ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від «19» травня 20*26* р. №
04

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для практичних робіт з навчальної дисципліни «Основи вищої геодезії»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 184 «Гірництво»
освітньо-професійна програма «Гірництво»

Рекомендовано на засіданні
кафедри маркшейдерії
протокол від «10» *квітня* 20*26* р.
№ *04*

Розробники: к.т.н., доц. кафедри маркшейдерії Котенко Володимир
старший викладач . кафедри маркшейдерії Куницька Марина

Житомир
2026

Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни «Основи вищої геодезії» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 184 «Гірництво», освітньо-професійна програма «Гірництво»/ **В.В. Котенко, М.С. Куницька**. – Житомир: Житомирська політехніка, 2026. – 70 с.

Упорядники:

Котенко Володимир Володимирович, кандидат технічних наук, доцент кафедри маркшейдерії, Житомирська політехніка

Відповідальний за випуск:

Котенко Володимир Володимирович, кандидат технічних наук, доцент кафедри маркшейдерії, Житомирська політехніка.

Рецензенти:

Зав. кафедри, кандидат технічних наук С.І. Башинський (кафедра розробки родовищ корисних копалин ім. проф. М.Т. Бакка, Житомирська політехніка);

Зав. кафедри, кандидат технічних наук, доцент В.О.Шлапак (кафедра маркшейдерії, Житомирська політехніка)

©Котенко В. В. 2026
©Куницька М. С. 2026

Зміст

Вступ ……. 4

Практична робота №1 «Обчислення довжин дуг меридіана та паралелі» …….. 5

Практична робота №2 «Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції» …… 12

Практична робота №3 «Розв'язування сферичних трикутників» ……... 19

Практична робота №4 «Розв'язування прямої і оберненої геодезичних задач» …… 33

Практична робота №5 «Розв'язування головних геодезичних задач в просторі» ……. 42

Вимоги до оформлення та виконання Практична робіт 50

ДОДАТОК 1. Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №1 «Обчислення довжини дуг меридіана та паралелі» … 51

ДОДАТОК 2. Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №2 «Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції» …….. 57

ДОДАТОК 3. Вихідні дані для виконання лабораторної роботи №4 «Розв'язування прямої і геодезичної задач» …… 60

ДОДАТОК 4. Зразок оформлення титульного аркуша …… 63

ДОДАТОК 5. Основні написи для текстових документів. Форма 2 та форма 2а …….. 64

Список рекомендованої літератури …… 66

Вступ

Сфероїдна геодезія – один із основних розділів вищої геодезії, предметом якого є вивчення геометрії поверхні земного еліпсоїда, методів розв'язку геодезичних задач на цій поверхні та зображення її на кулі або площині.

Основними задачами сфероїдної геодезії є:

1. Вивчення властивостей кривих на поверхні земного еліпсоїда та визначення взаємного розташування точок на цій поверхні або в просторі;

2. Вибір найбільш вигідної проекції для зображення елементів поверхні еліпсоїда на сфері та площині;

3. Розробка методики переходу з еліпсоїда на площину та навпаки.

Трикутники тріангуляції є сфероїдними або еліпсоїдальними трикутниками, оскільки вони утворені на поверхні еліпсоїда. На практиці зазвичай мають справу із трикутниками, сторони яких не перевищують 40-50 км і в деяких випадках 70-80 км. Таким чином, розв'язання трикутників тріангуляції зводиться до розв'язування сферичних трикутників.

Кінцевою метою основних геодезичних робіт є визначення координат геодезичних пунктів. Так як в геодезичних обчисленнях фігура Землі приймається за еліпсоїд обертання, то задача зводиться до обчислення координат окремих точок поверхні еліпсоїда обертання. Положення геодезичних пунктів може бути визначено в різних системах координат; кожній системі координат відповідають свої методи обчислення. В даних методичних вказівках розглянуто методи обчислення геодезичних координат.

Метою даних методичних вказівок є вивчення майбутніми фахівцями методів визначення взаємного положення точок земної поверхні та навколоземного простору, в яких в якості вихідної координатної поверхні прийнята поверхня земного еліпсоїда, а виміряні величини, що використовуються в цих методах вільні від впливу відхилення виска.

Результатом засвоєння даного матеріалу є набуття навичок у обчисленні довжин дуг меридіана та паралелі, довжин сторін і площі сфероїдальної трапеції, а також у розв'язанні сферичних трикутників та головних геодезичних задач.

Практична робота №1
Обчислення довжин дуг меридіана та паралелі

Мета роботи: засвоїти методику та виконати обчислення довжин дуг меридіана та паралелі.

Теоретичні відомості

Довжина дуги меридіана $S_м$ між точками з широтами B_1 і B_2 визначається із розв'язання еліптичного інтеграла виду

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} M dB, \qquad (1.1)$$

котрий не береться в елементарних функціях. Для розв'язання цього інтеграла використовують два способи:

1. Розкладають підінтегральний вираз в ряд і, обмежуючись якимось числом членів ряду, потім виконують почленне інтегрування як елементарних функцій.
2. Застосовують числове інтегрування відомими методами обчислювальної математики.

Другий спосіб більш точний і зручніший.

Застосуємо формулу Сімпсона

$$S_M = \int_{B}^{B_2} \frac{(B - B)}{} \left(\qquad \right) \qquad (1.2)$$

де

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(\quad {}^{2} \quad {}^{2} \quad \sqrt{}^{3} \right.} \qquad \begin{matrix} 1+0{,}25e^2 \sin^2 B \\ 1-1{,}25e^2 \sin^2 B \end{matrix} \qquad (1.3)$$

де B_1 і B_2 – широти кінців дуги меридіана;

M_1, M_2, $M_{ср}$ – значення радіусів кривизни меридіана в точках з широтами B_1, B_2, $B_{ср}$;

$$B_{ср} = \frac{B_1 + B_2}{2};$$

$$\frac{1}{6\rho'} = 8080228 \cdot 10^{-13}.$$

Для контролю обчислень довжину дуги меридіана $S_м$ потрібно порахувати як суму дуг меридіана X_1 і X_2 від точки з широтою $B_{ср}$ до точки з широтами B_1 і B_2 (*рис. 1.1*). За формулою (1.2) будемо мати

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{(B_{ср} - B_1)''}{6\rho'}\left(M_{ср} + 4M'_{ср} + M_1\right) \\ X_2 &= \frac{(B_2 - B_{ср})''}{6\rho'}\left(M_2 + 4M'_{ср} + M_{ср}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.4)$$

де M'_{cp} і M'_{cp} – значення радіусів кривизни меридіана в точках з широтами $B'_{ср} = \frac{B_2 + B_{ср}}{2}$ і $B'_{ср} = \frac{B_{ср} + B_1}{2}$, які визначаються за формулою (1.3).

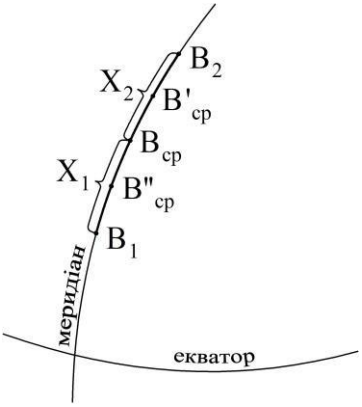


Рис. 1.1. Контроль обчислення довжини дуги меридіана

При наявності таблиць для обчислення координат Гаусса-Крюгера, довжину дуги меридіана $S_м$ можна отримати як різницю довжин дуг меридіана від екватора до точок з широтами B_2 і B_1.

Примітка. При віддалях між точками до 500 км формула (1.2) забезпечує точність обчислення 1-2 см. Якщо дуга меридіана перевищує 500 км, то для обчислення довжини дуги рекомендується розділити її на частини менше 500 км і використати формулу (1.2) до кожної частини окремо.

Довжина дуги паралелі S_n є частина довжини круга, яка обчислюється як добуток радіуса даної паралелі $r=NcosB$ на різницю довгот l кінцевих точок шуканої дуги,

$$S_n = \frac{l''}{\rho'} N\cos B\,, \qquad (1.5)$$

де $l'' = L_2 - L_1$.

Значення радіуса кривизни першого вертикала N обчислюється за формулою

$$N = a\,\frac{1-0{,}25e^2\sin^2 B}{1-0{,}75e^2\sin^2 B}\,. \qquad (1.6)$$

Для контролю обчислення довжини дуги паралелі слід визначити різницю довжин дуг Y_2 і Y_1, відрахованих від меридіана з довготою $L_1 - 30'$ (*рис. 1.2*).

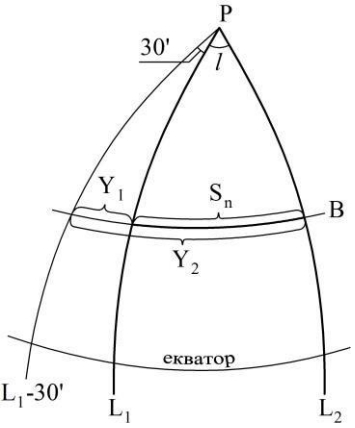


Рис. 1.2. Контроль обчислення довжини дуги паралелі

Значення величин Y_2 і Y_1 отримаємо, користуючись формулою (1.5):

$$Y_2 = \frac{(l+1800)'}{\rho'} N\cos B\,,$$

$$Y_1 = \frac{1800'}{\rho'} N\cos B\,.$$

Довжину дуги паралелі отримаємо за формулою

$$S_n = Y_2 - Y_1.$$

Примітки.

1. Точність формули (1.5) залежить від величини l. Якщо $l < 1°$, то, користуючись 8-значними таблицями тригонометричних функцій, довжина дуги паралелі (в середніх широтах) визначається з похибкою ± 0,001 м.

При $l > 1°$ для дотримання цієї точності потрібно визначати функцію до десятого знаку після коми.

2. Формули (1.3) і (1.6) отримані з використанням ланцюгових дробів.

Завдання:

1. Обчислити довжину дуги меридіана між двома точками з широтами B_2 і B_1 (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 1, табл. 1.1*), користуючись формулою (1.2). Отриманий результат перевірити за формулою (1.4).

2. Обчислити довжину дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі, коли відома різниця довгот цих точок $l = L_2 - L_1$ і широта паралелі B (значення різниці довгот точок та широта паралелі вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 1, табл. 1.2*). Розв'язання перевірити по контрольній формулі.

Числовий приклад:

1. Обчислити довжину дуги меридіана між двома точками з широтами $B_2 = 49°29'58{,}938''$ і $B_1 = 45°30'17{,}221''$, користуючись формулою (1.2). Отриманий результат перевірити за формулою (1.4).

Таблиця 1.1

Схема обчислення довжини дуги меридіана між двома точками

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
a e^2	6378245,0 м 0,00669342	a e^2	6378245,0 м 0,00669342
$a\,(1 - e^2)$	6335552,717 м	$1{,}25e^2\sin^2 B_1$	0,00425710
$1/6\rho''$	$8080228 \cdot 10^{-13}$	$1{,}25e^2\sin^2 B_2$	0,00483777

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4
B_2	49°29′58,938″	$1{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	0,00454832
B_1	45°30′17,221″	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B_1$	1,00085142
B_{cp}	47°30′08,080″	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B_2$	1,00096756
$0{,}25e^2$	0,00167336	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	1,00090966
$1{,}25e^2$	0,00836678	$1 - 1{,}25e^2\sin^2B_1$	0,99574290
$\sin B_1$	0,71330897	$1 - 1{,}25e^2\sin^2B_2$	0,99516223
$\sin B_2$	0,76040263	$1 - 1{,}25e^2\sin^2 B_{cp}$	0,99545168
$\sin B_{cp}$	0,73730380	M_1,	6368056,324
$\sin^2B_1$	0,50880969	M_2	6372511,409
$\sin^2B_2$	0,57821216	M_{cp}	6370290,021
$\sin^2B_{cp}$	0,54361689	$(B_2 - B_1)''$	14381,717″
$0{,}25e^2\sin^2B_1$	0,00085142	$(B_2 - B_1)''/(6\rho'')$	0,011620755
$0{,}25e^2\sin^2B_2$	0,00096756		
$0{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	0,00090966	$\boldsymbol{S_м}$	**444165,343 м**

