

де  $a, b, c$  – точні значення сторін трикутника

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

### Завдання:

1. Розв'язати малий сферичний трикутник  $ABC$  ланки тріангуляції 1 класу за формулою Лежандра та способом аддитивентів, якщо виміряні дані приведені до центра знаків і спроектовані на поверхню еліпсоїда. Отримані результати: кути  $A = 30^{\circ}03'56,842''$ ;  $B = 90^{\circ}03'56,391''$ ;  $C = 60^{\circ}03'56,966''$  та довжина сторони  $b$  (значення довжини сторони вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 3, табл. 3.1*; в *табл. 3.1* числове значення  $s$  дорівнює числовому значенню  $b$ ). Середня широта трикутника  $B_m = 48^{\circ}12'$ .

2. Розв'язати великий сферичний трикутник  $ABC$  за наступними вихідними даними:

$$A = 30^{\circ}03'56,842'';$$

$$B = 90^{\circ}03'56,391'';$$

$$C = 60^{\circ}03'56,966'';$$

$$B_A = 52^{\circ}00'00'';$$

$$B_B = 56^{\circ}43'42'';$$

$$B_C = 54^{\circ}00'00'';$$

$$B_m = 54^{\circ}14'36'';$$

$b$  (значення довжини сторони вибирається згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки,

див. додаток 3, табл. 3.1; в табл. 3.1 числове значення  $s$  дорівнює числовому значенню  $b$ )

### Числовий приклад

1. Розв'язати малий сферичний трикутник  $ABC$  ланки триангуляції I класу за формулою Лежандра та способом аддитаментів, якщо виміряні дані приведені до центра знаків і спроектовані на поверхню еліпсоїда. Отримані результати:

- кути  $A = 50^{\circ}20'19,41''$ ,  $B = 62^{\circ}12'44,54''$ ,  $C = 67^{\circ}26'58,43''$  ;

- сторона  $b = 44797,282$  м.

Середня широта трикутника  $B_m = 48^{\circ}12'$ .

1.1. Розв'язування малого сферичного трикутника за теоремою Лежандра

Таблиця 3.2

#### Обчислення сферичного надлишку

Елементи формули	Значення обчислень	Елементи формули	Значення обчислень
$f$	0,002533	$b^2 \sin A \sin C$	1426,77
$b^2$	2006,80	$\sin B$	0,884681
$\sin A$	0,769831	$D_I$	1612,76
$\sin C$	0,923542	$\varepsilon$	4,085''
$\sin A \sin C$	0,710971		

Примітка 1. При обчисленні  $\varepsilon$  довжини сторін трикутника виражаються в км.

Таблиця 3.3

#### Розв'язування малого сферичного трикутника за формулою Лежандра

Вершина	Виміряні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні плоскі кути $B_1$ $A_1$ $C_1$	Синуси кутів плоского трикутника	Довжини сторін, м (сф.)
$B$	$62^{\circ}12'44,54''$	0,57''	$62^{\circ}12'45,11''$	-1,36''	$62^{\circ}12'43,75''$	0,88467988	44797,282
$A$	$50^{\circ}20'19,41''$	0,57''	$50^{\circ}20'19,98''$	-1,36''	$50^{\circ}20'18,62''$	0,76982866	39981,594
$C$	$67^{\circ}26'58,43''$	0,57''	$67^{\circ}26'59,00''$	-1,37''	$67^{\circ}26'57,63''$	0,92354082	46765,072
$\Sigma$	$180^{\circ}00'02,38''$		$180^{\circ}00'04,09''$		$180^{\circ}00'00,00''$		
$\varepsilon$	04,09''						
$\omega$	-01,71''						
$D_{II}$							50636,714

1.2. Розв'язування малого сферичного трикутника способом аддитаментів

Таблиця 3.4

**Розв'язування малого сферичного трикутника  
способом аддитаментів**

Вершина кута	Вимірні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні сферичні кути	Синуси урівняних сферичних кутів	Сторони плоского трикутника, м $b', a', c'$	$A_s$	Сторони сферичного трикутника, м
<i>B</i>	62°12'44,54"	0,57"	62°12'45,11"	0,88468295	44796,917	0,368	44797,282
<i>A</i>	50°20'19,41"	0,57"	50°20'19,98"	0,76983287	38981,350	0,243	38981,593
<i>C</i>	67°26'58,43"	0,57"	67°26'59,00"	0,92354337	46764,654	0,419	46765,073
$\Sigma$	180°00'02,38"						
$\varepsilon$	04,09"						
$\omega$	-01,71"						

Примітка. Значення величини  $k$  можна прийняти для території України узагальнене  $k = \frac{1}{6R_m^2} = 409,14 \cdot 10^{-11}$ , а сторони в трикутниках виражають у кілометрах.

2. Розв'язати великий сферичний трикутник  $ABC$  за наступними вихідними даними:

$$A = 30^\circ 03' 56,842'';$$

$$B = 90^\circ 03' 56,391'';$$

$$C = 60^\circ 03' 56,966'';$$

$$b = 804666,593 \text{ м};$$

$$B_A = 52^\circ 00' 00'';$$

$$B_B = 56^\circ 43' 42'';$$

$$B_C = 54^\circ 00' 00'';$$

$$B_m = 54^\circ 14' 34''.$$

Розв'язання виконують в наступному порядку:

- 1) визначають сферичні кути за формулами (3.17);
- 2) обчислюють поправки за сфероїдальність  $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta C$  за формулами (3.12);
- 3) обчислюють шукані сферичні кути за формулами (3.11).

Таблиця 3.5

**Обчислення поправок  $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta C$  в кути за  
сфероїдальність трикутника**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$a$ (велика піввісь)	6378245 м		
$a(1-e^2)$	6335553 м	$M_A$	6375293 м
$B_A$	52°00'00"	$M_B$	6380290 м
$B_B$	56°43'42"	$M_C$	6377406 м
$B_C$	54°00'00"	$M_m$	6377662 м
$B_m$	54°14'34"	$0,75 e^2$	0,00502
$0,25e^2$	0,00167	$0,75 e^2 \sin^2 B_A$	0,00312
$1,25e^2$	0,00837	$0,75 e^2 \sin^2 B_B$	0,00351
$\sin B_A$	0,78801	$0,75 e^2 \sin^2 B_C$	0,00329
$\sin B_B$	0,83608	$0,75 e^2 \sin^2 B_m$	0,00331
$\sin B_C$	0,80902	$1 - 0,25 e^2 \sin^2 B_A$	0,99896
$\sin B_m$	0,81151	$1 - 0,25 e^2 \sin^2 B_B$	0,99883
$\sin^2 B_A$	0,62096	$1 - 0,25 e^2 \sin^2 B_C$	0,99891
$\sin^2 B_B$	0,69903	$1 - 0,25 e^2 \sin^2 B_m$	0,99890
$\sin^2 B_C$	0,65451	$1 - 0,75 e^2 \sin^2 B_A$	0,99688
$\sin^2 B_m$	0,65855	$1 - 0,75 e^2 \sin^2 B_B$	0,99649
$0,25 e^2 \sin^2 B_A$	0,00104	$1 - 0,75 e^2 \sin^2 B_C$	0,99671
$0,25 e^2 \sin^2 B_B$	0,00117	$1 - 0,75 e^2 \sin^2 B_m$	0,99669
$0,25 e^2 \sin^2 B_C$	0,00109	$N_A$	6391553 м
$0,25 e^2 \sin^2 B_m$	0,00110	$N_B$	6393222 м
$1,25 e^2 \sin^2 B_A$	0,00520	$N_C$	6392323 м
$1,25 e^2 \sin^2 B_B$	0,00585	$N_m$	6392387 м
$1,25 e^2 \sin^2 B_C$	0,00548	$\varepsilon/12$	59,074"
$1,25 e^2 \sin^2 B_m$	0,00551	$(K_A-K)/K$	0,00050
$1 + 0,25 e^2 \sin^2 B_A$	1,00104	$(K_B-K)/K$	-0,00054
$1 + 0,25 e^2 \sin^2 B_B$	1,00117	$(K_C-K)/K$	0,00005
$1 + 0,25 e^2 \sin^2 B_C$	1,00109	$\delta A$	0,030"
$1 + 0,25 e^2 \sin^2 B_m$	1,00110	$\delta B$	-0,032"
$1 - 1,25 e^2 \sin^2 B_A$	0,99480	$\delta C$	0,003"
$1 - 1,25 e^2 \sin^2 B_B$	0,99415		
$1 - 1,25 e^2 \sin^2 B_C$	0,99452		
$1 - 1,25 e^2 \sin^2 B_m$	0,99449		

Таблиця 3.6

## Обчислення сферичних кутів

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$A_{сф} = A - \delta A$	30°03'56,812"	$C_{сф} = C - \delta C$	60°03'56,963"
$B_{сф} = B - \delta B$	90°03'56,423"		

Таблиця 3.7

## Обчислення наближеного значення сферичного надлишку

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$f$	0,002530	$b^2 \sin A \sin C$	281111,415
$b^2$	647488,320	$\sin B$	0,99999934
$\sin A$	0,50099395	$D_I$	281111,61
$\sin C$	0,86659924	$\varepsilon''$	711,212"
$\sin A \sin C$	0,43416097	$\varepsilon^\circ$	0°11'51,212"