Таблиця 1.2

Контрольні обчислення довжини дуги меридіана між двома точками

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
a	6378245,0 м	$0{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	0,00090966
$(1 - e^2)$	0,99330658	$1{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	0,00454832
$a\,(1 - e^2)$	6 335552.717 м	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	1,00090966
$1/(6\rho'')$	$8080228\cdot10^{-13}$	$1 - 1{,}25e^2\sin^2B_{cp}$	0,99545168
B_2	49°29′58,938″	$0{,}25e^2\sin^2B'_{cp}$	0,00093867
B_1	45°30′17,221″	$1{,}25e^2\sin^2B'_{cp}$	0,00469336
B_{cp}	47°30′08,079″	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B'_{cp}$	1,00093867
B'_{cp}	48°30′03,508″	$1 - 1{,}25e^2\sin^2B'_{cp}$	0,99530664
B''_{cp}	46°30′12,650″	$0{,}25e^2\sin^2B''_{cp}$	0,00088057
e^2	0,00669342	$1{,}25e^2\sin^2B''_{cp}$	0,00440284
$0{,}25e^2$	0,00167336	$1 + 0{,}25e^2\sin^2B''_{cp}$	1,00088057
$1{,}25e^2$	0,00836677	$1 - 1{,}25e^2\sin^2B''_{cp}$	0,99559716
$\sin B_{cp}$	0,73730380	M_{cp}	6370290,021
$\sin B'_{cp}$	0,74896699	M'_{cp}	6371402,932
$\sin B''_{cp}$	0,72541658	M''_{cp}	6369174,032

Продовження таблиці 1.2

1	2	3	4
sin^2B_{cp}	0,54361689	$(B_2 - B_{cp})''$	7190,859″
$sin^2B'_{cp}$	0,56095155	$(B_2 - B_{cp})''/(6\rho'')$	0,005810378
$sin^2B''_{cp}$	0,52622921		
$(B_{cp} - B_1)''$	7190,858″	$(M_{cp} + 4M''_{cp} + M_1)$	38215042,473
$(B_{cp} - B_1)''/(6\rho'')$	0,005810377	X_2	222121,530
M_1	6368056,324	X_1	222043,811
M_2	6372511,409	$\boldsymbol{S_м} = (X_2 + X_1)$	**444165,341 м**
$(M_2 + 4M'_{cp} + M_{cp})$	38228413,158		

Контроль за таблицями

За широтою B_2 $X = 5485298,588$ м

За широтою B_1 $X = 5041133,243$ м

$\boldsymbol{S_м}$ **= 444165,345 м**

2. Обчислити довжину дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі, коли відома різниця довгот цих точок $l = L_2 - L_1 =$ $= 0°45'46,882''$ і широта паралелі $B = 54°32'19,354''$. Розв'язання перевірити по контрольній формулі.

Таблиця 1.3

Схема обчислення довжини дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
l	0°45′46,882″	$1 - 0{,}25e^2sin^2B$	0,99888986
B	54°32′19,354″	$1 - 0{,}7\,5e^2sin^2B$	0,99666958
a	6378245 м	N	6392453,854 м
$0{,}25\ e^2$	0,00167336	$cosB$	0,58015280
$0{,}75\ e^2$	0,00502006	l	2746,882″
$sinB$	0,81450766	l/ρ''	$4848137 \cdot 10^{-12}$
sin^2B	0,66342273	$NcosB$	3708600,002
$0{,}25e^2sin^2B$	0,00111014	l''/ρ''	0,01331726
$0{,}75e^2sin^2B$	0,00333042	$\boldsymbol{S_n}$	**49388,390 м**

Таблиця 1.4

Контрольні обчислення довжини дуги паралелі між точками, які лежать на цій паралелі

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$N\,cosB$	3708600,002	Y_1	32363,641
$1/\rho''$	$4848137\cdot10^{-12}$	Y_2	81752,029
$(l''+1800'')/\rho''$	0,0220439060	$\boldsymbol{S_n= Y_2 - Y_1}$	**49388,388 м**
$1800''/\rho''$	0,0087266466		

Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Дайте визначення поняттям геодезична довгота і геодезична широта.
2. Перерахуйте основні параметри земного еліпсоїда та зв'язки між ними.
3. Що таке нормальний переріз та переріз першого вертикалу?
4. На якій географічній широті радіус кривизни меридіального перерізу буде рівний радіусу кривизни першого вертикалу?
5. Які Ви знаєте способи обчислення довжини дуги меридіана?

Практична робота №2
Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції

Мета роботи: засвоїти методику та виконати обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції

Теоретичні відомості

Знімальна трапеція є частиною поверхні еліпсоїда обмеженого меридіанами і паралелями. Тому сторони трапеції рівні дугам меридіанів і паралелей, обрахованими за формулами (1.1) і (1.5). Північна і південна рамки є дугами паралелей a_1 і a_2, а східна і західна – меридіанів ***c***, рівними між собою, d – діагональ трапеції. Для отримання конкретних розмірів трапеції необхідно згадані дуги розділити на знаменник масштабу m і для отримання розмірів у сантиметрах помножити на 100.

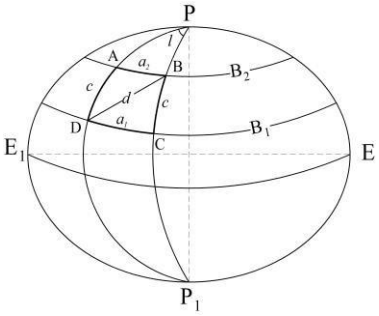


Рис. 2.1. Знімальна трапеція як частина поверхні еліпсоїда

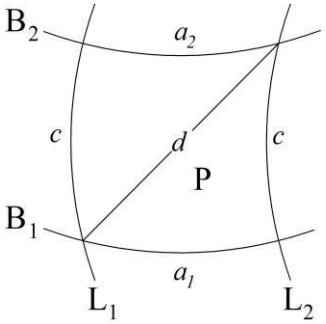


Рис. 2.2. Знімальна трапеція

З урахуванням (1.1) робочі формули мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{100}{m} \cdot \dfrac{N_1}{\rho''} \cos B_1 \, l'' \\ a_2 = \dfrac{100}{m} \cdot \dfrac{N_2}{\rho''} \cos B_2 \, l'' \\ c = \dfrac{100}{m} \cdot \dfrac{M_m}{\rho''} \Delta B'' \\ d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2} \end{cases} \qquad (2.1)$$

де m – знаменник масштабу знімальної трапеції, N_1 і N_2 – радіуси кривизни першого вертикала в точках з широтами B_1 і B_2, M_m – радіус кривизни меридіана в точці з широтою

$$B_m = \frac{(B_1 + B_2)}{2},\ \Delta B = B_2 - B_1.$$

Рамки знімальної трапеції карт масштабу 1:100000 і крупніше зображуються практично прямими лініями, так як різниця між довжиною дуги a_1 і довжиною хорди $DC = S$ (пунктирна лінія) допустимо мала. Однак в тих випадках, коли цими різницями не можна нехтувати, різниця (a - S) визначається за формулою

$$a - S = \frac{8h^2}{3S}, \tag{2.2}$$

де h – стрілка прогину;

$$h = \frac{l^2 \sin 2B_m N_m}{16\rho^2}, \tag{2.3}$$

де $l = L_C - L_D$ – різниця довгот точок C і D;

N_m – радіус кривизни першого вертикала в точці з широтою

$$B_m = \frac{B_D + B_C}{2}.$$

Формули (2.1) дають можливість визначити розміри трапеції, якщо вона зображується на площині без спотворень.

Теоретично, якщо знімальна трапеція крупного масштабу, наприклад, 1:10000 знаходиться на краю 6-градусної зони, то її довжини сторін спотворюються в проекції Гаусса на величину, що перевищує графічну точність. Лінійне спотворення визначається за формулою

$$m - 1 = \frac{l^2}{2\rho^2}\cos^2 B_m, \tag{2.4}$$

де m – масштаб зображення еліпсоїда на площині, l – різниця довгот кінців рамки знімальної трапеції.

Практично зйомка масштабів 1:1000000 ÷ 1:25000 виконується з використанням 6-градусної зони, більш крупного масштабу – з використанням 3-градусної зони. В приведених випадках спотворення довжин рамок знімальних трапецій в проекції Гаусса достатньо малі і ними нехтують.

Елемент площі знімальної трапеції dP дорівнює добутку диференціалів дуг меридіанів і паралелей, якими вона обмежена, тобто

$$dP = MN\cos B dB dl\,, \tag{2.5}$$

де M і N – радіуси кривизни меридіана і першого вертикала, що визначаються за формулами (1.3) і (1.6).

Користуючись середнім радіусом кривизни еліпсоїда $R = \sqrt{MN}$ і враховуючи, що $R = \dfrac{b}{(1-e^2\sin^2 B)^2}$, отримаємо

$$dP = \frac{b^2\cos B}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^2}\,dB dl\,,$$

де b – мала піввісь референц-еліпсоїда Красовського.

Площа кінцевої трапеції, обмеженої широтами B_2 і B_1 і довготами L_2 і L_1 визначається подвійним інтегралом

$$P = b_2\int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2}\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-2}\cos B dl dB\,.$$

Інтегруючи по L в рамках від L_1 до L_2, отримаємо

$$P = b^2\left(L_2 - L_1\right)\int_{B_1}^{B_2}\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-2}\cos B dB\,. \tag{2.6}$$

Розкладемо підінтегральну функцію в біноміальний ряд Ньютона і, виконуючи почленне інтегрування отриманого ряду, будемо мати

$$P = b^2\left(L_2 - L_1\right)\left[\sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3}e^2\left(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1\right) + \frac{3}{5}e^4\left(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1\right) + \frac{4}{7}e^6\left(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1\right) + \ldots\right] \qquad (2.7)$$

Користуючись формулою (2.7) можна обчислити площину референц-еліпсоїда. В такому випадку $L_2 - L_1 = 2\pi$, $B_1 = 0$, $B_2 = \pi/2$. Отримаємо площину еліпсоїда Красовського P = 510083035 км^2. Радіус кулі, еквівалентного за площею цього еліпсоїда дорівнює R = 6371116 м.

Для визначення площі знімальної трапеції за формулою (2.7) необхідно знати широти і довготи паралелей і меридіанів, які обмежують шукану трапецію потрібного масштабу.

Завдання:

1. Обчислити розміри трапеції масштабу 1:50000, обмеженої паралелями B_2 і B_1 (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*). Інтервал трапецій вказаного масштабу по довготі буде $l = L_2 - L_1$ (значення інтервалу трапецій вказаного масштабу по довготі вибирається згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*).

2. Обчислити на еліпсоїді Красовського площу трапеції масштабу 1:100000, обмеженої паралелями B_2 і B_1 (значення широт вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 2, табл. 2.1*) з точністю до 0,001 км^2.

Числовий приклад:

1. Обчислити розміри трапеції масштабу 1:50000, обмеженої паралелями B_2 = 50°10′ і B_1 = 50°00′. Інтервал трапецій вказаного масштабу по довготі буде l = 15′ = 900″. Величина $\Delta B = B_2 - B_1$ = 10′ = = 600″.

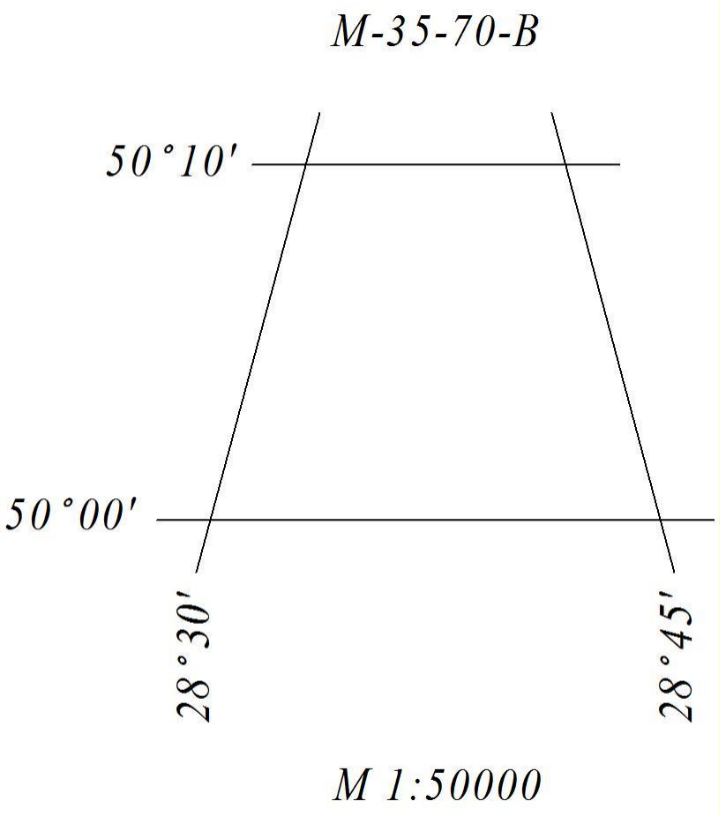


Рис. 2.3. Трапеція масштабу 1:50000, обмежена широтами $B_1 = 50°00'$ та $B_2 = 50°10'$ і довготами $L_1 = 28°30'$ та $L_2 = 28°45'$

Таблиця 2.1

Схема обчислення розмірів трапеції

Формули	Значення вимірювань	Формули	Значення вимірювань
a	6378245	$1 - 0{,}25e^2\sin^2 B_1$	0,99902
$a\,(1 - e^2)$	6335552	$1 - 0{,}75e^2\sin^2 B_1$	0,99705
e^2	0,00669342	$1 - 0{,}25e^2\sin^2 B_2$	0,99901
$0{,}25e^2$	0,0016734	$1 - 0{,}75e^2\sin^2 B_2$	0,99704
$0{,}75e^2$	0,0050201	$1 + 0{,}25e^2\sin^2 B_m$	1,00098
$1{,}25e^2$	0,0083668	$1 - 1{,}25e^2\sin^2 B_m$	0,99508
B_1	50°00′00″	N_1	6390847 м
B_2	50°10′00″	N_2	6390847 м
B_m	50°05′00″	M_m	6373116 м
$\sin B_1$	0,76604	$1/\rho''$	$4848137\cdot10^{-12}$
$\sin B_2$	0,76791	N_1/ρ''	30,984
$\sin B_m$	0,76698	N_2/ρ''	30,984
$\sin^2 B_1$	0,58682	M_m/ρ''	30,898
$\sin^2 B_2$	0,58969	a_1	**35,849 см**
$\sin^2 B_m$	0,58826	a_2	**35,725 см**
$\cos B_1$	0,64279	c	**37,078 см**
$\cos B_2$	0,64056	$a_1\,a_2$	1280,70
100 l/m	9/5	d^2	2655,48
100 $\Delta B/m$	6/5	d	**51,531 см**

2. Обчислити на еліпсоїді Красовського площу трапеції масштабу 1:100000, обмеженої паралелями $B_2 = 50°20'$ і $B_1 = 50°00'$ з точністю до 0,001 км^2.