Таблиця 3.8

## Обчислення наближених значень сторін трикутників

Вершина	Кут сферичного трикутника	Поправка за нев'язку $-\frac{\omega}{3}$	Урівняні кути сферичного трикутника	Поправка $-\frac{\varepsilon}{3}$ за сферичний надлишок	Кути плоского трикутника	Синуси кутів плоского трикутника	Сторони сферичного трикутника, м
<b><math>D_{II} = 804666,593 \text{ м}</math></b>							
$B$	90°03'56,423"	0,338"	90°03'56,761"	-3'57,071"	89°59'59,690"	1,00000000	804666,593
$A$	30°03'56,812"	0,338"	30°03'57,150"	-3'57,070"	30°00'00,080"	0,50000034	402333,560
$C$	60°03'56,963"	0,338"	60°03'57,301"	-3'57,071"	60°00'00,230"	0,86602596	696862,150
$\Sigma$	180°11'50,198"		180°11'51,212"		180°00'00,000"		
$\varepsilon$	11'51,212"						
$\omega = \Sigma - (\varepsilon + 180^\circ)$	-1,014"						

Таблица 3.9

## Обчислення точного значення сферичного надлишку

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$\rho''/R_m$	0,032304551	$(p-b)/2$	0°39'38,658"
$a\rho''/R_m$	12997,205"= =3°36'37,205"	$(p-c)/2$	1°08'39,945"
		$tg \frac{p}{2}$	0,07468263
$b\rho''/R_m$	25994,393"= =7°13'14,393"	$tg \frac{(p-a)}{2}$	0,04306472
		$tg \frac{(p-b)}{2}$	0,01153257
$c\rho''/R_m$	22511,818= =6°15'11,818"	$tg \frac{(p-c)}{2}$	0,01997671
		$tg^2 \frac{\varepsilon}{4}$	0,00000074095
$2p$	17°05'03,416"	$tg \frac{\varepsilon}{4}$	0,00086078
$p$	8°32'31,708"	$\frac{\varepsilon}{4}$	0°02'57.550"
$p/2$	4°16'15,854"	$\varepsilon^\circ$	0°11'50,200"
$(p-a)/2$	2°27'57,252"		

Таблица 3.10

Обчислення поправок  $\Delta$ 

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$a^2$	161871,84 м	$2c^2$	971233,28 м
$b^2$	647787,37 м	$a^2+c^2$	647488,48
$c^2$	485616,64 м	$2b^2$	1295574,70 м
$a^2+b^2+c^2$	1295275,85		
$(MN)_m$	40768483,7 м	$\varepsilon/60$	11,8366"
$3(MN)_m$	123304950,0 м	$\Delta_A$	0,078
$b^2+c^2$	1133404,0 м	$\Delta_B$	-0,063
$2a^2$	323743,68 м	$\Delta_C$	-0,016
$b^2+a^2$	809659,21 м		
$m^2$	431758,62		

Таблиця 3.11

**Обчислення плоских кутів трикутників  
по розширеній теоремі Лежандра**

$A_1 = A_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_A = 30^{\circ}03'56,812'' - 3'56,733'' - 0,078'' = 30^{\circ}00'00,001''$
$B_1 = B_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_B = 90^{\circ}03'56,423'' - 3'56,733'' + 0,063'' = 89^{\circ}59'59,753''$
$C_1 = C_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_C = 60^{\circ}03'56,963'' - 3'56,733'' + 0,016'' = 60^{\circ}00'00,246''$

Таблиця 3.12

**Точне розв'язання трикутника**

Вершина	Кути плоского трикутника	Синуси кутів плоского трикутника	Сторони сферичного трикутника, м
<b><math>D_{II} = 804666,593</math> м</b>			
<i>B</i>	89°59'59,753"	1,00000000	804666,593
<i>A</i>	30°00'00,001"	0,50000000	402333,298
<i>C</i>	60°00'00,246"	0,86602600	696862,182
$\Sigma$	180°00'00,000"		

Таблиця 3.13

**Контрольні обчислення  
(обчислення сферичних кутів  $A_{сф}$ ,  $B_{сф}$ ,  $C_{сф}$ )**

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
$\rho / R_m$	0,032304551	$\sin(p-c)$	0,03993746
$a\rho / R_m$	12997,196" = =3°36'37,196"	$\sin p$	0,14853677
		$tg^2 \frac{A}{2}$	0,07212690
$b\rho / R_m$	25994,393 = =7°13'14,393"	$tg \frac{A}{2}$	0,26856452
		$\frac{A}{2}$	15°01'58,399"
$c\rho / R_m$	22511,820 = =6°15'11,820"	$A_{сф}$	30°03'56,798"
		$tg^2 \frac{B}{2}$	1,00229510



Продовження таблиці 3.13

1	2	3	4
$2p$	$17^{\circ}05'03,409''$	$tg \frac{B}{2}$	1,00114690
$p$	$8^{\circ}32'31,704''$	$\frac{B}{2}$	$45^{\circ}01'58,215''$
$p-a$	$4^{\circ}55'54,508''$	$B_{сф}$	$90^{\circ}03'56,430''$
$p-b$	$1^{\circ}19'17,312''$	$tg^2 \frac{C}{2}$	0,33421855
$p-c$	$2^{\circ}17'19,884''$	$tg \frac{C}{2}$	0,57811638
$\sin(p-a)$	0,0859003	$\frac{C}{2}$	$30^{\circ}01'58,477''$
$\sin(p-b)$	0,02306205	$C_{сф}$	$60^{\circ}03'56,954''$

Контрольні обчислення можна виконати за наступною схемою:

1. Обчислити поправки  $\Delta$  за формулами (3.16);
2. Обчислити сферичні надлишки за формулами (3.14);
3. Обчислити сферичні кути трикутника на підставі розширеної теореми Лежандра (3.15);
4. Обчислити поправки  $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta C$  за сфероїдність по формулам (3.12);
5. Обчислити сфероїдні кути  $A$ ,  $B$ ,  $C$  за формулами (3.11).

### Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Що таке сфероїдний трикутник?
2. Що означає розв'язати трикутник?
3. Яка різниця між малим та великим сфероїдними трикутниками?
4. Які методи розв'язку малого сфероїдного трикутника Ви знаєте?
5. Розкажіть алгоритм розв'язку великого сфероїдного трикутника.

## Лабораторна робота №4

### Розв'язування прямої і оберненої геодезичних задач

**Мета роботи:** ознайомитись із змістом прямої та оберненої геодезичних задач та розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки та методом із середніми аргументами (методом послідовних наближень)

#### Теоретичні відомості

Головну геодезичну задачу прийнято розглядати як дві задачі: пряма і обернена.

**Пряма геодезична задача** полягає в тому, що за відомими географічними координатами  $B_1, L_1$  деякої точки  $Q_1$ , а також прямому азимуту  $A_{12}$  і відстані  $S$  між точками  $Q_1$  і  $Q_2$  визначити координати кінцевої точки  $B_2, L_2$  і обернений азимут  $A_{21}$ .

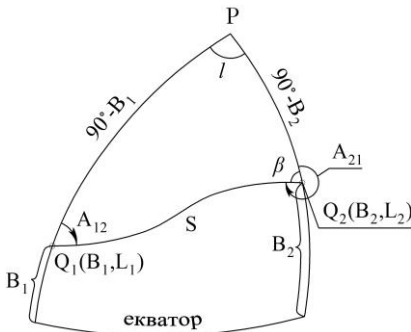


Рис. 4.1. Пряма і обернена геодезичні задачі

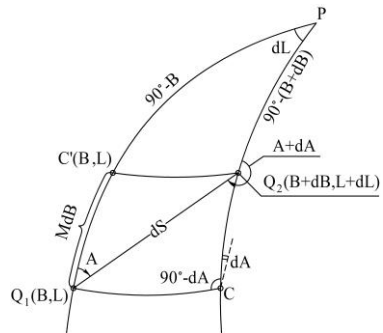


Рис. 4.2. Непрямий метод розв'язку головних геодезичних задач

**Обернена геодезична задача** полягає в тому, що за координатами початкової і кінцевої точок  $B_1, L_1, B_2, L_2$  визначити віддаль  $S$  між ними і азимуту  $A_{12}$  і  $A_{21}$  (див. рис. 4.1).

В геодезичній практиці пряму і обернену геодезичні задачі доводиться розв'язувати для різних довжин геодезичних ліній. На практиці склалась певна градація можливих віддалей, для кожного із яких існує найбільш прийнятний спосіб розв'язування головних геодезичних задач.

Малі відстані (20÷200 км) зустрічаються при обчисленні сторін трикутників і замикаючих ланок триангуляції I класу.

Середні відстані (200÷800 км) мають місце при обчисленні діагоналей полігонів триангуляції I класу, при обробці астрономо-геодезичної мережі, радіогеодезичних мережах, при розв'язанні динамічної триангуляції (ракетної) та інших задач.

Великі відстані (більше 800 км) зустрічаються при орієнтуванні референц-еліпсоїда, при геодезичному з'єднуванні континентів методом космічної триангуляції, в радіонавігації, при побудові єдиної координатної системи (WGS-84), з метою спостереження за керованими ракетами і т.д.

Для розв'язування головних геодезичних задач необхідно визначити рівняння зв'язку вихідних і визначуваних величин. Найбільш простий спосіб установлення таких рівнянь зв'язку і, як результат, розв'язування головних геодезичних задач полягає в безпосередньому розв'язанні трикутника  $Q_1PQ_2$ , в якому вихідні дані і визначувані невідомі як в прямій, так і в оберненій задачах являються елементами цього трикутника. Наприклад, в випадку прямої геодезичної задачі вихідними даними являються сторони  $S$ ,  $Q_1P$  кут  $A_{12}$  і  $L_1$ . Із розв'язання трикутника отримують інші його елементи  $l$ ,  $\beta$ ,  $Q_2P$ , за допомогою яких визначають шукані величини:

$$L_2 = L_1 + l; B_2 = 90^\circ - Q_2P; A_{21} = 360^\circ - \beta.$$

Такий шлях розв'язання головних геодезичних задач називається прямим. Однак у зв'язку з великими сторонами полярного трикутника  $Q_1PQ_2$ , які становлять декілька тисяч кілометрів, його потрібно розглядати як сферіодний. Ці обставини значно ускладнюють розв'язок і потребують використання 10-значних тригонометричних функцій. Тому застосовують непрямий шлях розв'язання, який полягає у визначенні різниць широт, довгот і азимутів на основі рівнянь зв'язку цих величин з вихідними даними. Наприклад, для прямої задачі визначають:

$$\left. \begin{aligned} dB &= B_2 - B_1 = \varphi_1(B_1, L_1, A_{12}, S) \\ dL &= L_2 - L_1 = \varphi_2(B_1, L_1, A_{12}, S) \\ dA &= A_{21} - A_{12} = \varphi_3(B_1, L_1, A_{12}, S) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

і тоді  $B_2 = B_1 + dB$ ;  $L_2 = L_1 + dL$ ;  $A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + dA$ .

Вид рівнянь зв'язку (4.1) установлюють наступним чином.

Згідно *рис. 4.2*, де  $Q_1$  і  $Q_2$  – дві нескінченно близькі точки на еліпсоїді,  $dS$  – відрізок геодезичної лінії,  $Q_1C$  і  $Q_2C'$  нескінченні малі дуги паралелей, із трикутника  $Q_1C'Q_2$  маємо:

$$\begin{aligned} MdB &= dS \cos A, \\ \text{або } rdL &= N \cos B dL = dS \sin A, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де  $r$  – радіус паралелі.

Із рівнобедренного сферичного трикутника  $Q_1PC$ , маючи на увазі, що  $PC = (90^\circ - B)$  і користуючись правилом розв'язування сферичних трикутників, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \cos(90^\circ - B) &= ctg dL ctg(90^\circ - dA) \\ tg dL \sin B &= tg dA \\ dA &= dL \sin B \\ dA &= \frac{dS \sin A \operatorname{tg} B}{N} \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

Із (4.2) і (4.3) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \sec B = \frac{V}{c} \sec B \sin A \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B = \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A \end{aligned} \right\}, \quad (4.4)$$

де  $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$  – друга функція геодезичної широти;

$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b}$  – радіус кривизни меридіана еліпсоїда на полюсах;

$e, e'$  – перший і другий ексцентриситети меридіанного еліпса.

Формули (4.4) являються звичайними диференціальними рівняннями першого порядку. Ці рівняння лежать в основі всіх

способів розв'язання головних геодезичних задач. Формули (4.4) дають можливість визначити різниці

$$(B_2 - B_1), (L_2 - L_1), (A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ)$$

шляхом інтегрування (4.4) між двома точками на еліпсоїді.

Після інтегрування отримаємо

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{c} \cos A dS \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{c} \sec B \sin A dS \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \int_0^S \frac{V}{S} \sin B \sec B \sin A dS \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Формули (4.5) використовуються для розв'язання прямої геодезичної задачі. В основі розв'язання оберненої геодезичної задачі лежать ті ж формули.

### **1. Розв'язування прямої геодезичної задачі методом допоміжної точки**

Із кінця геодезичної лінії  $Q_1Q_2$  проводять геодезичну лінію, ортогональну до меридіану початкової точки  $Q_1$ . Точку перетину цієї лінії з меридіаном позначимо  $C'$  і назвемо її допоміжною точкою. Широту її позначимо через  $B_0$ , а довгота її буде  $L_1$ .

Формули для розв'язання прямої геодезичної задачі по лінії  $Q_1Q_2$  можна отримати застосовуючи ряди

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \left(\frac{dB}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \\ L_2 &= L_1 + \left(\frac{dL}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \\ A_{21} &= A_{12} \pm 180^\circ + \left(\frac{dA}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

послідовно до ліній  $Q_1C'$  і  $C'Q_2$ , довжини цих ліній знаходять із розв'язування сферідного трикутника  $Q_1Q_2C'$ . Індекс « $\rangle_1$ » означає, що

похідна вираховується по координатах і азимуту в початковій точці лінії.

Кінцеві формули мають наступний вид:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}, \quad \sigma = \frac{S}{c} V_1^2, \quad u_0 = \sigma \cos A_1, \quad v_0 = \sigma \sin A_1, \\
 u &= u_0 \left( 1 + \frac{v_0^2}{3} \right), \quad v = v_0 \left( 1 - \frac{u_0^2}{6} \right), \quad c = v \left( 1 - \frac{u^2}{6} \right), \\
 B_0 &= B_1 + \rho'' u \left[ V_1 - \frac{e'^2}{4} u (3 \sin 2B_1 + 2u \cos 2B_1) \right], \\
 V_0 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_0}, \quad \gamma = \frac{v V_0}{V_1^2}, \quad \lambda = \frac{\gamma}{\cos B_0}, \quad \tau = \lambda \sin B_0, \\
 l'' &= \lambda \left( 1 - \frac{\tau^2}{3} \right) \rho'', \quad t = \tau \left( 1 - \frac{\lambda^2 + \tau^2}{6} \right), \quad d'' = \frac{t \gamma}{2} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) V_0^2 \rho'', \quad \varepsilon = \frac{u v}{2}, \\
 B_2 &= B_0 - d'', \quad L_2 = L_1 + l'', \quad A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + (t - \varepsilon) \rho''.
 \end{aligned}$$

При виведенні цих формул обмежились елементами  $\left(\frac{S}{c}\right)^3$ . Ними можна користуватися на відстанях між пунктами до 100 км. При більших відстанях потрібно враховувати елементи  $\left(\frac{S}{c}\right)^5$ ,  $\left(\frac{S}{c}\right)^4 e'^2$ ,  $\left(\frac{S}{c}\right)^3 e'^4$ .

В широтах північніше  $60^\circ$  при обчисленні різниці довгот потрібно користуватися формулою  $l'' = \rho'' \lambda \left[ 1 - \frac{\tau^2}{3} \left( 1 - \frac{2\tau^2 + \lambda^2}{5} \right) \right]$ , тобто потрібно враховувати ще один член розкладання функції.

## **2. Розв'язування прямої геодезичної задачі методом із середніми аргументами (метод послідовних наближень)**

В основі розв'язування задач як і раніше лежать степеневі ряди (4.6). Ці ряди перетворюють таким чином, щоб похідні

$\frac{dB^n}{dS^n}, \frac{d^n L}{dS^n}, \frac{d^n A}{dS^n}$  обчислювались не по початковій  $B, A$ , а по середній широті  $B_m = (B_1 + B_2) / 2$  і середньому азимуту  $A_m = (A_1 + A_2 \pm 180^\circ) / 2$ , що скорочує кількість членів правої частини рівняння в два рази, а точність залишається такою самою. Величини  $B_m$  і  $A_m$  умовно називають середніми аргументами.

Для розв'язування прямої геодезичної задачі при  $S < 60$  км формули із середніми аргументами зручно використовувати в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} b = B_2 - B_1 &= \beta \left( 1 + \frac{2\lambda^2 + \alpha^2}{24} \right) \rho''; \\ l = L_2 - L_1 &= \lambda \left( 1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} \right) \rho''; \\ a = A_{21} \pm 180^\circ - A_{12} &= \alpha \left( 1 + \frac{2\beta^2 + 2\lambda^2 - \alpha^2}{24} \right) \rho'' \end{aligned} \right\}, \quad (4.7)$$

$$\text{де } \beta = \frac{S}{c} V_m^2 \cos A_m, \lambda = \frac{S}{c} \frac{V_m}{\cos B_m} \sin A_m, \alpha = \lambda \sin B_m, V_m = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_m}$$

Послідовність розв'язування задачі за формулами (4.7). Вихідними величинами являються  $B_1, L_1, A_1, S_1$ . Так як широта  $B_m$  і середній азимут  $A_m$  не відомі величини, то розв'язування необхідно виконувати методом послідовних наближень. В першому наближенні можна прийняти  $B_m = B_1, A_m = A_{12}$ . В другому і наступних наближеннях

$$\text{приймають } B_m = B_1 + \frac{b}{2}, A_m = A_{12} + \frac{a}{2}.$$

Другі члени в дужках формул (4.7) починають враховувати при обчисленні  $b, l, a$  у другому наближенні. Їх значення в подальшому залишаються практично незмінними.

Значення шуканих величин отримують за формулами:

$$B_2 = B_1 + b; L_2 = L_1 + l, A_2 = A_1 + 180^\circ + a$$

Обчислення припиняють, коли останні значення  $B_2, L_2, A_{21}$  будуть рівні попереднім в рамках очікуваної точності.