Спростимо формулу (2.7). Позначимо:

$$\frac{2}{3}e^2\left(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1\right) = I,$$

$$\frac{3}{5}e^4\left(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1\right) = II,$$

$$\frac{4}{7}e^6\left(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1\right) = III,$$

отримаємо

$$P = \frac{b^2\left(L_2 - L_1\right)}{\rho'}\left[(\sin B_2 - \sin B_1) + I + II + III\right].$$

Таблиця 2.2

Схема обчислення площі трапеції

Формули	Значення вимірювань	Формули	Значення вимірювань
b	6356,863 км	sin^7B_1	0,15480242
e^2	0,00669342	$2/3\ e^2$	0,00446228
$1/\rho''$	$4848137\cdot10^{-12}$	$3/5\ e^4$	0,00002688
$L_2 - L_1$	1800″	$4/7\ e^6$	0,00000017
$1/\rho''$	$4848137\cdot10^{-12}$	I	0,00002942
$L_2 - L_1$	1800″	II	0,00000017
$sinB_2$	0,76977104	III	0,0
sin^3B_2	0,45612587	$b^2(L_2 - L_1)/\rho''$	352641,9 км^2
sin^5B_2	0,27027622	b^2	40409707,2 км^2
sin^7B_2	0,16015148	$(sin\ B_2 - sin\ B_1) + I + II + III$	0,00375619
$sinB_1$	0,76604444		
sin^3B_1	0,44953332	P	**1324,590 км^2**
sin^5B_1	0,26379698		

Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Що таке сфероїдна трапеція?
2. Дайте визначення поняттям «меридіан» та «паралель».
3. Назвіть порядок визначення номенклатури листа карти.
4. Що таке стрілка прогину рамки знімальної трапеції?
5. У яких випадках можна нехтувати спотворенням довжин рамок знімальної трапеції в проекції Гаусса?

Практична робота №3
Розв'язування сфероїдальних трикутників

Мета роботи: засвоїти методику та розв'язати малий та великий сферичні трикутники

Теоретичні відомості

Трикутник, утворений геодезичними лініями на поверхні еліпсоїда (сфероїда), називається сфероїдальним трикутником.

Розв'язати трикутник означає визначити всі його елементи (сторони і кути), в разі, якщо деякі з них відомі.

Сфероїдальний трикутник не можна розв'язати, користуючись елементарними функціями. Сторона сфероїдального трикутника, наприклад, в тріангуляції 1 класу, має довжину від 20 до 60 км. В навігації, космічній геодезії, при з'єднанні геодезичних мереж різних країн сторони трикутників досягають декількох сот кілометрів. Нескладні розрахунки показують, що коли потрібно розв'язати трикутник з відносною похибкою 10^{-8}, то сфероїдальний трикутник можна розглядати як сферичний, якщо його сторони не перевищують 240 км.

У зв'язку з цим, в геодезичній практиці застосовують спеціальні методи розв'язання таких трикутників: теорему Лежандра або спосіб аддитаментів.

1. Розв'язування малих сферичних трикутників

1.1. Розв'язування малих сферичних трикутників за теоремою Лежандра

Теорема Лежандра стверджує, що кути плоского прямолінійного трикутника дорівнюють кутам сферичного трикутника, зменшеним на третину сферичного надлишку ε , якщо рівні відповідні сторони цих трикутників. Отже, при відомому значенні ε , розв'язування сферичного трикутника зводиться до розв'язування відповідного плоского трикутника, яке виконується за формулами прямолінійної тригонометрії (за теоремою синусів) (*рис. 3.1*).

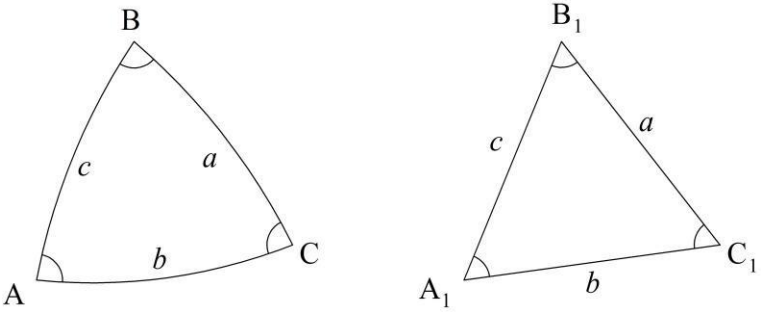


Рис. 3.1. Сферичний трикутник та відповідний йому плоский трикутник

Послідовність розв'язування трикутників за теоремою Лежандра:
1) обчислення сферичного надлишку ε ;

$$\varepsilon = \frac{\rho'}{2R_m^2}\frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B},$$

де b – довжина вихідної сторони в км;
2) визначення нев'язки сферичного трикутника

$$\omega = (A + B + C) - (180^\circ + \varepsilon);$$

3) врівноваження кутів – введення в кожний кут поправки, яка дорівнює третині нев'язки ω ;

4) застосування теореми Лежандра – введення поправки в урівняні кути, яка дорівнює третині сферичного надлишку ε (отримання кутів плоского трикутника) та обчислення невідомих сторін трикутника за теоремою синусів.

Робочі формули:

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3};\ B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3};\ C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon = fD_I;\ f = \frac{\rho'}{2R_m^2};\ D_I = \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B};\ \varepsilon = fbc\sin A, \tag{3.2}$$

$$a = D_{II} \cdot \sin A_1;\ b = D_{II} \cdot \sin B_1;\ c = D_{II} \cdot \sin C_1, \tag{3.3}$$

де $R_m = \sqrt{MN}$ – середній радіус кривизни еліпсоїда для середньої широти B_m;

$$D_{II} = \frac{a}{\sin A_1} = \frac{b}{\sin B_1} = \frac{c}{\sin C_1}.$$

1.2. Розв'язування сферичних трикутників способом аддитаментів. В основі цього способу лежить теорема синусів

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}, \qquad (3.4)$$

де $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ – сторони трикутника в радіанній мірі, синуси цих величин можна розкласти в ряд. Обмежившись двома членами розкладу, отримаємо

$$\frac{a - \frac{a^3}{6R^2}}{\sin A} = \frac{b - \frac{b^3}{6R^2}}{\sin B} = \frac{c - \frac{c^3}{6R^2}}{\sin C}. \qquad (3.5)$$

Ідея способу аддитаментів полягає в тому, що сторони сферичного трикутника *a, b, c* виправляють поправками, внаслідок чого отримують сторони плоского трикутника a', b', c' і невідомі сторони сферичного трикутника.

При цьому в логарифмічному варіанті аддитаментами називають поправки в логарифм A_a, A_b, A_c. У випадку нелогарифмічного розв'язування, аддитаментами являються величини

$$A_a = ka^3,\ A_b = kb^3,\ A_c = kc^3,$$

де $k = \frac{1}{6R^2}$,

$R = \sqrt{MN}$ – середній радіус кривизни еліпсоїда для місця знаходження трикутника.

Розглянемо послідовність розв'язування сферичного трикутника за способом аддитаментів.

1. Від вихідної сторони b віднімають її аддитамент A_b і отримують сторону плоского трикутника b'.

2. За відомими кутами сферичного трикутника і стороні b' розв'язують трикутник як плоский, користуючись теоремою синусів, знаходять решту сторін плоского трикутника a' і c'.

3. Отримані значення сторін виправляють їх аддитаментами A_a і A_c і знаходять сторони сферичного трикутника ABC.

Спосіб аддитаментів застосовується як контрольний при розв'язуванні трикутників за теоремою Лежандра.

Робочі формули:

$$A_s = ks^3,\ k = \frac{1}{6R^2},\ b' = b - A_b = b - kb^3, \tag{3.6}$$

$$A_b = kb^3, \tag{3.7}$$

$$a' = \frac{b'\sin A}{\sin B}, \mathrm{c}' = \frac{a'\sin C}{\sin A}, \tag{3.8}$$

$$a = a' + ka^3 = a' + A_a, c = c' + kc^3 = c' + A_c, \tag{3.9}$$

$$A_a = ka^3, A_c = kc^3. \tag{3.10}$$

2. Розв'язування великих сфероїдних трикутників

При розв'язанні великих трикутників, отриманих за результатами вимірювання сторін радіогеодезичними чи супутниковими навігаційними системами, потрібно визначити азимути виміряних сторін. Для цього потрібно знати кути між сторонами, тобто розв'язати отриманий сфероїдний трикутник, якщо відомі його сторони.

Якщо сторони трикутника більше ніж 240 км, то такі трикутники потрібно розглядати як сфероїдні і сферичний надлишок обчислюється за більш точними формулами.

Загальний хід розв'язання сфероїдних трикутників можна розглядати наступним чином.

Нехай дані кути сфероїдного трикутника A, B, C, вихідна сторона b, широти вершин трикутника B_A, B_B, B_C і середня широта розміщення трикутника B_m. Потрібно визначити дві сторони трикутника.

Кути сфероїдного трикутника можна розглядати як:

$$A = A_{сф} + \delta A; B = B_{сф} + \delta B; C = C_{сф} + \delta C, \tag{3.11}$$

де $A_{сф}, B_{сф}, C_{сф}$ – сферичні кути трикутника;

$\delta A, \delta B, \delta C$ – поправки за сфероїдність трикутника.

Поправки за сфероїдність вираховують за формулами:

$$\delta A = \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{K_A - K}{K}\right); \delta B = \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{K_B - K}{K}\right); \delta C = \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{K_C - K}{K}\right), \qquad (3.12)$$

де $K = \frac{1}{R_m^2} = \frac{1}{(MN)_m}$ – гауссова кривизна еліпсоїда на середній широті трикутника,

K_A, K_B, K_C – гауссові кривизни еліпсоїда в вершинах трикутника, що розглядається;

M, N – радіуси кривизни еліпсоїда.

Визначивши поправки за сфероїдичність за формулами (3.12), переходимо до сферичних кутів трикутника згідно (3.11)

$$A_{\text{сф}} = A - \delta A; B_{сф} = B - \delta B; C_{сф} = C - \delta C \qquad (3.13)$$

На основі вихідних даних і сферичних кутів визначаємо наближене значення сферичного надлишку

$$\varepsilon_{пр} = f \frac{b^2 \sin A_{сф} \sin C_{сф}}{\text{sinB}_{\text{сф}}}$$

де $f = \frac{\rho'}{2R_m^2}$,

R_{m} – середній радіус кривизни еліпсоїда на широті B_m.

Величину *f* можна взяти із *таблиці 3.1* по широті B_m.