Для скорочення загального числа наближень значення  $B_2, A_{21}$ , необхідні для отримання  $B_m, A_m$  в першому наближенні, можна визначити по карті, користуючись вихідними аргументами.

**Завдання:** розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки та методом із середніми аргументами (методом послідовних наближень) (значення географічних координат  $B_1$ ,  $L_1$  деякої точки  $Q_1$ , прямий азимут  $A_{12}$  і відстань  $S$  між точками  $Q_1$  і  $Q_2$  вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 3, табл. 3.1*).

**Числовий приклад:**

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки за наступними вихідними даними:

$$B_1 = 52^\circ 35' 44,6278''; L_1 = 28^\circ 25' 43,2822'';$$

$$A_{12} = 45^\circ 29' 34,268''; S = 32425,67 \text{ м.}$$

*Таблиця 4.1*

**Схема розв'язку прямої геодезичної задачі методом допоміжної точки**

Елементи формули	Результати обчислення	Елементи формули	Результати обчислення
$e'^2$	$6,738525 \cdot 10^{-3}$	$\cos B_0$	$6,045994 \cdot 10^{-1}$
$c$	6399699 м	$V_0$	1,001230
$\rho''$	206264,8	$\gamma$	$3,617856 \cdot 10^{-3}$
$B_1$	$52^\circ 59' 57,3$	$\lambda$	$5,98389 \cdot 10^{-3}$
$V_1^2$	1,002486	$\tau$	$4,766346 \cdot 10^{-3}$
$V_1$	1,001242	$l''$	1234,2560''
$\sigma$	$5,079345 \cdot 10^{-3}$	$t$	$4,766299 \cdot 10^{-3}$
$A_{12}$	$45^\circ 49' 28,5$	$d''$	1,7828''
$u_0$	$3,560611 \cdot 10^{-3}$	$(t - \varepsilon)\rho''$	981,790''
$v_0$	$3,622400 \cdot 10^{-3}$	$B_0$	$52^\circ 47' 59,9590''$
$u$	$3,560626 \cdot 10^{-3}$	$-d$	-1,7828
$v$	$3,622392 \cdot 10^{-3}$	$B_2$	$52^\circ 47' 58,1762''$
$3\sin 2B_1$	2,895166	$L_1$	$28^\circ 25' 43,2822''$
$2u\cos 2B_1$	$-1,866090 \cdot 10^{-3}$	$l$	$20' 34,2560''$
$B_0 - B_1$	$735,3312''$	$L_2$	$28^\circ 46' 17,53812''$
$B_0$	$52^\circ 47' 59,9590''$	$A_1 \pm 180^\circ$	$225^\circ 29' 34,268''$
$B_0^\circ$	$52^\circ,79998$	$(t - \varepsilon)\rho''$	$16' 21,790''$
$\sin B_0$	$7,965297 \cdot 10^{-1}$	$A_{21}$	$225^\circ 45' 56,058''$



2. Розв'язати пряму геодезичну задачу методом із середнім аргументом (методом послідовних наближень) за наступними вихідними даними:

$$B_1 = 52^\circ 35' 44,6278'';$$

$$L_1 = 28^\circ 25' 43,2822'';$$

$$A_{12} = 45^\circ 29' 34,268'';$$

$$S = 32425,67 \text{ м.}$$

Таблиця 4.2

**Схема обчислення розв'язку прямої геодезичної задачі методом із середнім аргументом (методом послідовних наближень)**

$\frac{S}{c}$	$5,066749 \cdot 10^{-3}$	$\rho''$	206264,8		
$B_1$	$52^\circ,59573$	$(2\lambda^2 + \alpha^2)/24$	$3,93 \cdot 10^{-6}$		
$L_1$	$28^\circ,42869$	$(\alpha^2 - \beta^2)/24$	$0,41 \cdot 10^{-6}$		
$A_{12}$	$45^\circ,49285$	$(2\beta^2 + 2\lambda^2 - \alpha^2)/24$	$3,09 \cdot 10^{-6}$		
$B_m$	$52^\circ,59573$	$52^\circ,69786$	$52^\circ,697610$	$52^\circ,697610$	
$A_m$	$45^\circ,49285$	$45^\circ,62839$	$45^\circ,62920$	$45^\circ,62921$	
$\cos B_m$	$6,074351 \cdot 10^{-1}$	$6,060181 \cdot 10^{-1}$	$6,060215 \cdot 10^{-1}$		
$\sin B_m$	$7,943694 \cdot 10^{-1}$	$7,954509 \cdot 10^{-1}$	$7,954483 \cdot 10^{-1}$		
$\cos A_m$	$7,009982 \cdot 10^{-1}$	$6,993092 \cdot 10^{-1}$	$6,992990 \cdot 10^{-1}$		
$\sin A_m$	$7,131630 \cdot 10^{-1}$	$7,148198 \cdot 10^{-1}$	$7,148291 \cdot 10^{-1}$		
$V_m^3$	1,003731	1,003713	1,003713		
$V_m$	1,001242	1,001236	1,001235		
$\frac{SV_m}{c}$	$5,073041 \cdot 10^{-3}$	$5,073014 \cdot 10^{-3}$	$5,073014 \cdot 10^{-3}$		
$\beta$	$3,565033 \cdot 10^{-3}$	$3,556382 \cdot 10^{-3}$	$3,556330 \cdot 10^{-3}$		
$\lambda$	$5,956035 \cdot 10^{-3}$	$5,983795 \cdot 10^{-3}$	$5,983843 \cdot 10^{-3}$		
$\alpha$	$4,731292 \cdot 10^{-3}$	$4,759815 \cdot 10^{-3}$	$4,759838 \cdot 10^{-3}$		
$b''$	735,3408''	733,5593''	733,5485''		
$l''$	1228,5200''	1234,2460''	1234,2560''		
$a''$	975,8989''	981,7853''	981,790''		
$B_1$	$52^\circ 35' 44,6278''$	$L_1$	$28^\circ 25' 43,2822''$	$A_{12}$	$45^\circ 29' 34,268''$
$b$	$12' 13,5485''$	$l$	$20' 34,2560''$	$a$	$16' 21,790''$
$B_2$	$52^\circ 47' 58,1763''$	$L_2$	$28^\circ 46' 17,5382''$	$A_{21}$	$225^\circ 45' 56,058''$

**Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:**

1. Дайте визначення головним геодезичним задачам.
2. Охарактеризуйте градацію можливих віддалей, для кожного із яких існує найбільш прийнятний спосіб розв'язування головних геодезичних задач.
3. Які основні шляхи розв'язку прямої та оберненої геодезичних задач Ви знаєте?
4. Які методи розв'язання прямої геодезичної задачі Ви знаєте?
5. Які методи розв'язання оберненої геодезичної задачі Ви знаєте?

## Лабораторна робота №5

### Розв'язування головних геодезичних задач в просторі

**Мета роботи:** ознайомитись із змістом та розв'язати пряму і обернену геодезичні задачі в просторі

#### Теоретичні відомості

##### Пряма геодезична задача в просторі

В зв'язку з широким впровадженням комп'ютерної техніки на даний час можна вважати, що найбільш оптимальним шляхом розв'язування головних геодезичних задач є використання чисельних методів інтегрування диференційних рівнянь, що характеризують зміну широти і довготи

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} \quad ; \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}, \quad (5.1)$$

а також зміну азимута вздовж геодезичної лінії

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B} \sin B. \quad (5.2)$$

Для розв'язування головних геодезичних задач в просторі використовують системи просторових декартових  $(X, Y, Z)$ , геодезичних  $(B, L, H)$ , топоцентричних горизонтальних – декартових  $(x', y', z')$  та полярних  $(A, z, D)$  координат і зв'язки між ними.

За визначенням топоцентричних полярних координат  $z, A, D$  маємо такі формули для координатних перетворень:

$$\begin{aligned} x' &= D \sin z \cos A, \\ y' &= D \sin z \sin A, \\ z' &= D \cos z, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{y'}{x'}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad D = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (5.4)$$

Декартові просторові координати  $X, Y, Z$  і топоцентричні декартові координати  $x', y', z'$  пов'язані наступними залежностями:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{bmatrix} + P_Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

де матриця  $P_Q$  має такі елементи:

$$P_Q = \begin{vmatrix} -\sin B_Q \cos L_Q & -\sin L_Q & \cos B_Q \cos L_Q \\ -\sin B_Q \sin L_Q & \cos L_Q & \cos B_Q \sin L_Q \\ \cos B_Q & 0 & \sin B_Q \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

І зворотний зв'язок:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_Q = P'_Q \begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

де матриця  $P'_Q$  – транспонована матриця  $P_Q$ .

**Пряма геодезична задача** формулюється наступним чином: задані геодезичні координати  $B_1, L_1, H_1$  початкової точки  $Q_1$  і топоцентричні полярні координати  $z_{12}, A_{12}, D$  точки  $Q_2$  відносно початкової точки  $Q_1$ . Необхідно визначити геодезичні координати  $B_2, L_2, H_2$  точки  $Q_2$  (рис. 5.1).