Таблиця 3.1

B	*x, км*	$f = \frac{\rho'}{2R_m^2}$	$f' = \frac{1}{2R_m^2}$
44°	4874	0,0025357	$1{,}22935\times10^{-8}$
46°	5096	0,0025345	$1{,}22877\times10^{-8}$
48°	5319	0,0025333	$1{,}22820\times10^{-8}$
50°	5541	0,0025322	$1{,}22763\times10^{-8}$
52°	5763	0,0025310	$1{,}22706\times10^{-8}$

Після цього наближено визначаємо кути плоского трикутника за відомими формулами Лежандра:

$$A_1 = A_{сф} - \frac{\varepsilon}{3}; \; B_1 = B_{сф} - \frac{\varepsilon}{3}; \; C_1 = C_{сф} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

За теоремою синусів визначаємо наближені значення сторін

$$a = D_{II}\, sinA_1; \quad b = D_{II}\, sinB_1; \quad c = D_{II}\, sinC_1.$$

Таким чином, спочатку розв'язуємо трикутник за теоремою Лежандра і отриманий результат використовуємо як наближений для подальших уточнень. Згідно сферичної тригонометрії для визначення сферичного надлишку скористаємось формулою:

$$tg^2 \varepsilon / 4 = tg(\frac{p}{2}) \cdot tg\left[\left(\frac{p-a}{2}\right)\right] \cdot tg\left[\left(\frac{p-b}{2}\right)\right] \cdot tg\left[\left(\frac{p-c}{2}\right)\right] \qquad (3.14)$$

де *a, b, c* – сторони трикутника в градусній мірі,

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Для отримання точних значень плоских кутів трикутника отриманий по (3.14) сферичний надлишок розподілимо згідно розширеної теореми Лежандра:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_A; \\ B_1 &= B_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_B; \\ C_1 &= C_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_C \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

де

$$\left.\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - a^2}{R_m^2}; \quad \Delta_B = \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - b^2}{R_m^2}; \\ \Delta_C &= \frac{\varepsilon}{60} \frac{m^2 - c^2}{R_m^2}; \quad m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

За допомогою точних значень плоских кутів знову розв'язуємо трикутник як плоский, користуючись формулами (3.1), (3.2), (3.3) і визначаємо шукані сторони. Для контролю можна порахувати сферичні кути трикутника за формулами:

$$\left.\begin{aligned} tg^2\left(\frac{A_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)} \\ tg^2\left(\frac{B_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)} \\ tg^2\left(\frac{C_{сф}}{2}\right) &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-c)} \end{aligned}\right\}, \qquad (3.17)$$

де *a, b, c* – точні значення сторін трикутника

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Завдання:

1. Розв'язати малий сферичний трикутник *ABC* ланки тріангуляції 1 класу за формулою Лежандра та способом аддитаментів, якщо виміряні дані приведені до центра знаків і спроектовані на поверхню еліпсоїда. Отримані результати: кути $A = 30°03'56{,}842''$; $B = 90°03'56{,}391''$; $C = 60°03'56{,}966''$ та довжина сторони *b* (значення довжини сторони вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 3, табл. 3.1;* в *табл. 3.1* числове значення *s* дорівнює числовому значенню *b*). Середня широта трикутника $B_m = 48°12'$.

2. Розв'язати великий сферичний трикутник *ABC* за наступними вихідними даними:

$A = 30°03'56{,}842''$;
$B = 90°03'56{,}391''$;
$C = 60°03'56{,}966''$;
$B_A = 52°00'00''$;
$B_B = 56°43'42''$;
$B_C = 54°00'00''$;
$B_m = 54°14'36''$;

b (значення довжини сторони вибирається згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки,

див. *додаток 3, табл. 3.1;* в *табл. 3.1* числове значення *s* дорівнює числовому значенню *b*)

Числовий приклад

1. Розв'язати малий сферичний трикутник *ABC* ланки тріангуляції 1 класу за формулою Лежандра та способом аддитаментів, якщо виміряні дані приведені до центра знаків і спроектовані на поверхню еліпсоїда. Отримані результати:

- кути $A = 50°20'19,41''$, $B = 62°12'44,54''$, $C = 67°26'58,43''$;
- сторона $b = 44797,282$ м.

Середня широта трикутника $B_m = 48°12'$.

1.1. Розв'язування малого сферичного трикутника за теоремою Лежандра

Таблиця 3.2

Обчислення сферичного надлишку

Елементи формули	Значення обчислень	Елементи формули	Значення обчислень
f	0,002533	$b^2\ sinA\ sinC$	1426,77
b^2	2006,80	$sinB$	0,884681
$sinA$	0,769831	D_I	1612,76
$sinC$	0,923542	ε	4,085″
$sinA\ sinC$	0,710971		

Примітка 1. При обчисленні ε довжини сторін трикутника виражаються в *км*.

Таблиця 3.3

Розв'язування малого сферичного трикутника за формулою Лежандра

Вершина	Виміряні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні плоскі кути B_1 A_1 C_1	Синуси кутів плоского трикутника	Довжини сторін, м (сф.)
B	62°12′44,54″	0,57″	62°12′45,11″	-1,36″	62°12′43,75″	0,88467988	44797,282
A	50°20′19,41″	0,57″	50°20′19,98″	-1,36″	50°20′18,62″	0,76982866	39981,594
C	67°26′58,43″	0,57″	67°26′59,00″	-1,37″	67°26′57,63″	0,92354082	46765,072
∑	180°00′02,38″		180°00′04,09″		180°00′00,00″		
ε	04,09″						
ω	-01,71″						
D_{II}							50636,714

1.2. Розв'язування малого сферичного трикутника способом аддитаментів

Таблиця 3.4

Розв'язування малого сферичного трикутника способом аддитаментів

Вершина кута	Виміряні сферичні кути	$\frac{-\omega}{3}$	Урівняні сферичні кути	Синуси урівняних сферичних кутів	Сторони плоского трикутника, м b', a', c'	A_s	Сторони сферичного трикутника, м
B	62°12′44,54″	0,57″	62°12′45,11″	0,88468295	44796,917	0,368	44797,282
A	50°20′19,41″	0,57″	50°20′19,98″	0,76983287	38981,350	0,243	38981,593
C	67°26′58,43″	0,57″	67°26′59,00″	0,92354337	46764,654	0,419	46765,073
∑	180°00′02,38″						
ε	04,09″						
ω	-01,71″						

Примітка. Значення величини k можна прийнять для території України узагальнене $k = \frac{1}{6R_m^2} = 409{,}14 \cdot 10^{-11}$, а сторони в трикутниках виражають у кілометрах.

2. Розв'язати великий сферичний трикутник ABC за наступними вихідними даними:

$A = 30°03′56{,}842″$;

$B = 90°03′56{,}391″$;

$C = 60°03′56{,}966″$;

$b = 804666{,}593$ м;

$B_A = 52°00′00″$;

$B_B = 56°43′42″$;

$B_C = 54°00′00″$;

$B_m = 54°14′34″$.

Розв'язання виконують в наступному порядку:

1) визначають сферичні кути за формулами (3.17);

2) обчислюють поправки за сфероїдальність δA, δB, δC за формулами (3.12);

3) обчислюють шукані сферичні кути за формулами (3.11).

Таблиця 3.5

Обчислення поправок δA, δB, δC в кути за сфероїдальність трикутника

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
a (велика піввісь)	6378245 м		
$a(1-e^2)$	6335553 м	M_A	6375293 м
B_A	52°00′00″	M_B	6380290 м
B_B	56°43′42″	M_C	6377406 м
B_C	54°00′00″	M_m	6377662 м
B_m	54°14′34″	$0{,}75\ e^2$	0,00502
$0{,}25e^2$	0,00167	$0{,}75\ e^2\sin^2B_A$	0,00312
$1{,}25e^2$	0,00837	$0{,}75\ e^2\sin^2B_B$	0,00351
$\sin B_A$	0,78801	$0{,}75\ e^2\sin^2B_C$	0,00329
$\sin B_B$	0,83608	$0{,}75\ e^2\sin^2B_m$	0,00331
$\sin B_C$	0,80902	$1 - 0{,}25\ e^2\sin^2B_A$	0,99896
$\sin B_\text{m}$	0,81151	$1 - 0{,}25\ e^2\sin B_B$	0,99883
$\sin^2B_A$	0,62096	$1 - 0{,}25\ e^2\sin^2B_C$	0,99891
$\sin^2B_B$	0,69903	$1 - 0{,}25\ e^2\sin^2B_m$	0,99890
$\sin^2B_C$	0,65451	$1 - 0{,}75\ e^2\sin^2B_A$	0,99688
$\sin^2B_\text{m}$	0,65855	$1 - 0{,}75\ e^2\sin B_B$	0,99649
$0{,}25\ e^2\sin^2B_A$	0,00104	$1 - 0{,}75\ e^2\sin^2B_C$	0,99671
$0{,}25\ e^2\sin^2B_B$	0,00117	$1 - 0{,}75\ e^2\sin^2B_m$	0,99669
$0{,}25\ e^2\sin^2B_C$	0,00109	N_A	6391553 м
$0{,}25\ e^2\sin^2B_m$	0,00110	N_B	6393222 м
$1{,}25\ e^2\sin^2B_A$	0,00520	N_C	6392323 м
$1{,}25\ e^2\sin^2B_B$	0,00585	N_m	6392387 м
$1{,}25\ e^2\sin^2B_C$	0,00548	$\varepsilon/12$	59,074″
$1{,}25\ e^2\sin^2B_m$	0,00551	$(K_A-K)/K$	0,00050
$1 + 0{,}25\ e^2\sin^2B_A$	1,00104	$(K_B-K)/K$	-0,00054
$1 + 0{,}25\ e^2\sin^2B_B$	1,00117	$(K_C-K)/K$	0,00005
$1 + 0{,}25\ e^2\sin^2B_C$	1,00109	δA	0,030″
$1 + 0{,}25\ e^2\sin^2B_m$	1,00110	δB	-0,032″
$1 - 1{,}25\ e^2\sin^2B_A$	0,99480	δC	0,003″
$1 - 1{,}25\ e^2\sin^2B_B$	0,99415		
$1 - 1{,}25\ e^2\sin^2B_C$	0,99452		
$1 - 1{,}25\ e^2\sin^2B_m$	0,99449		

Таблиця 3.6

Обчислення сферичних кутів

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
$A_{сф} = A - \delta A$	30°03′56,812″	$C_{сф} = C - \delta C$	60°03′56,963″
$B_{сф} = B - \delta B$	90°03′56,423″		

Таблиця 3.7

Обчислення наближеного значення сферичного надлишку

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
f	0,002530	$b^2 \sin A \sin C$	281111,415
b^2	647488,320	$\sin B$	0,99999934
$\sin A$	0,50099395	D_I	281111,61
$\sin C$	0,86659924	ε ″	711,212″
$\sin A \sin C$	0,43416097	ε °	0°11′51,212″

Таблиця 3.8

Обчислення наближених значень сторін трикутників

Вершина	Кут сферичного трикутника	Поправка за нев'язку $-\frac{\omega}{3}$	Урівняні кути сферичного трикутника	Поправка $-\frac{\varepsilon}{3}$ за сферичний надлишок	Кути плоского трикутника	Синуси кутів плоского трикутника	Сторони сферичного трикутника, м
D_{II} = 804666,593 м							
B	90°03′ 56,423″	0,338″	90°03′ 56,761″	-3′ 57,071″	89°59′ 59,690″	1,00000000	804666,593
A	30°03′ 56,812″	0,338″	30°03′ 57,150″	-3′ 57,070″	30°00′ 00,080″	0,50000034	402333,560
C	60°03′ 56,963″	0,338″	60°03′ 57,301″	-3′ 57,071″	60°00′ 00,230″	0,86602596	696862,150
Σ	180°11′ 50,198″		180°11′ 51,212″		180°00′ 00,000″		
ε	11′ 51,212″						
$\omega = \Sigma - -(\varepsilon + 180°)$	− 1,014″						

Таблиця 3.9

Обчислення точного значення сферичного надлишку

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
ρ''/R_m	0,032304551	$(p-b)/2$	0°39′38,658″
$a\rho''/R_m$	12997,205″= =3°36′37,205″	$(p-c)/2$	1°08′39,945″
		$tg\frac{p}{2}$	0,07468263
$b\rho''/R_m$	25994,393″= =7°13′14,393″	$tg\frac{(p-a)}{2}$	0,04306472
		$tg\frac{(p-b)}{2}$	0,01153257
$c\rho''/R_m$	22511,818= =6°15′11,818″	$tg\frac{(p-c)}{2}$	0,01997671
		$tg^2\frac{\varepsilon}{4}$	0,00000074095
$2p$	17°05′03,416″	$tg\frac{\varepsilon}{4}$	0,00086078
p	8°32′31,708″	$\frac{\varepsilon}{4}$	0°02′57.550″
$p/2$	4°16′15,854″	ε°	0°11′50,200″
$(p-a)/2$	2°27′57,252″		

Таблиця 3.10

Обчислення поправок Δ

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
a^2	161871,84 м	$2c^2$	971233,28 м
b^2	647787,37 м	a^2+c^2	647488,48
c^2	485616,64 м	$2b^2$	1295574,70 м
$a^2+b^2+c^2$	1295275,85		
$(MN)_m$	40768483,7 м	$\varepsilon/60$	11,8366″
$3(MN)_m$	123304950,0 м	Δ_A	0,078
b^2+c^2	1133404,0 м	Δ_B	-0,063
$2a^2$	323743,68 м	Δ_C	-0,016
b^2+a^2	809659,21 м		
m^2	431758,62		

Таблиця 3.11

Обчислення плоских кутів трикутників по розширеній теоремі Лежандра

$A_1 = A_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_A = 30°03'56{,}812'' - 3'56{,}733'' - 0{,}078'' = 30°00'00{,}001''$
$B_1 = B_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_B = 90°03'56{,}423'' - 3'56{,}733'' + 0{,}063'' = 89°59'59{,}753''$
$C_1 = C_{сф} - \frac{\varepsilon}{3} - \Delta_C = 60°03'56{,}963'' - 3'56{,}733'' + 0{,}016'' = 60°00'00{,}246''$