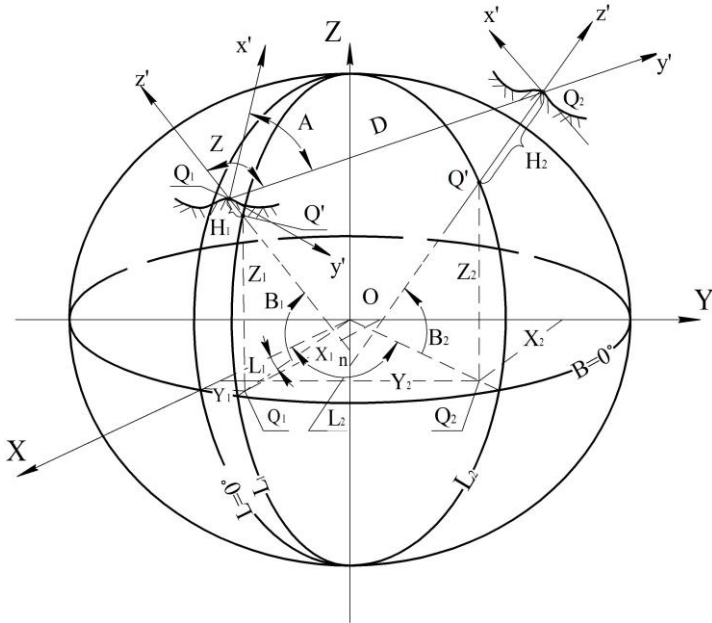


Рис. 5.1. Головна геодезична задача в просторі

Поставлену задачу розв'язують в такій послідовності:

а) за формулами зв'язку

$$\begin{aligned}
 X &= X + \Delta X = (N + H) \cos B \cos L, \\
 Y &= Y + \Delta Y = (N + H) \cos B \sin L, \\
 Z &= Z + \Delta Z = [N(1 - e^2) + H] \sin B
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

обчислюють просторові декартові координати  $X_1, Y_1, Z_1$ , точки  $Q_1$ ;

б) обчислюють елементи матриці перетворення координат  $P_Q$ , за формулою (5.6);

в) використовуючи формули (5.3), обчислюють топоцентричні декартові координати  $x'_2, y'_2, z'_2$ ;

г) за формулою (5.5) обчислюють декартові координати  $X_2, Y_2, Z_2$  точки  $Q_2$ ;

д) для переходу до геодезичних координат  $B_2, L_2, H_2$  точки  $Q_2$  використовують формулу зв'язку:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg} B_{i+1} = \frac{Z}{R} + \frac{b \operatorname{tg} B_i}{\sqrt{c + \operatorname{tg}^2 B_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 \operatorname{tg} B_1 &= \frac{Z}{X}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}}, \quad c = \frac{1}{1-e^2}, \quad (5.9) \\
 H &= \frac{Z}{\sin B} - (1-e^2)N.
 \end{aligned}$$

**Обернена геодезична задача:** задані геодезичні координати  $B, L, H$  двох точок  $Q_1$  і  $Q_2$ . Необхідно знайти топоцентричні полярні координати  $z_{12}, A_{12}, D$  точки  $Q_2$  відносно початкової точки  $Q_1$ .

Для розв'язування поставленої задачі можна застосувати таку схему:

а) від геодезичних координат  $B, L, H$  точок  $Q_1$  та  $Q_2$  за формулами (5.8) переходять до декартових  $X_i, Y_i, Z_i$  (де  $i = 1, 2$ );

б) обчислюють елементи транспонованої матриці перетворення координат  $P'_2$  за формулою

$$P'_2 = \begin{vmatrix} -\sin B_2 \cos L_2 & -\sin B_2 \sin L_2 & \cos B_2 \\ -\sin L_2 & \cos L_2 & 0 \\ \cos B_2 \cos L_2 & \cos B_2 \sin L_2 & \sin B_2 \end{vmatrix};$$

в) за формулою (5.7) обчислюють топоцентричні декартові координати  $x'_i, y'_i, z'_i$  ( $i = 1, 2$ ) точки  $Q_1$  відносно точки  $Q_2$  і навпаки;

г) топоцентричні полярні координати  $z_{12}, A_{12}, D$  точки  $Q_2$  відносно початкової точки  $Q_1$  і  $z_{21}, A_{21}, D$  точки  $Q_1$  відносно точки  $Q_2$  обчислюють за формулами (5.4).

Наведені вище схеми можна використовувати для розв'язування головної геодезичної задачі між точками на поверхні еліпсоїда. Для цього в цих формулах достатньо прийняти  $H_1 = H_2 = 0$ . Розв'язком при цьому, наприклад, в оберненій геодезичній задачі будуть азимуті прямого і оберненого нормальних перерізів та довжина хорди цих перерізів.

### Завдання:

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу в просторі (значення геодезичних координат  $B_1, L_1, H_1 = 385,471$  м, початкової точки  $Q_1$  і

топоцентричні полярні координати  $z_{12} = 89^{\circ}18'16,2''$ ,  $A_{12}$ ,  $D$  точки  $Q_2$  відносно початкової точки  $Q_1$  вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. додаток 3, табл. 3.1; в табл. 3.1 числове значення  $s$  дорівнює числовому значенню  $D$ ).

2. Розв'язати обернену геодезичну задачу в просторі використовуючи як вихідні дані результати розв'язку прямої геодезичної задачі в просторі;  $H_2 = 1107,509$  м.

### Числовий приклад:

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу в просторі за наступними вихідними даними:

$$B_1 = 50^{\circ}35'44,6278'';$$

$$L_1 = 28^{\circ}25'43,2822'';$$

$$H_1 = 385,471 \text{ м};$$

$$D = 45900,500 \text{ м};$$

$$z_{12} = 89^{\circ}18'16,2'';$$

$$A_{12} = 45^{\circ}29'34,268''.$$

Для еліпсоїда Красовського:

$$a = 6378245 \text{ м}; e^2 = 0,006693421623.$$

Алгоритм розв'язку:

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}},$$

$$X_1 = (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1,$$

$$Y_1 = (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1,$$

$$Z_1 = (N_1 + H_1 - e^2 N_1) \sin B_1,$$

$$x'_2 = D \sin z_{12} \cos A_{12},$$

$$y'_2 = D \sin z_{12} \sin A_{12},$$

$$z'_2 = D \cos z_{12},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin L_1 & \cos B_1 \cos L_1 \\ -\sin B_1 \sin L_1 & \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 \\ \cos B_1 & 0 & \sin B_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + P_1 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_2,$$

$$tgL_2 = \frac{Y_2}{X_2}, R = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}, c = \frac{1}{1-e^2}, b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}},$$

$$tgB_2^i = \frac{Z_2}{R}, tgB_2^{i+1} = \frac{Z_2}{R} + \frac{btgB_2^i}{\sqrt{c+tg^2B_2^i}}, i=1,2,\dots,n.$$

$$H_2 = \frac{Z_2}{\sin B_2} - (1-e^2)N_2.$$

Таблиця 5.1

**Схема обчислення прямої геодезичної задачі в просторі**

Елементи формули	Результати обчислення	Елементи формули	Результати обчислення
$N_1$	6391027,912	$\Delta X$	-37133,940
$\cos B_1$	0,634788100	$\Delta Y$	17118,257
$\sin B_1$	0,772686267	$\Delta Z$	20854,056
$\cos L_1$	0,879410305	$X_2$	3530803,532
$\sin L_1$	0,476064612	$Y_2$	1948604,343
$\cos z_{12}$	0,012138466	$Z_2$	4926357,554
$\sin z_{12}$	0,999926326	$R$	4032819,419
$\cos A_{12}$	0,700998238	$c$	1,006738525
$\sin A_{12}$	0,713163003	$b$	0,010621819
$X_1$	3567937,472	$N_2$	6391133,789
$Y_1$	1931486,086	$tgL_2$	0,551886936
$Z_1$	4905503,498	$B_2^1$	50°41'43,89"
$P_1$	-0,679508265 -0,476064612 0,558239196	$B_2^2$	50°53'00,49"
	-0,367848587 0,879410305 0,302200150	$B_2^3$	50°53'02,30"
	0,634788100 0 0,772686267	$B_2^4$	50°53'02,31"
$x'_{21}$	32173,7991	$B_2^5$	50°53'02,31"
$y'_{21}$	32732,1267	$B_2$	50°53'02,31"
$z'_{21}$	557,1616	$L_2$	28°53'37,44"
		$H_2$	1107,509



2. Розв'язати обернену геодезичну задачу в просторі використовуючи як вихідні дані результати розв'язку прямої геодезичної задачі в просторі.

Вихідні дані:

$$B_1 = 50^\circ 35' 44,6278'';$$

$$L_1 = 28^\circ 25' 43,2822'';$$

$$H_1 = 385,471 \text{ м};$$

$$B_2 = 50^\circ 53' 02,3100'';$$

$$L_2 = 28^\circ 53' 37,4398'';$$

$$H_2 = 1107,509 \text{ м}.$$

Алгоритм розв'язку:

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}}, \quad i = 1, 2,$$

$$X_i = (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i,$$

$$Y_i = (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i,$$

$$Z_i = (N_i + H_i - e^2 N_i) \sin B_i,$$

$$P'_i = \begin{vmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{vmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_j = P'_i \begin{bmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \\ Z_i - Z_j \end{bmatrix}, \quad j = 2, 1; \quad i = 1, 2,$$

$$\operatorname{tg} A_{ij} = \frac{y'_j}{x'_j}, \quad \operatorname{ctg} z_{ij} = \frac{Z}{R} + \frac{z'_j}{\sqrt{x'^2_j + y'^2_j}},$$

$$D = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}.$$

Таблиця 5.2

## Схема обчислення оберненої геодезичної задачі в просторі

Елементи формули	Результати обчислення			Елементи формули	Результати обчислення
$N_1$	6391027,912			$N_2$	6391133,789
$\cos B_1$	0,634788100			$\cos B_2$	0,630892834
$\sin B_1$	0,772686267			$\sin B_2$	0,775869983
$\cos L_1$	0,879410305			$\cos L_2$	0,875517380
$\sin L_1$	0,476064612			$\sin L_2$	0,483186626
$X_1$	3567937,472			$X_2$	3530803,532
$Y_1$	1931486,086			$Y_2$	1948604,343
$Z_1$	4905503,498			$Z_2$	4926357,554
$A_{21}$	225°51'10,57"				
$P'_1$	-0,679508265	-0,367848587	0,634788100	$\Delta X$	-37133,940
	-0,476064612	0,879410305	0	$\Delta Y$	17118,257
	0,558239196	0,302200150	0,772686267	$\Delta Z$	20854,056
$P'_2$	-0,679287654	-0,37488999	0,634788100	$x'_{21}$	32173,7991
	-0,483186626	0,875517380	0	$y'_{21}$	32732,1267
	0,5523576 41	0,304838979	0,775869983	$z'_{21}$	557,1616
$D$	45900,500 м			$x'_{12}$	-31963,8381
$z_{12}$	89°18'16,20"			$y'_{12}$	-32929,9547
$z_{21}$	91°05'41,86"				
$A_{12}$	45°29'34,27"			$z'_{12}$	-877,1326
$A_{21}$	225°51'10,57"				

**Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:**

1. Як формулюється пряма геодезична задача в просторі?
2. Як формулюється обернена геодезична задача в просторі?
3. Що являють собою декартові просторові координати?
4. Що являють собою топоцентричні декартові координати?
5. Що являють собою геодезичні координати?

## **Вимоги до виконання та оформлення лабораторних робіт**

Лабораторні роботи з курсу «Основи вищої геодезії» виконуються кожним студентом згідно номера індивідуального варіанту. Номер індивідуального варіанту визначають дві останні цифри номера залікової книжки студента. Вихідні дані для виконання лабораторних робіт наведено в ДОДАТКАХ 1 ÷ 3 даних методичних вказівок.

Лабораторні роботи оформлюються на папері формату А4.

Приклад оформлення титульного аркуша наведено в ДОДАТКУ 4.

Основний напис для текстових документів на першому аркуші повинен виконуватись згідно *форми 2*, на подальших аркушах – згідно *форми 2а* (основні написи для текстових документів (*форма 2 та форма 2а* наведено в ДОДАТКУ 5).

Позначення документа виконується за наступною структурою:

КМ. ЛР12. ХХ. 00. ЗВ,

де

КМ – код кафедри (кафедра маркшейдерії);

ЛР – позначення виду робіт (лабораторні роботи);

12 – рік виконання лабораторної роботи (2012 рік);

ХХ – номер індивідуального варіанта;

00 – порядковий номер розділу (00 – титульний аркуш; 01 – перша лабораторна робота; 02 – друга лабораторна робота);

ЗВ – позначення звіту.

Відстань від рамки аркуша до межі тексту на початку і в кінці рядків повинна дорівнювати 3÷5 мм. Відстань від верхнього і нижнього рядка тексту до верхньої чи нижньої рамки – 10÷15 мм. Відступ абзацу від лівої обрамляючої лінії – 15÷17 мм.

В пояснювальній записці спочатку зазначається номер та тема лабораторної роботи, номер варіанту, наводяться короткі теоретичні відомості. Розрахунки супроводжуються поясненням кожної дії.

**Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №1 «Обчислення довжини дуг меридіана та паралелі»**

Таблиця 1.1

**Обчислення довжини дуги меридіана (еліпсоїд Красовського)**

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	Широта точки 1	Широта точки 2
1	2	3
01	$B_1 = 45^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}59'58,938''$
02	$B_1 = 44^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}29'58,938''$
03	$B_1 = 44^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}59'58,938''$
04	$B_1 = 43^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}29'58,938''$
05	$B_1 = 43^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 46^{\circ}59'58,938''$
06	$B_1 = 45^{\circ}50'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}29'58,938''$
07	$B_1 = 46^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}59'58,938''$
08	$B_1 = 46^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}29'58,938''$
09	$B_1 = 47^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}59'58,938''$
10	$B_1 = 47^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}29'58,938''$
11	$B_1 = 48^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}59'58,938''$
12	$B_1 = 48^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}29'58,938''$
13	$B_1 = 49^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}59'58,938''$
14	$B_1 = 49^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}29'58,938''$
15	$B_1 = 50^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}59'58,938''$
16	$B_1 = 50^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}29'58,938''$
17	$B_1 = 49^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}44'58,938''$
18	$B_1 = 50^{\circ}15'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}14'58,938''$
19	$B_1 = 50^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}44'58,938''$
20	$B_1 = 51^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}59'58,938''$
21	$B_1 = 56^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}00'00,000''$
22	$B_1 = 56^{\circ}15'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}15'00,000''$
23	$B_1 = 56^{\circ}30'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}30'00,000''$
24	$B_1 = 56^{\circ}45'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}45'00,000''$
25	$B_1 = 57^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 61^{\circ}00'00,000''$
26	$B_1 = 44^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 48^{\circ}00'00,000''$
27	$B_1 = 44^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 48^{\circ}30'00,000''$
28	$B_1 = 45^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 49^{\circ}00'00,000''$
29	$B_1 = 45^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 49^{\circ}30'00,000''$

*Продовження ДОДАТКУ 1  
Продовження таблиці 1.1*

1	2	3
30	$B_1 = 46^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 50^{\circ}00'00,000''$
31	$B_1 = 45^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 46^{\circ}59'58,938''$
32	$B_1 = 44^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 46^{\circ}29'58,938''$
33	$B_1 = 44^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 45^{\circ}59'58,938''$
34	$B_1 = 43^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 45^{\circ}29'58,938''$
35	$B_1 = 43^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 44^{\circ}59'58,938''$
36	$B_1 = 45^{\circ}50'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}29'58,938''$
37	$B_1 = 46^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}59'58,938''$
38	$B_1 = 46^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}29'58,938''$
39	$B_1 = 47^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}59'58,938''$
40	$B_1 = 47^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}29'58,938''$
41	$B_1 = 48^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}59'58,938''$
42	$B_1 = 48^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}29'58,938''$
43	$B_1 = 49^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}59'58,938''$
44	$B_1 = 49^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}29'58,938''$
45	$B_1 = 50^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}59'58,938''$
46	$B_1 = 50^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}29'58,938''$
47	$B_1 = 49^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}44'58,938''$
48	$B_1 = 50^{\circ}15'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}14'58,938''$
49	$B_1 = 50^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}44'58,938''$
50	$B_1 = 51^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}59'58,938''$
51	$B_1 = 56^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 58^{\circ}00'00,000''$
52	$B_1 = 56^{\circ}15'18,283''$	$B_2 = 58^{\circ}15'00,000''$
53	$B_1 = 56^{\circ}30'18,283''$	$B_2 = 58^{\circ}30'00,000''$
54	$B_1 = 56^{\circ}45'18,283''$	$B_2 = 58^{\circ}45'00,000''$
55	$B_1 = 57^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 59^{\circ}00'00,000''$
56	$B_1 = 44^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 46^{\circ}00'00,000''$
57	$B_1 = 44^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 46^{\circ}30'00,000''$
58	$B_1 = 45^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 47^{\circ}00'00,000''$
59	$B_1 = 45^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 47^{\circ}30'00,000''$
60	$B_1 = 46^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 48^{\circ}00'00,000''$
61	$B_1 = 47^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}59'58,938''$
62	$B_1 = 46^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}29'58,938''$
63	$B_1 = 46^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}59'58,938''$
64	$B_1 = 45^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}29'58,938''$
65	$B_1 = 45^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 46^{\circ}59'58,938''$
66	$B_1 = 47^{\circ}50'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}29'58,938''$
67	$B_1 = 48^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}59'58,938''$