Таблиця 3.12

Точне розв'язання трикутника

Вершина	Кути плоского трикутника	Синуси кутів плоского трикутника	Сторони сферичного трикутника, *м*
$D_П$ = 804666,593 м			
B	89°59′59,753″	1,00000000	804666,593
A	30°00′00,001″	0,50000000	402333,298
C	60°00′00,246″	0,86602600	696862,182
Σ	180°00′00,000″		

Таблиця 3.13

Контрольні обчислення (обчислення сферичних кутів $A_{сф}$, $B_{сф}$, $C_{сф}$)

Формули	Результати обчислення	Формули	Результати обчислення
1	2	3	4
$\rho\ /R_m$	0,032304551	*sin (p-c)*	0,03993746
$a\rho\ /R_m$	12997,196″= =3°36′37,196″	*sin p*	0,14853677
		$tg^2\frac{A}{2}$	0,07212690
$b\rho\ /R_m$	25994,393= =7°13′14,393″	$tg\frac{A}{2}$	0,26856452
		$\frac{A}{2}$	15°01′58,399″
$c\rho\ /R_m$	22511,820= =6°15′11,820″	$A_{сф}$	30°03′56,798″
		$tg^2\frac{B}{2}$	1,00229510

Продовження таблиці 3.13

1	2	3	4
$2p$	17°05′03,409″	$tg\frac{B}{2}$	1,00114690
p	8°32′31,704″	$\frac{B}{2}$	45°01′58,215″
p-a	4°55′54,508″	$B_{сф}$	90°03′56,430″
p-b	1°19′17,312″	$tg^2\frac{C}{2}$	0,33421855
p-c	2°17′19,884″	$tg\frac{C}{2}$	0,57811638
sin (p-a)	0,0859003	$\frac{C}{2}$	30°01′58,477″
sin (p-b)	0,02306205	$C_{сф}$	60º03′56,954″

Контрольні обчислення можна виконати за наступною схемою:

1. Обчислити поправки Δ за формулами (3.16);
2. Обчислити сферичні надлишки за формулами (3.14);
3. Обчислити сферичні кути трикутника на підставі розширеної теореми Лежандра (3.15);
4. Обчислити поправки δA, δB, δC за сфероїдність по формулам (3.12);
5. Обчислити сфероїдні кути *A, B, C* за формулами (3.11).

Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Що таке сфероїдний трикутник?
2. Що означає розв’язати трикутник?
3. Яка різниця між малим та великим сфероїдними трикутниками?
4. Які методи розв’язку малого сфероїдного трикутника Ви знаєте?
5. Розкажіть алгоритм розв’язку великого сфероїдного трикутника.

Практична робота №4
Розв'язування прямої і оберненої геодезичних задач

Мета роботи: ознайомитись із змістом прямої та оберненої геодезичних задач та розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки та методом із середніми аргументами (методом послідовних наближень)

Теоретичні відомості

Головну геодезичну задачу прийнято розглядати як дві задачі: пряма і обернена.

Пряма геодезична задача полягає в тому, що за відомими географічними координатами B_1, L_1 деякої точки Q_1, а також прямому азимуту A_{12} і відстані S між точками Q_1 і Q_2 визначити координати кінцевої точки B_2, L_2 і обернений азимут A_{21}.

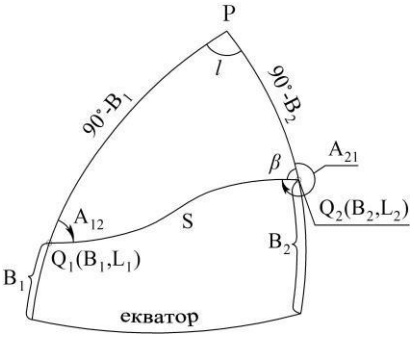


Рис. 4.1. Пряма і обернена геодезичні задачі

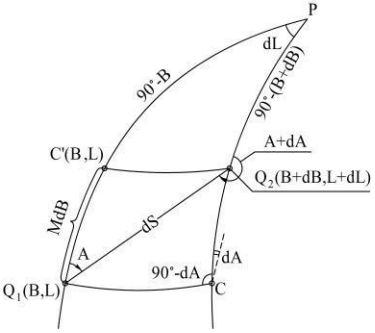


Рис. 4.2. Непрямий метод розв'язку головних геодезичних задач

Обернена геодезична задача полягає в тому, що за координатами початкової і кінцевої точок B_1, L_1, B_2, L_2 визначити віддаль S між ними і азимути A_{12} і A_{21} (див. *рис. 4.1*).

В геодезичній практиці пряму і обернену геодезичні задачі доводиться розв'язувати для різних довжин геодезичних ліній. На практиці склалась певна градація можливих віддалей, для кожного із яких існує найбільш прийнятний спосіб розв'язування головних геодезичних задач.

Малі відстані (20÷200 км) зустрічаються при обчисленні сторін трикутників і замикаючих ланок тріангуляції 1 класу.

Середні відстані (200÷800 км) мають місце при обчисленні діагоналей полігонів тріангуляції 1 класу, при обробці астрономо-геодезичної мережі, радіогеодезичних мережах, при розв'язанні динамічної тріангуляції (ракетної) та інших задач.

Великі відстані (більше 800 км) зустрічаються при орієнтуванні референц-еліпсоїда, при геодезичному з'єднуванні континентів методом космічної тріангуляції, в радіонавігації, при побудові єдиної координатної системи (*WGS-84*), з метою спостереження за керованими ракетами і т.д.

Для розв'язування головних геодезичних задач необхідно визначити рівняння зв'язку вихідних і визначуваних величин. Найбільш простий спосіб установлення таких рівнянь зв'язку і, як результат, розв'язування головних геодезичних задач полягає в безпосередньому розв'язанні трикутника Q_1PQ_2, в якому вихідні дані і визначувані невідомі як в прямій, так і в оберненій задачах являються елементами цього трикутника. Наприклад, в випадку прямої геодезичної задачі вихідними даними являються сторони S, Q_1P кут A_{12} і L_1. Із розв'язання трикутника отримують інші його елементи l, β, Q_2P, за допомогою яких визначають шукані величини:

$$L_2 = L_1 + l;\ B_2 = 90^\circ - Q_2P;\ \mathrm{A}_{21} = 360^\circ - \beta\ .$$

Такий шлях розв'язання головних геодезичних задач називається прямим. Однак у зв'язку з великими сторонами полярного трикутника Q_1PQ_2, які становлять декілька тисяч кілометрів, його потрібно розглядати як сфероїдний. Ці обставини значно ускладнюють розв'язок і потребують використання 10-значних тригонометричних функцій. Тому застосовують непрямий шлях розв'язання, який полягає у визначенні різниць широт, довгот і азимутів на основі рівнянь зв'язку цих величин з вихідними даними. Наприклад, для прямої задачі визначають:

$$\left.\begin{aligned} dB &= B_2 - B_1 = \varphi_1\left(B_1, L_1, A_{12}, S\right) \\ dL &= L_2 - L_1 = \varphi_2\left(B_1, L_1, A_{12}, S\right) \\ dA &= A_{21} - A_{12} = \varphi_3\left(B_1, L_1, A_{12}, S\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

і тоді $B_2 = B_1 + dB;\ L_2 = L_1 + dL;\ \mathrm{A}_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + dA$.

Вид рівнянь зв'язку (4.1) установлюють наступним чином.

Згідно *рис. 4.2*, де Q_1 і Q_2 – дві нескінченно близькі точки на еліпсоїді, dS – відрізок геодезичної лінії, Q_1C і Q_2C' нескінченні малі дуги паралелей, із трикутника $Q_1C'Q_2$ маємо:

$$\begin{aligned} MdB &= dS\cos A, \\ \text{або } rdL &= N\cos BdL = dS\sin A, \end{aligned} \tag{4.2}$$

де r – радіус паралелі.

Із рівнобедренного сферичного трикутника Q_1PC, маючи на увазі, що $PC = (90^\circ - B)$ і користуючись правилом розв'язування сферичних трикутників, отримаємо

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(90^\circ - B\right) &= ctgdLctg\left(90^\circ - dA\right) \\ tgdL\sin B &= tgdA \\ dA &= dL\sin B \\ dA &= \frac{dS\sin AtgB}{N} \end{aligned}\right\}. \tag{4.3}$$

Із (4.2) і (4.3) отримаємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c}\cos A \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N}\sec B = \frac{V}{c}\sec B\sin A \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N}tgB = \frac{V}{c}tgB\sin A \end{aligned}\right\}, \tag{4.4}$$

де $V = \sqrt{1 + e'^2\cos^2 B}$ – друга функція геодезичної широти;

$c = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \dfrac{a^2}{b}$ – радіус кривизни меридіана еліпсоїда на полюсах;

e, e' – перший і другий ексцентриситети меридіанного еліпса.

Формули (4.4) являються звичайними диференціальними рівняннями першого порядку. Ці рівняння лежать в основі всіх

способів розв'язання головних геодезичних задач. Формули (4.4) дають можливість визначити різниці

$$(B_2 - B_1), (L_2 - L_1), (A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ)$$

шляхом інтегрування (4.4) між двома точками на еліпсоїді.

Після інтегрування отримаємо

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{c}\cos A dS \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{c}\sec B \sin A dS \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \int_0^S \frac{V}{S}\sin B \sec B \sin A dS \end{aligned}\right\}. \qquad (4.5)$$

Формули (4.5) використовуються для розв'язання прямої геодезичної задачі. В основі розв'язання оберненої геодезичної задачі лежать ті ж формули.

1. Розв'язування прямої геодезичної задачі методом допоміжної точки

Із кінця геодезичної лінії Q_1Q_2 проводять геодезичну лінію, ортогональну до меридіану початкової точки Q_1. Точку перетину цієї лінії з меридіаном позначимо C' і назвемо її допоміжною точкою. Широту її позначимо через B_0, а довгота її буде L_1.

Формули для розв'язання прямої геодезичної задачі по лінії Q_1Q_2 можна отримати застосовуючи ряди

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \left(\frac{dB}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \\ L_2 &= L_1 + \left(\frac{dL}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \\ A_{21} &= A_{12} \pm 180^\circ + \left(\frac{dL}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

послідовно до ліній Q_1C' і $C'Q_2$, довжини цих ліній знаходять із розв'язування сфероїдного трикутника Q_1Q_2C'. Індекс «$)_1$» означає, що

похідна вираховується по координатах і азимуту в початковій точці лінії.

Кінцеві формули мають наступний вид:

$$V_1 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}\ ,\ \sigma = \frac{S}{c}V_1^2,\ u_0 = \sigma\cos A_1\ ,\ \upsilon_0 = \sigma\sin A_1\ ,$$

$$u = u_0\left(1+\frac{\upsilon_0^2}{3}\right),\ \upsilon = \upsilon_0\left(1-\frac{u_0^2}{6}\right),\ c = \upsilon\left(1-\frac{u^2}{6}\right),$$

$$B_0 = B_1 + \rho\, u\left[V_1 - \frac{u}{4}\left(3\sin 2B_1 + 2u\cos 2B_1\right)\right],$$

$$V_0 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_0}\ ,\ \gamma = \frac{\upsilon V_0}{V_1^2},\ \lambda = \frac{\gamma}{\cos B_0}\ ,\ \tau = \lambda\sin B_0\ ,$$

$$l' = \lambda\left(1-\frac{\tau^2}{3}\right)\rho'\ ,\ t = \tau\left(1-\frac{\lambda^2+\tau^2}{6}\right),\ d' = \frac{t\gamma}{2}\left(1+\frac{\lambda^2}{12}\right)V_0^2\rho'\ ,\ \varepsilon = \frac{u\upsilon}{2}\ ,$$

$$B_2 = B_0 - d',\ \ L_2 = L_1 + l',\ \ A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + (t-\varepsilon)\rho'\ .$$

При виведенні цих формул обмежились елементами $\left(\frac{S}{c}\right)^3$. Ними можна користуватися на відстанях між пунктами до 100 км. При більших відстанях потрібно враховувати елементи $\left(\frac{S}{c}\right)^5$, $\left(\frac{S}{c}\right)^4 e'^2$, $\left(\frac{S}{c}\right)^3 e'^4$.

В широтах північніше 60° при обчисленні різниці довгот потрібно користуватися формулою $l' = \rho'\lambda\left[1-\frac{\tau^2}{3}\left(1-\frac{2\tau^2+\lambda^2}{5}\right)\right]$, тобто потрібно враховувати ще один член розкладання функції.

2. Розв'язування прямої геодезичної задачі методом із середніми аргументами (метод послідовних наближень)

В основі розв'язування задач як і раніше лежать степеневі ряди (4.6). Ці ряди перетворюють таким чином, щоб похідні

$\frac{dB^n}{dS^n}, \frac{d^nL}{dS^n}, \frac{d^nA}{dS^n}$ обчислювались не по початковій *B, A,* а по середній широті $B_m = (B_1 + B_2)/2$ і середньому азимуту $A_m = (A_1 + A_2 \pm 180^\circ)/2$, що скорочує кількість членів правої частини рівняння в два рази, а точність залишається такою самою. Величини B_m і A_m умовно називають середніми аргументами.

Для розв'язування прямої геодезичної задачі при $S < 60\ км$ формули із середніми аргументами зручно використовувати в наступному вигляді:

$$\left.\begin{aligned} b = B_2 - B_1 &= \beta\left(1+\frac{2\lambda^2+\alpha^2}{24}\right)\rho'; \\ l = L_2 - L_1 &= \lambda\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{24}\right)\rho'; \\ a = A_{21} \pm 180^\circ - A_{12} &= \alpha\left(1+\frac{2\beta^2+2\lambda^2-\alpha^2}{24}\right)\rho' \end{aligned}\right\}, \qquad (4.7)$$

де $\beta = \frac{S}{c}V_m^2\cos A_m$, $\lambda = \frac{S}{c}\frac{V_m}{\cos B_m}\sin A_m$, $\alpha = \lambda \sin B_m$, $V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$

Послідовність розв'язування задачі за формулами (4.7). Вихідними величинами являються B_1, L_1, A_1, S_1. Так як широта B_m і середній азимут A_m не відомі величини, то розв'язування необхідно виконувати методом послідовних наближень. В першому наближені можна прийняти $B_m = B_1, A_m = A_{12}$. В другому і наступних наближеннях приймають $B_m = B_1 + \frac{b}{2}$, $A_m = A_{12} + \frac{a}{2}$.

Другі члени в дужках формул (4.7) починають враховувати при обчисленні *b, l, a* у другому наближені. Їх значення в подальшому залишаються практично незмінними.

Значення шуканих величин отримують за формулами:

$$B_2 = B_1 + b;\ L_2 = L_1 + l,\ A_2 = A_1 + 180^\circ + a$$

Обчислення припиняють, коли останні значення B_2, L_2, A_{21} будуть рівні попереднім в рамках очікуваної точності.

Для скорочення загального числа наближень значення B_2, A_{21}, необхідні для отримання B_m, A_m в першому наближенні, можна визначить по карті, користуючись вихідними аргументами.

Завдання: розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки та методом із середніми аргументами (методом послідовних наближень) (значення географічних координат B_1, L_1 деякої точки Q_1, прямий азимут A_{12} і відстань S між точками Q_1 і Q_2 вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 3, табл. 3.1*).

Числовий приклад:

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу методом допоміжної точки за наступними вихідними даними:

$B_1 = 52°35'44{,}6278''$; $L_1 = 28°25'43{,}2822''$;

$A_{12} = 45°29'34{,}268''$; $S = 32425{,}67$ м.

Таблиця 4.1

Схема розв'язку прямої геодезичної задачі методом допоміжної точки

Елементи формули	Результати обчислення	Елементи формули	Результати обчислення
e'^2	$6{,}738525\cdot10^{-3}$	$cosB_0$	$6{,}045994\cdot10^{-1}$
c	6399699 м	V_0	1,001230
ρ'	206264,8	γ	$3{,}617856\cdot10^{-3}$
B_1	52°59573	λ	$5{,}98389\cdot10^{-3}$
V_1^2	1,002486	τ	$4{,}766346\cdot10^{-3}$
V_1	1,001242	l'	1234,2560″
σ	$5{,}079345\cdot10^{-3}$	t	$4{,}766299\cdot10^{-3}$
A_{12}	45°49285	d''	1,7828″
u_0	$3{,}560611\cdot10^{-3}$	$(t-\varepsilon)\rho'$	981,790″
υ_0	$3{,}622400\cdot10^{-3}$	B_0	52°47′59,9590″
u	$3{,}560626\cdot10^{-3}$	$-d$	−1,7828
υ	$3{,}622392\cdot10^{-3}$	B_2	52°47′58,1762″
$3sin2B_1$	2,895166	L_1	28°25′43,2822″
$2ucos2B_1$	$-1{,}866090\cdot10^{-3}$	l	20′34,2560″
$B_0 - B_1$	735,3312″	L_2	28°46′17,53812″
B_0	52°47′59,9590″	$A_1 \pm 180°$	225°29′34,268″
B_0°	52°,79998	$(t-\varepsilon)\rho'$	16′21,790″
$sinB_0$	$7{,}965297\cdot10^{-1}$	A_{21}	225°45′56,058″

2. Розв'язати пряму геодезичну задачу методом із середнім аргументом (методом послідовних наближень) за наступними вихідними даними:

B_1 = 52°35′44,6278″;

L_1 = 28°25′43,2822″;

A_{12} = 45°29′34,268″;

S = 32425,67 м.

Таблиця 4.2

Схема обчислення розв'язку прямої геодезичної задачі методом із середнім аргументом (методом послідовних наближень)

$\frac{S}{c}$	$5{,}066749\cdot10^{-3}$	ρ'	206264,8	
B_1	52°,59573	$(2\lambda^2+\alpha^2)/24$	$3{,}93\cdot10^{-6}$	
L_1	28°,42869	$(\alpha^2-\beta^2)/24$	$0{,}41\cdot10^{-6}$	
A_{12}	45°,49285	$(2\beta^2+2\lambda^2-\alpha^2)/24$	$3{,}09\cdot10^{-6}$	
B_m	52°,59573	52°,69786	52°,697610	52°,697610
A_m	45°,49285	45°,62839	45°,62920	45°,62921
$\cos B_m$	$6{,}074351\cdot10^{-1}$	$6{,}060181\cdot10^{-1}$	$6{,}060215\cdot10^{-1}$	
$\sin B_m$	$7{,}943694\cdot10^{-1}$	$7{,}954509\cdot10^{-1}$	$7{,}954483\cdot10^{-1}$	
$\cos A_m$	$7{,}009982\cdot10^{-1}$	$6{,}993092\cdot10^{-1}$	$6{,}992990\cdot10^{-1}$	
$\sin A_m$	$7{,}131630\cdot10^{-1}$	$7{,}148198\cdot10^{-1}$	$7{,}148291\cdot10^{-1}$	
V_m^3	1,003731	1,003713	1,003713	
V_m	1,001242	1,001236	1,001235	
$\frac{SV_m}{c}$	$5{,}073041\cdot10^{-3}$	$5{,}073014\cdot10^{-3}$	$5{,}073014\cdot10^{-3}$	
β	$3{,}565033\cdot10^{-3}$	$3{,}556382\cdot10^{-3}$	$3{,}556330\cdot10^{-3}$	
λ	$5{,}956035\cdot10^{-3}$	$5{,}983795\cdot10^{-3}$	$5{,}983843\cdot10^{-3}$	
α	$4{,}731292\cdot10^{-3}$	$4{,}759815\cdot10^{-3}$	$4{,}759838\cdot10^{-3}$	
b''	735,3408″	733,5593″	733,5485″	
l'	1228,5200″	1234,2460″	1234,2560″	
a'	975,8989″	981,7853″	981,790″	

B_1	52°35′44,6278″	L_1	28°25′43,2822″	A_{12}	45°29′34,268″
b	12′13,5485″	l	20′34,2560″	a	16′21,790″
B_2	52°47′58,1763″	L_2	28°46′17,5382″	A_{21}	225°45′56,058″

Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Дайте визначення головним геодезичним задачам.
2. Охарактеризуйте градацію можливих віддалей, для кожного із яких існує найбільш прийнятний спосіб розв’язування головних геодезичних задач.
3. Які основні шляхи розв’язку прямої та оберненої геодезичних задач Ви знаєте?
4. Які методи розв’язання прямої геодезичної задачі Ви знаєте?
5. Які методи розв’язання оберненої геодезичної задачі Ви знаєте?

Практична робота №5
Розв'язування головних геодезичних задач в просторі

Мета роботи: ознайомитись із змістом та розв'язати пряму і обернену геодезичні задачі в просторі

Теоретичні відомості

Пряма геодезична задача в просторі

В зв'язку з широким впровадженням комп'ютерної техніки на даний час можна вважати, що найбільш оптимальним шляхом розв'язування головних геодезичних задач є використання чисельних методів інтегрування диференційних рівнянь, що характеризують зміну широти і довготи

$$\frac{dB}{ds}=\frac{\cos A}{M}\ \text{і}\ \frac{dL}{ds}=\frac{\sin A}{N\cos B}, \tag{5.1}$$

а також зміну азимута вздовж геодезичної лінії

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\sin A}{N\cos B}\sin B\,. \tag{5.2}$$

Для розв'язування головних геодезичних задач в просторі використовують системи просторових декартових (*X*, *Y*, *Z*), геодезичних *(B*, *L*, *H*), топоцентричних горизонтальних – декартових (*x′*, *y′*, *z′*) та полярних *(A, z*, *D)* координат і зв'язки між ними.

За визначенням топоцентричних полярних координат *z, A, D* маємо такі формули для координатних перетворень:

$$\begin{aligned} x' &= D\sin z\cos A\,,\\ y' &= D\sin z\sin A\,,\\ z' &= D\cos z\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$tgA=\frac{y'}{x'},\ \ ctgz=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ D=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,. \tag{5.4}$$

Декартові просторові координати *X, Y, Z* і топоцентричні декартові координати *x′, y′, z′* пов'язані наступними залежностями:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{bmatrix} + P_Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

де матриця P_Q має такі елементи:

$$P_Q = \begin{vmatrix} -\sin B_Q \cos L_Q & -\sin L_Q & \cos B_Q \cos L_Q \\ -\sin B_Q \sin L_Q & \cos L_Q & \cos B_Q \sin L_Q \\ \cos B_Q & 0 & \sin B_Q \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

І зворотний зв'язок:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P'_Q \begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

де матриця P_Q' – транспонована матриця P_Q.

Пряма геодезична задача формулюється наступним чином: задані геодезичні координати B_1, L_1, H_1 початкової точки Q_1 і топоцентричні полярні координати z_{12}, A_{12}, D точки Q_2 відносно початкової точки Q_1. Необхідно визначити геодезичні координати B_2, L_2, H_2 точки Q_2 (*рис. 5.1*).

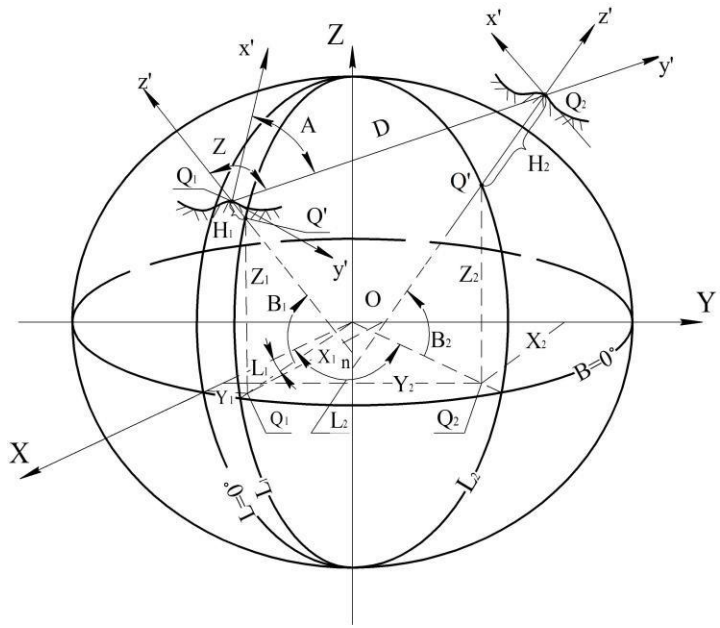


Рис. 5.1. Головна геодезична задача в просторі

Поставлену задачу розв'язують в такій послідовності:

а) за формулами зв'язку

$$\begin{aligned} X &= X + \Delta X = \left(N + H\right)\cos B\cos L\,, \\ Y &= Y + \Delta Y = \left(N + H\right)\cos B\sin L\,, \\ Z &= Z + \Delta Z = [N\left(1 - e^2\right) + H]\sin B \end{aligned} \qquad (5.8)$$

обчислюють просторові декартові координати X_1, Y_1, Z_1, точки Q_1;

б) обчислюють елементи матриці перетворення координат P_Q, за формулою (5.6);

в) використовуючи формули (5.3), обчислюють топоцентричні декартові координати x'_2, y'_2, z'_2;

г) за формулою (5.5) обчислюють декартові координати X_2, Y_2, Z_2 точки Q_2:

д) для переходу до геодезичних координат B_2, L_2, H_2 точки Q_2 використовують формулу зв'язку:

$$tgL = \frac{Y}{X},\ tgB_{i+1} = \frac{Z}{R} + \frac{btgB_i}{\sqrt{c + tg^2 B_i}},\ i = 1,2...,n,$$

$$tgB_1 = \frac{Z}{X},\ R = \sqrt{X^2 + Y^2},\ b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}},\ c = \frac{1}{1-e^2}, \qquad (5.9)$$

$$H = \frac{Z}{\sin B} - \left(1 - e^2\right)N.$$

Обернена геодезична задача: **з**адані геодезичні координати B, L, H двох точок Q_1 і Q_2. Необхідно знайти топоцентричні полярні координати z_{12}, A_{12}, D точки Q_2 відносно початкової точки Q_1.