Продовження ДОДАТКУ 1  
Продовження таблиці 1.1

1	2	3
68	$B_1 = 48^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}29'58,938''$
69	$B_1 = 49^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}59'58,938''$
70	$B_1 = 49^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}29'58,938''$
71	$B_1 = 50^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}59'58,938''$
72	$B_1 = 50^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}29'58,938''$
73	$B_1 = 51^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 52^{\circ}59'58,938''$
74	$B_1 = 51^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}29'58,938''$
75	$B_1 = 52^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}59'58,938''$
76	$B_1 = 52^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}29'58,938''$
77	$B_1 = 51^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 53^{\circ}44'58,938''$
78	$B_1 = 52^{\circ}15'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}14'58,938''$
79	$B_1 = 52^{\circ}45'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}44'58,938''$
80	$B_1 = 53^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 54^{\circ}59'58,938''$
81	$B_1 = 58^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}00'00,000''$
82	$B_1 = 58^{\circ}15'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}15'00,000''$
83	$B_1 = 58^{\circ}30'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}30'00,000''$
84	$B_1 = 58^{\circ}45'18,283''$	$B_2 = 60^{\circ}45'00,000''$
85	$B_1 = 59^{\circ}00'18,283''$	$B_2 = 61^{\circ}00'00,000''$
86	$B_1 = 46^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 48^{\circ}00'00,000''$
87	$B_1 = 46^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 48^{\circ}30'00,000''$
88	$B_1 = 47^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 49^{\circ}00'00,000''$
89	$B_1 = 47^{\circ}30'00,000''$	$B_2 = 49^{\circ}30'00,000''$
90	$B_1 = 48^{\circ}00'00,000''$	$B_2 = 50^{\circ}00'00,000''$
91	$B_1 = 48^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}59'58,938''$
92	$B_1 = 47^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 48^{\circ}29'58,938''$
93	$B_1 = 47^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}59'58,938''$
94	$B_1 = 46^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 47^{\circ}29'58,938''$
95	$B_1 = 46^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 46^{\circ}59'58,938''$
96	$B_1 = 48^{\circ}50'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}29'58,938''$
97	$B_1 = 49^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 49^{\circ}59'58,938''$
98	$B_1 = 49^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}29'58,938''$
99	$B_1 = 50^{\circ}00'17,221''$	$B_2 = 50^{\circ}59'58,938''$
00	$B_1 = 50^{\circ}30'17,221''$	$B_2 = 51^{\circ}29'58,938''$

**Обчислення довжини дуги паралелі (Еліпсоїд Красовського)**

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	Широта паралелі	Різниця довгот
1	2	3
01	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}30'30,000''$
02	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'00,000''$
03	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'00,000''$
04	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}05'30,000''$
05	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}10'00,000''$
06	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}50'00,000''$
07	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}55'00,000''$
08	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
09	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
10	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}15'00,000''$
11	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'30,000''$
12	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'00,000''$
13	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}35'30,000''$
14	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}40'00,000''$
15	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'45,000''$
16	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}07'45,000''$
17	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}30'30,000''$
18	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'00,000''$
19	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'00,000''$
20	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}05'30,000''$
21	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}10'00,000''$
22	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}50'00,000''$
23	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}55'00,000''$
24	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
25	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
26	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'30,000''$
27	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
28	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'00,000''$
29	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}35'30,000''$
30	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}40'00,000''$
31	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
32	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$

Продовження ДОДАТКУ 1  
Продовження таблиці 1.2

1	2	3
33	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}50'00,000''$
34	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}55'00,000''$
35	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}45'00,000''$
36	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}55'30,000''$
37	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}00'00,000''$
38	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}05'30,000''$
39	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}10'00,000''$
40	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}15'45,000''$
41	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}37'45,000''$
42	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'30,000''$
43	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}15'00,000''$
44	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'00,000''$
45	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}35'30,000''$
46	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}40'00,000''$
47	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
48	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
49	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}50'00,000''$
50	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}55'00,000''$
51	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}30'30,000''$
52	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'00,000''$
53	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'00,000''$
54	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}05'30,000''$
55	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}10'00,000''$
56	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}50'00,000''$
57	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}55'00,000''$
58	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
59	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
60	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}15'00,000''$
61	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'30,000''$
62	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'00,000''$
63	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}35'30,000''$
64	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}40'00,000''$
65	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'45,000''$
66	$B = 45^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}07'45,000''$
67	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}30'30,000''$
68	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}45'00,000''$
69	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}00'00,000''$
70	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}05'30,000''$



Продовження ДОДАТКУ 1  
Продовження таблиці 1.2

1	2	3
71	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}10'00,000''$
72	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}50'00,000''$
73	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0^{\circ}55'00,000''$
74	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}20'00,000''$
75	$B = 49^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}25'00,000''$
76	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'30,000''$
77	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}45'00,000''$
78	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}00'00,000''$
79	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}05'30,000''$
80	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}10'00,000''$
81	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}50'00,000''$
82	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}55'00,000''$
83	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}20'00,000''$
84	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}25'00,000''$
85	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}15'00,000''$
86	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}25'30,000''$
87	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}30'00,000''$
88	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}35'30,000''$
89	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}40'00,000''$
90	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}45'45,000''$
91	$B = 50^{\circ}20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}07'45,000''$
92	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}30'30,000''$
93	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}45'00,000''$
94	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}00'00,000''$
95	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}05'30,000''$
96	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}10'00,000''$
97	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}50'00,000''$
98	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1^{\circ}55'00,000''$
99	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}20'00,000''$
00	$B = 54^{\circ}00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2^{\circ}25'00,000''$

**Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №2 «Обчислення довжин сторін і площі сферойдної трапеції»**

Таблиця 2.1

**Обчислення довжин сторін і площі сферойдної трапеції**

<b>№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)</b>	<b><math>B_1</math></b>	<b><math>B_2</math></b>	<b><math>L_1</math></b>	<b><math>L_2</math></b>	<b>Номенклатура трапеції</b>
1	2		4	5	6
01	51°40'	52°00'	28°00'	28°30'	
02	51°40'	52°00'	28°30'	29°00'	
03	51°20'	51°40'	28°00'	28°30'	
04	51°20'	51°40'	28°30'	29°00'	
05	51°20'	52°00'	28°00'	29°00'	
06	51°40'	52°00'	29°00'	29°30'	
07	51°40'	52°00'	29°30'	30°00'	
08	51°20'	51°40'	29°00'	29°30'	
09	51°20'	51°40'	29°30'	30°00'	
10	51°20'	52°00'	29°00'	30°00'	
11	51°40'	52°00'	30°00'	30°30'	
12	51°40'	52°00'	30°30'	31°00'	
13	51°20'	51°40'	30°00'	30°30'	
14	51°20'	51°40'	30°30'	31°00'	
15	51°20'	52°00'	30°00'	31°00'	
16	51°40'	52°00'	31°00'	31°30'	
17	51°40'	52°00'	31°30'	32°00'	
18	51°20'	51°40'	31°00'	31°30'	
19	51°20'	51°40'	31°30'	32°00'	
20	51°20'	52°00'	31°00'	32°00'	
21	51°00'	51°20'	28°00'	28°30'	
22	51°00'	51°20'	28°30'	29°00'	
23	50°40'	51°00'	28°00'	28°30'	
24	50°40'	51°00'	28°30'	29°00'	
25	50°40'	51°20'	28°00'	29°00'	
26	51°00'	51°20'	29°00'	29°30'	
27	51°00'	51°20'	29°30'	30°00'	
28	50°40'	51°00'	29°00'	29°30'	

Продовження ДОДАТКУ 2  
Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6
29	50°40'	51°00'	29°30'	30°00'	
30	50°40'	51°20'	29°00'	30°00'	
31	51°00'	51°20'	30°00'	30°30'	
32	51°00'	51°20'	30°30'	31°00'	
33	50°40'	51°00'	30°00'	30°30'	
34	50°40'	51°00'	30°30'	31°00'	
35	50°40'	51°20'	30°00'	31°00'	
36	51°00'	51°20'	31°00'	31°30'	
37	51°00'	51°20'	31°30'	32°00'	
38	50°40'	51°00'	31°00'	31°30'	
39	50°40'	51°00'	31°30'	32°00'	
40	50°40'	51°20'	31°00'	32°00'	
41	50°20'	50°40'	28°00'	28°30'	
42	50°20'	50°40'	28°30'	29°00'	
43	50°00'	50°20'	28°00'	28°30'	
44	50°00'	50°20'	28°30'	29°00'	
45	50°00'	50°40'	28°00'	29°00'	
46	50°20'	50°40'	29°00'	29°30'	
47	50°20'	50°40'	29°30'	30°00'	
48	50°00'	50°20'	29°00'	29°30'	
49	50°00'	50°20'	29°30'	30°00'	
50	50°00'	50°40'	29°00'	30°00'	
51	50°00'	50°40'	30°00'	31°00'	
52	50°20'	50°40'	30°00'	30°30'	
53	50°20'	50°40'	30°30'	31°00'	
54	50°00'	50°20'	30°00'	30°30'	
55	50°00'	50°20'	30°30'	31°00'	
56	50°00'	50°40'	31°00'	32°00'	
57	50°20'	50°40'	31°00'	31°30'	
58	50°20'	50°40'	31°30'	32°00'	
59	50°00'	50°20'	31°00'	31°30'	
60	50°00'	50°20'	31°30'	32°00'	
61	49°20'	50°00'	28°00'	29°00'	
62	49°40'	50°00'	28°00'	28°30'	
63	49°40'	50°00'	28°30'	29°00'	
64	49°20'	49°40'	28°00'	28°30'	
65	49°20'	49°40'	28°30'	29°00'	
66	49°20'	50°00'	29°00'	30°00'	

Продовження ДОДАТКУ 2  
Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6
68	49°40'	50°00'	29°00'	29°30'	
69	49°20'	49°40'	29°00'	29°30'	
70	49°20'	49°40'	29°30'	30°00'	
71	49°20'	50°00'	30°00'	31°00'	
72	49°40'	50°00'	30°00'	30°30'	
73	49°40'	50°00'	30°30'	31°00'	
74	49°20'	49°40'	30°00'	30°30'	
75	49°20'	49°40'	30°30'	31°00'	
76	49°20'	50°00'	31°00'	32°00'	
77	49°40'	50°00'	31°00'	31°30'	
78	49°40'	50°00'	31°30'	32°00'	
79	49°20'	49°40'	31°00'	31°30'	
80	49°20'	49°40'	31°30'	32°00'	
81	51°20'	52°00'	27°00'	28°00'	
82	51°40'	52°00'	27°00'	27°30'	
83	51°40'	52°00'	27°30'	28°00'	
84	51°20'	51°40'	27°00'	27°30'	
85	51°20'	51°40'	27°30'	28°00'	
86	50°40'	51°20'	27°00'	28°00'	
87	51°00'	51°20'	27°00'	27°30'	
88	51°00'	51°20'	27°30'	28°00'	
89	50°40'	51°00'	27°00'	27°30'	
90	50°40'	51°00'	27°30'	28°00'	
91	50°00'	50°40'	27°00'	28°00'	
92	50°20'	50°40'	27°00'	27°30'	
93	50°20'	50°40'	27°30'	28°00'	
94	50°00'	50°20'	27°00'	27°30'	
95	50°00'	50°20'	27°30'	28°00'	
96	49°20'	50°00'	27°00'	28°00'	
97	49°40'	50°00'	27°00'	27°30'	
98	49°40'	50°00'	27°30'	28°00'	
99	49°20'	49°40'	27°00'	27°30'	
00	49°20'	49°40'	27°30'	28°00'	

**Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №4  
«Розв'язування прямої і оберненої геодезичних задач»**

Таблиця 3.1

**Розв'язування геодезичних задач**

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	$B_1$	$L_1$	$A_{12}$	$S, \text{ м}$
1	2	3	4	5
01	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45297,282
02	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45797,282
03	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46297,282
04	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46797,282
05	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47297,282
06	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47797,282
07	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48297,282
08	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48797,282
09	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49297,282
10	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49797,282
11	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45400,500
12	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45900,500
13	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46400,500
14	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46900,500
15	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47400,500
16	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47900,500
17	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48400,500
18	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48900,500
19	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49400,500
20	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49900,500
21	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50003,718
22	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50106,936
23	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50210,154
24	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50313,372
25	50°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50416,590
26	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45297,282
27	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45797,282
28	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46297,282
29	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46797,282

Продовження ДОДАТКУ 3  
Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5
30	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47297,282
31	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47797,282
32	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48297,282
33	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48797,282
34	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49297,282
35	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49797,282
36	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45400,500
37	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	45900,500
38	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46400,500
39	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	46900,500
40	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47400,500
41	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	47900,500
42	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48400,500
43	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	48900,500
44	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49400,500
45	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	49900,500
46	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50003,718
47	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50106,936
48	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50210,154
49	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50313,372
50	48°35'44,6278"	28°25'43,2822"	45°29'34,268"	50416,590
51	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	45297,282
52	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	45797,282
53	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	46297,282
54	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	46797,282
55	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	47297,282
56	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	47797,282
57	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	48297,282
58	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	48797,282
59	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	49297,282
60	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	49797,282
61	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	45400,500
62	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	45900,500
63	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	46400,500
64	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	46900,500
65	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	47400,500
66	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	47900,500
67	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	48400,500

Продовження ДОДАТКУ 3  
Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5
68	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	48900,500
69	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	49400,500
70	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	49900,500
71	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	50003,718
72	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	50106,936
73	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	50210,154
74	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	50313,372
75	50°35'44,6278"	26°25'43,2822"	45°29'34,268"	50416,590
76	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	45297,282
77	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	45797,282
78	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	46297,282
79	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	46797,282
80	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	47297,282
81	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	47797,282
82	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	48297,282
83	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	48797,282
84	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	49297,282
85	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	49797,282
86	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	45400,500
87	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	45900,500
88	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	46400,500
89	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	46900,500
90	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	47400,500
91	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	47900,500
92	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	48400,500
93	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	48900,500
94	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	49400,500
95	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	49900,500
96	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	50003,718
97	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	50106,936
98	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	50210,154
99	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	50313,372
00	48°35'44,6278"	30°25'43,2822"	45°29'34,268"	50416,590

**Зразок оформлення титульного аркуша**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Житомирський державний технологічний університет

Кафедра маркшейдерії  
Група \_\_\_\_\_  
Номер залікової книжки \_\_\_\_\_

**ЗВІТ**  
з лабораторних робіт  
з курсу  
**«Основи вищої геодезії»**

КМ. ЛР12. ХХ. 00. ЗВ

Виконав:

\_\_\_\_\_

(підпис студента)

Дзюбак В.С.

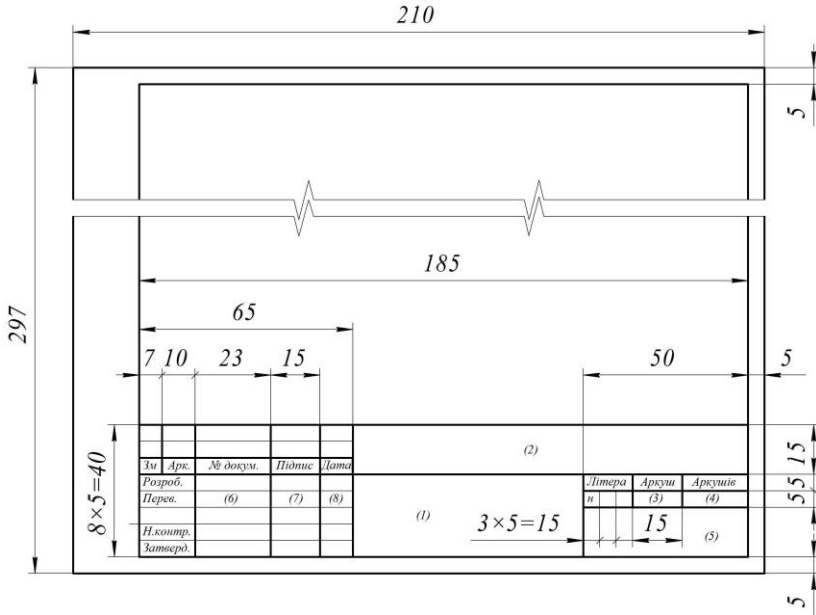
Перевірив:

Пилипенко П.П.

Житомир  
2012



## Основні написи для текстових документів. Форма 2 та форма 2а

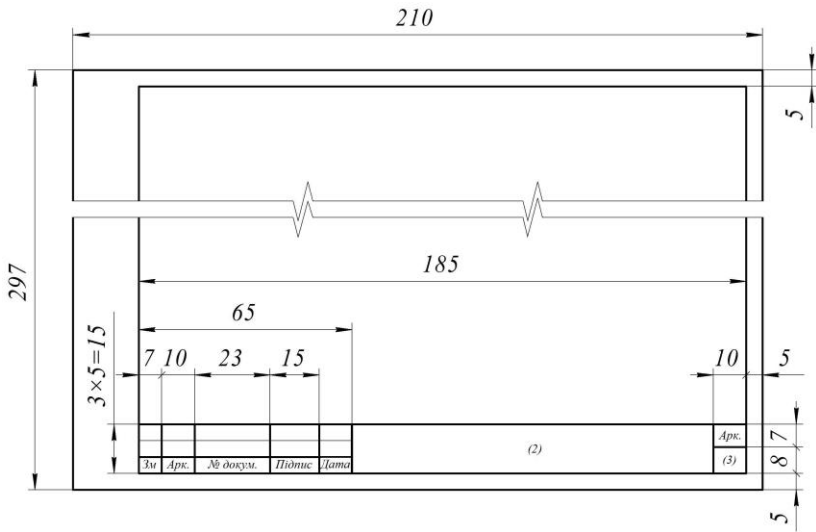


Основний напис для текстових документів. Форма 2

В графах основних написів зазначають наступні дані (номера граф наводяться в дужках):

- графа 1 – назва лабораторної роботи;
- графа 2 – позначення документа;
- графа 3 – порядковий номер аркуша;
- графа 4 – загальна кількість аркушів в лабораторній роботі;
- графа 5 – назва університету, шифр спеціальності та академічної групи;
- графа 6 – прізвища осіб, що підписують роботу;
- графа 7 – підписи осіб, прізвища яких зазначено в графі 6;
- графа 8 – дата підписання роботи.

Продовження ДОДАТКУ 5



Основний напис для текстових документів. Форма 2а

## Список рекомендованої літератури

1. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с
2. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с.
3. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с.
4. Савчук С.Г. Вища геодезія / С.Г. Савчук. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 315 с.

Навчальне видання

**Пилипенко Петро Павлович  
Горелікова Вікторія Володимирівна**

## **ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ**

Методичні вказівки  
до виконання лабораторних робіт  
для студентів денної та заочної форм навчання,  
що навчаються за напрямом підготовки 6.050301 «Гірництво»

Редактор  
Технічний редактор  
Комп'ютерна верстка

*П.П. Пилипенко  
В. В. Горелікова  
В. В. Горелікова*

---

Підп. до друку 02.09.2012. Формат 60×90 1/16. Папір офс.  
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,75. Тираж 100 пр.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи  
ЖТ № 08 від 26.03.2004 р.

---

Редакційно-видавничий відділ  
Житомирського державного технологічного університету  
вул. Черняхівського, 103, м. Житомир, 10005