Для розв'язування поставленої задачі можна застосувати таку схему:

а) від геодезичних координат B, L, H точок Q_1 та Q_2 за формулами (5.8) переходять до декартових X_i, Y_i, Z_i (де i = 1, 2);

б) обчислюють елементи транспонованої матриці перетворення координат P_2' за формулою

$$P_2' = \begin{vmatrix} -\sin B_2 \cos L_2 & -\sin B_2 \sin L_2 & \cos B_2 \\ -\sin L_2 & \cos L_2 & 0 \\ \cos B_2 \cos L_2 & \cos B_2 \sin L_2 & \sin B_2 \end{vmatrix};$$

в) за формулою (5.7) обчислюють топоцентричні декартові координати x_i', y_i', z_i' (i = 1, 2) точки Q_1 відносно точки Q_2 і навпаки;

г) топоцентричні полярні координати z_{12}, A_{12}, D точки Q_2 відносно початкової точки Q_1 і z_{21}, A_{21}, D точки Q_1 відносно точки Q_2 обчислюють за формулами (5.4).

Наведені вище схеми можна використовувати для розв'язування головної геодезичної задачі між точками на поверхні еліпсоїда. Для цього в цих формулах достатньо прийняти $H_1 = H_2 = 0$. Розв'язком при цьому, наприклад, в оберненій геодезичній задачі будуть азимути прямого і оберненого нормальних перерізів та довжина хорди цих перерізів.

Завдання:

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу в просторі (значення геодезичних координат B_1, L_1, $H_1 = 385{,}471$ м, початкової точки Q_1 і

топоцентричні полярні координати z_{12} = 89°18′16,2″, A_{12}, D точки Q_2 відносно початкової точки Q_1 вибираються згідно індивідуального варіанту за двома останніми цифрами номера залікової книжки, див. *додаток 3, табл. 3.1;* в *табл. 3.1* числове значення s дорівнює числовому значенню D).

2. Розв'язати обернену геодезичну задачу в просторі використовуючи як вихідні дані результати розв'язку прямої геодезичної задачі в просторі; H_2 = 1107,509 м.

Числовий приклад:

1. Розв'язати пряму геодезичну задачу в просторі за наступними вихідними даними:

B_1 = 50°35'44,6278″;
L_1 = 28°25′43,2822″;
H_1 = 385,471 м;
D = 45900,500 м;
z_{12} = 89°18′16,2″;
A_{12} = 45°29′34,268″.
Для еліпсоїда Красовського:
a = 6378245 м; e^2= 0,006693421623.

Алгоритм розв'язку:

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B_1}},$$

$$X_1 = (N_1 + H_1)\cos B_1 \cos L_1,$$
$$Y_1 = (N_1 + H_1)\cos B_1 \sin L_1,$$
$$Z_1 = (N_1 + H_1 - e^2 N_1)\sin B_1,$$

$$x'_2 = D\sin z_{12}\cos A_{12},$$
$$y'_2 = D\sin z_{12}\sin A_{12},$$
$$z'_2 = D\cos z_{12},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin L_1 & \cos B_1 \cos L_1 \\ -\sin B_1 \sin L_1 & \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 \\ \cos B_1 & 0 & \sin B_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + P_1 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_2 ,$$

$$tgL_2 = \frac{Y_2}{X_2},\ R = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2},\ c = \frac{1}{1-e^2},\ b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}},$$

$$tgB_2^i = \frac{Z}{R^2},\ tgB_2^{i+1} = \frac{Z_2}{R} + \frac{btgB_2^i}{\sqrt{c + tg^2 B_2^i}},\ i = 1,2,...,n.$$

$$H_2 = \frac{Z_2}{\sin B_2} - \left(1 - e^2\right) N_2 .$$

Таблиця 5.1

Схема обчислення прямої геодезичної задачі в просторі

Елементи формули	Результати обчислення			Елементи формули	Результати обчислення
N_1	6391027,912			ΔX	-37133,940
$cosB_1$	0,634788100			ΔY	17118,257
$sinB_1$	0,772686267			ΔZ	20854,056
$cosL_1$	0,879410305			X_2	3530803,532
$sinL_1$	0,476064612			Y_2	1948604,343
$cosz_{12}$	0,012138466			Z_2	4926357,554
$sinz_{12}$	0,999926326			R	4032819,419
$cosA_{12}$	0,700998238			c	1,006738525
$sinA_{12}$	0,713163003			b	0,010621819
X_1	3567937,472			N_2	6391133,789
Y_1	1931486,086			tgL_2	0,551886936
Z_1	4905503,498			B_2^1	50º41′43,89″
P_1	-0,679508265	-0,476064612	0,558239196	B_2^2	50º53′00,49″
	-0,367848587	0,879410305	0,302200150	B_2^3	50º53′02,30″
	0,634788100	0	0,772686267	B_2^4	50º53′02,31″
x'_{21}	32173,7991			B_2^5	50º53′02,31″
y'_{21}	32732,1267			B_2	50º53′02,31″
z'_{21}	557,1616			L_2	28º53′37,44″
				H_2	1107,509

2. Розв'язати обернену геодезичну задачу в просторі використовуючи як вихідні дані результати розв'язку прямої геодезичної задачі в просторі.

Вихідні дані:

B_1 = 50°35'44,6278″;

L_1 = 28°25′43,2822″;

H_1 = 385,471 м;

B_2 = 50°53'02,3100″;

L_2 = 28°53′37,4398″;

H_2 = 1107,509 м.

Алгоритм розв'язку:

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B_i}},\ i=1,2,$$

$$\begin{aligned} X_i &= (N_i + H_i)\cos B_i \cos L_i, \\ Y_i &= (N_i + H_i)\cos B_i \sin L_i, \\ Z_i &= (N_i + H_i - e^2 N_i)\sin B_i, \end{aligned}$$

$$P_i' = \begin{vmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}_j = P_i \begin{vmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \\ Z_i - Z_j \end{vmatrix},\ j = 2,1;\ i = 1,2,$$

$$tgA_{ij} = \frac{y'_j}{x'_j},\ ctgz_{ij} = \frac{Z}{R} + \frac{z'_j}{\sqrt{x'^2_j + y'^2_j}},$$

$$D = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}\ .$$

Таблиця 5.2

Схема обчислення оберненої геодезичної задачі в просторі

Елементи формули	Результати обчислення			Елементи формули	Результати обчислення
N_1	6391027,912			N_2	6391133,789
$cosB_1$	0,634788100			$cosB_2$	0,630892834
$sinB_1$	0,772686267			$sinB_2$	0,775869983
$cosL_1$	0,879410305			$cosL_2$	0,875517380
$sinL_1$	0,476064612			$sinL_2$	0,483186626
X_1	3567937,472			X_2	3530803,532
Y_1	1931486,086			Y_2	1948604,343
Z_1	4905503,498			Z_2	4926357,554
A_{21}	225º51′10,57″				
P'_1	– 0,679508265	– 0,367848587	0,634788100	ΔX	-37133,940
	– 0,476064612	0,879410305	0	ΔY	17118,257
	0,558239196	0,302200150	0,772686267	ΔZ	20854,056
P'_2	–0,679287654	– 0,37488999	0,634788100	x'_{21}	32173,7991
	– 0,483186626	0, 875517380	0	y'_{21}	32732,1267
	0,5523576 41	0,304838979	0,775869983	z'_{21}	557,1616
D	45900,500 м			x'_{12}	-31963,8381
z_{12}	89º18′16,20″			y'_{12}	-32929,9547
z_{21}	91º05′41,86″				
A_{12}	45º29′34,27″			z'_{12}	-877,1326
A_{21}	225º51′10,57″				

Питання для самостійного контролю та засвоєння матеріалу:

1. Як формулюється пряма геодезична задача в просторі?
2. Як формулюється обернена геодезична задача в просторі?
3. Що являють собою декартові просторові координати?
4. Що являють собою топоцентричні декартові координати?
5. Що являють собою геодезичні координати?

Вимоги до виконання та оформлення практичних робіт

Лабораторні роботи з курсу «Основи вищої геодезії» виконуються кожним студентом згідно номера індивідуального варіанту. Номер індивідуального варіанту визначають дві останні цифри номера залікової книжки студента. Вихідні дані для виконання лабораторних робіт наведено в ДОДАТКАХ 1 ÷ 3 даних методичних вказівок.

Лабораторні роботи оформлюються на папері формату А4.

Приклад оформлення титульного аркуша наведено в *ДОДАТКУ 4*.

Основний напис для текстових документів на першому аркуші повинен виконуватись згідно *форми 2*, на подальших аркушах – згідно *форми 2а* (основні написи для текстових документів (*форма 2* та *форма 2а* наведено в *ДОДАТКУ 5*).

Позначення документа виконується за наступною структурою:

КМ. ЛР12. ХХ. 00. ЗВ,

де

КМ – код кафедри (кафедра маркшейдерії);

ЛР – позначення виду робіт (лабораторні роботи);

12 – рік виконання лабораторної роботи (2012 рік);

ХХ – номер індивідуального варіанта;

00 – порядковий номер розділу (00 – титульний аркуш; 01 – перша лабораторна робота; 02 – друга лабораторна робота);

ЗВ – позначення звіту.

Відстань від рамки аркуша до межі тексту на початку і в кінці рядків повинна дорівнювати 3÷5 мм. Відстань від верхнього і нижнього рядка тексту до верхньої чи нижньої рамки – 10÷15 мм. Відступ абзацу від лівої обрамляючої лінії – 15÷17 мм.

В пояснювальній записці спочатку зазначається номер та тема лабораторної роботи, номер варіанту, наводяться короткі теоретичні відомості. Розрахунки супроводжуються поясненням кожної дії.

ДОДАТОК 1

Вихідні дані для виконання практичної роботи №1 «Обчислення довжини дуг меридіана та паралелі»

Таблиця 1.1

Обчислення довжини дуги меридіана (еліпсоїд Красовського)

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	**Широта точки *1***	**Широта точки *2***
1	2	3
01	$B_1 = 45°00'17{,}221''$	$B_2 = 48°59'58{,}938''$
02	$B_1 = 44°30'17{,}221''$	$B_2 = 48°29'58{,}938''$
03	$B_1 = 44°00'17{,}221''$	$B_2 = 47°59'58{,}938''$
04	$B_1 = 43°30'17{,}221''$	$B_2 = 47°29'58{,}938''$
05	$B_1 = 43°00'17{,}221''$	$B_2 = 46°59'58{,}938''$
06	$B_1 = 45°50'17{,}221''$	$B_2 = 49°29'58{,}938''$
07	$B_1 = 46°00'17{,}221''$	$B_2 = 49°59'58{,}938''$
08	$B_1 = 46°30'17{,}221''$	$B_2 = 50°29'58{,}938''$
09	$B_1 = 47°00'17{,}221''$	$B_2 = 50°59'58{,}938''$
10	$B_1 = 47°30'17{,}221''$	$B_2 = 51°29'58{,}938''$
11	$B_1 = 48°00'17{,}221''$	$B_2 = 51°59'58{,}938''$
12	$B_1 = 48°30'17{,}221''$	$B_2 = 52°29'58{,}938''$
13	$B_1 = 49°00'17{,}221''$	$B_2 = 52°59'58{,}938''$
14	$B_1 = 49°30'17{,}221''$	$B_2 = 53°29'58{,}938''$
15	$B_1 = 50°00'17{,}221''$	$B_2 = 53°59'58{,}938''$
16	$B_1 = 50°30'17{,}221''$	$B_2 = 54°29'58{,}938''$
17	$B_1 = 49°45'17{,}221''$	$B_2 = 53°44'58{,}938''$
18	$B_1 = 50°15'17{,}221''$	$B_2 = 54°14'58{,}938''$
19	$B_1 = 50°45'17{,}221''$	$B_2 = 54°44'58{,}938''$
20	$B_1 = 51°00'17{,}221''$	$B_2 = 54°59'58{,}938''$
21	$B_1 = 56°00'18{,}283''$	$B_2 = 60°00'00{,}000''$
22	$B_1 = 56°15'18{,}283''$	$B_2 = 60°15'00{,}000''$
23	$B_1 = 56°30'18{,}283''$	$B_2 = 60°30'00{,}000''$
24	$B_1 = 56°45'18{,}283''$	$B_2 = 60°45'00{,}000''$
25	$B_1 = 57°00'18{,}283''$	$B_2 = 61°00'00{,}000''$
26	$B_1 = 44°00'00{,}000''$	$B_2 = 48°00'00{,}000''$
27	$B_1 = 44°30'00{,}000'''$	$B_2 = 48°30'00{,}000''$
28	$B_1 = 45°00'00{,}000''$	$B_2 = 49°00'00{,}000''$
29	$B_1 = 45°30'00{,}000''$	$B_2 = 49°30'00{,}000''$

Продовження ДОДАТКУ 1
Продовження таблиці 1.1

1	2	3
30	$B_1 = 46°00′00,000″$	$B_2 = 50°00′00,000″$
31	$B_1 = 45°00′17,221″$	$B_2 = 46°59′58,938″$
32	$B_1 = 44°30′17,221″$	$B_2 = 46°29′58,938″$
33	$B_1 = 44°00′17,221″$	$B_2 = 45°59′58,938″$
34	$B_1 = 43°30′17,221″$	$B_2 = 45°29′58,938″$
35	$B_1 = 43°00′17,221″$	$B_2 = 44°59′58,938″$
36	$B_1 = 45°50′17,221″$	$B_2 = 47°29′58,938″$
37	$B_1 = 46°00′17,221″$	$B_2 = 47°59′58,938″$
38	$B_1 = 46°30′17,221″$	$B_2 = 48°29′58,938″$
39	$B_1 = 47°00′17,221″$	$B_2 = 48°59′58,938″$
40	$B_1 = 47°30′17,221″$	$B_2 = 49°29′58,938″$
41	$B_1 = 48°00′17,221″$	$B_2 = 49°59′58,938″$
42	$B_1 = 48°30′17,221″$	$B_2 = 50°29′58,938″$
43	$B_1 = 49°00′17,221″$	$B_2 = 50°59′58,938″$
44	$B_1 = 49°30′17,221″$	$B_2 = 51°29′58,938″$
45	$B_1 = 50°00′17,221″$	$B_2 = 51°59′58,938″$
46	$B_1 = 50°30′17,221″$	$B_2 = 52°29′58,938″$
47	$B_1 = 49°45′17,221″$	$B_2 = 51°44′58,938″$
48	$B_1 = 50°15′17,221″$	$B_2 = 52°14′58,938″$
49	$B_1 = 50°45′17,221″$	$B_2 = 52°44′58,938″$
50	$B_1 = 51°00′17,221″$	$B_2 = 52°59′58,938″$
51	$B_1 = 56°00′18,283″$	$B_2 = 58°00′00,000″$
52	$B_1 = 56°15′18,283″$	$B_2 = 58°15′00,000″$
53	$B_1 = 56°30′18,283″$	$B_2 = 58°30′00,000″$
54	$B_1 = 56°45′18,283″$	$B_2 = 58°45′00,000″$
55	$B_1 = 57°00′18,283″$	$B_2 = 59°00′00,000″$
56	$B_1 = 44°00′00,000″$	$B_2 = 46°00′00,000″$
57	$B_1 = 44°30′00,000′″$	$B_2 = 46°30′00,000″$
58	$B_1 = 45°00′00,000″$	$B_2 = 47°00′00,000″$
59	$B_1 = 45°30′00,000″$	$B_2 = 47°30′00,000″$
60	$B_1 = 46°00′00,000″$	$B_2 = 48°00′00,000″$
61	$B_1 = 47°00′17,221″$	$B_2 = 48°59′58,938″$
62	$B_1 = 46°30′17,221″$	$B_2 = 48°29′58,938″$
63	$B_1 = 46°00′17,221″$	$B_2 = 47°59′58,938″$
64	$B_1 = 45°30′17,221″$	$B_2 = 47°29′58,938″$
65	$B_1 = 45°00′17,221″$	$B_2 = 46°59′58,938″$
66	$B_1 = 47°50′17,221″$	$B_2 = 49°29′58,938″$
67	$B_1 = 48°00′17,221″$	$B_2 = 49°59′58,938″$

Продовження ДОДАТКУ 1
Продовження таблиці 1.1

1	2	3
68	$B_1 = 48°30′17{,}221″$	$B_2 = 50°29′58{,}938″$
69	$B_1 = 49°00′17{,}221″$	$B_2 = 50°59′58{,}938″$
70	$B_1 = 49°30′17{,}221″$	$B_2 = 51°29′58{,}938″$
71	$B_1 = 50°00′17{,}221″$	$B_2 = 51°59′58{,}938″$
72	$B_1 = 50°30′17{,}221″$	$B_2 = 52°29′58{,}938″$
73	$B_1 = 51°00′17{,}221″$	$B_2 = 52°59′58{,}938″$
74	$B_1 = 51°30′17{,}221″$	$B_2 = 53°29′58{,}938″$
75	$B_1 = 52°00′17{,}221″$	$B_2 = 53°59′58{,}938″$
76	$B_1 = 52°30′17{,}221″$	$B_2 = 54°29′58{,}938″$
77	$B_1 = 51°45′17{,}221″$	$B_2 = 53°44′58{,}938″$
78	$B_1 = 52°15′17{,}221″$	$B_2 = 54°14′58{,}938″$
79	$B_1 = 52°45′17{,}221″$	$B_2 = 54°44′58{,}938″$
80	$B_1 = 53°00′17{,}221″$	$B_2 = 54°59′58{,}938″$
81	$B_1 = 58°00′18{,}283″$	$B_2 = 60°00′00{,}000″$
82	$B_1 = 58°15′18{,}283″$	$B_2 = 60°15′00{,}000″$
83	$B_1 = 58°30′18{,}283″$	$B_2 = 60°30′00{,}000″$
84	$B_1 = 58°45′18{,}283″$	$B_2 = 60°45′00{,}000″$
85	$B_1 = 59°00′18{,}283″$	$B_2 = 61°00′00{,}000″$
86	$B_1 = 46°00′00{,}000″$	$B_2 = 48°00′00{,}000″$
87	$B_1 = 46°30′00{,}000″$	$B_2 = 48°30′00{,}000″$
88	$B_1 = 47°00′00{,}000″$	$B_2 = 49°00′00{,}000″$
89	$B_1 = 47°30′00{,}000″$	$B_2 = 49°30′00{,}000″$
90	$B_1 = 48°00′00{,}000″$	$B_2 = 50°00′00{,}000″$
91	$B_1 = 48°00′17{,}221″$	$B_2 = 48°59′58{,}938″$
92	$B_1 = 47°30′17{,}221″$	$B_2 = 48°29′58{,}938″$
93	$B_1 = 47°00′17{,}221″$	$B_2 = 47°59′58{,}938″$
94	$B_1 = 46°30′17{,}221″$	$B_2 = 47°29′58{,}938″$
95	$B_1 = 46°00′17{,}221″$	$B_2 = 46°59′58{,}938″$
96	$B_1 = 48°50′17{,}221″$	$B_2 = 49°29′58{,}938″$
97	$B_1 = 49°00′17{,}221″$	$B_2 = 49°59′58{,}938″$
98	$B_1 = 49°30′17{,}221″$	$B_2 = 50°29′58{,}938″$
99	$B_1 = 50°00′17{,}221″$	$B_2 = 50°59′58{,}938″$
00	$B_1 = 50°30′17{,}221″$	$B_2 = 51°29′58{,}938″$

Продовження ДОДАТКУ 1

Таблиця 1.2

Обчислення довжини дуги паралелі (Еліпсоїд Красовського)

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	**Широта паралелі**	**Різниця довгот**
1	2	3
01	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°30′30,000″
02	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°45′00,000″
03	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°00′00,000″
04	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°05′30,000″
05	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°10′00,000″
06	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°50′00,000″
07	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°55′00,000″
08	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°20′00,000″
09	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°25′00,000″
10	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°15′00,000″
11	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°25′30,000″
12	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°30′00,000″
13	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°35′30,000″
14	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°40′00,000″
15	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°45′45,000″
16	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°07′45,000″
17	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°30′30,000″
18	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°45′00,000″
19	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°00′00,000″
20	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°05′30,000″
21	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°10′00,000″
22	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°50′00,000″
23	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 0°55′00,000″
24	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°20′00,000″
25	B = 54°00′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°25′00,000″
26	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°00′30,000″
27	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°25′00,000″
28	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°30′00,000″
29	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = °35′30,000″
30	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°40′00,000″
31	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°20′00,000″
32	B = 50°20′00,000″	$l = L_2 – L_1$ = 1°25′00,000″

Продовження ДОДАТКУ 1

Продовження таблиці 1.2

1	2	3
33	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°50'00,000''$
34	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°55'00,000''$
35	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°45'00,000''$
36	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°55'30,000''$
37	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°00'00,000''$
38	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°05'30,000''$
39	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°10'00,000''$
40	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°15'45,000''$
41	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°37'45,000''$
42	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°00'30,000''$
43	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°15'00,000''$
44	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°30'00,000''$
45	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°35'30,000''$
46	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°40'00,000''$
47	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°20'00,000''$
48	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°25'00,000''$
49	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°50'00,000''$
50	$B =54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°55'00,000''$
51	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°30'30,000''$
52	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°45'00,000''$
53	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°00'00,000''$
54	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°05'30,000''$
55	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°10'00,000''$
56	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°50'00,000''$
57	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°55'00,000''$
58	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°20'00,000''$
59	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°25'00,000''$
60	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°15'00,000''$
61	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°25'30,000''$
62	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°30'00,000''$
63	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°35'30,000''$
64	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°40'00,000''$
65	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°45'45,000''$
66	$B = 45°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°07'45,000''$
67	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°30'30,000''$
68	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°45'00,000''$
69	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°00'00,000''$
70	$B =49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°05'30,000''$

Продовження ДОДАТКУ 1

Продовження таблиці 1.2

1	2	3
71	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°10'00,000''$
72	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°50'00,000''$
73	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 0°55'00,000''$
74	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°20'00,000''$
75	$B = 49°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°25'00,000''$
76	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°30'30,000''$
77	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°45'00,000''$
78	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°00'00,000''$
79	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°05'30,000''$
80	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°10'00,000''$
81	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°50'00,000''$
82	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°55'00,000''$
83	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°20'00,000''$
84	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°25'00,000''$
85	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°15'00,000''$
86	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°25'30,000''$
87	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°30'00,000''$
88	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°35'30,000''$
89	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°40'00,000''$
90	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°45'45,000''$
91	$B = 50°20'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°07'45,000''$
92	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°30'30,000''$
93	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°45'00,000''$
94	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°00'00,000''$
95	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°05'30,000''$
96	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°10'00,000''$
97	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°50'00,000''$
98	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 1°55'00,000''$
99	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°20'00,000''$
00	$B = 54°00'00,000''$	$l = L_2 - L_1 = 2°25'00,000''$

ДОДАТОК 2

Вихідні дані для виконання практичної роботи №2 «Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції»

Таблиця 2.1

Обчислення довжин сторін і площі сфероїдної трапеції

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	B_1	B_2	L_1	L_2	**Номенклатура трапеції**
1	2		4	5	6
01	51°40′	52°00′	28°00′	28°30′	
02	51°40′	52°00′	28°30′	29°00′	
03	51°20′	51°40′	28°00′	28°30′	
04	51°20′	51°40′	28°30′	29°00′	
05	51°20′	52°00′	28°00′	29°00′	
06	51°40′	52°00′	29°00′	29°30′	
07	51°40′	52°00′	29°30′	30°00′	
08	51°20′	51°40′	29°00′	29°30′	
09	51°20′	51°40′	29°30′	30°00′	
10	51°20′	52°00′	29°00′	30°00′	
11	51°40′	52°00′	30°00′	30°30′	
12	51°40′	52°00′	30°30′	31°00′	
13	51°20′	51°40′	30°00′	30°30′	
14	51°20′	51°40′	30°30′	31°00′	
15	51°20′	52°00′	30°00′	31°00′	
16	51°40′	52°00′	31°00′	31°30′	
17	51°40′	52°00′	31°30′	32°00′	
18	51°20′	51°40′	31°00′	31°30′	
19	51°20′	51°40′	31°30′	32°00′	
20	51°20′	52°00′	31°00′	32°00′	
21	51°00′	51°20′	28°00′	28°30′	
22	51°00′	51°20′	28°30′	29°00′	
23	50°40′	51°00′	28°00′	28°30′	
24	50°40′	51°00′	28°30′	29°00′	
25	50°40′	51°20′	28°00′	29°00′	
26	51°00′	51°20′	29°00′	29°30′	
27	51°00′	51°20′	29°30′	30°00′	
28	50°40′	51°00′	29°00′	29°30′	

Продовження ДОДАТКУ 2
Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6
29	50°40′	51°00′	29°30′	30°00′	
30	50°40′	51°20′	29°00′	30°00′	
31	51°00′	51°20′	30°00′	30°30′	
32	51°00′	51°20′	30°30′	31°00′	
33	50°40′	51°00′	30°00′	30°30′	
34	50°40′	51°00′	30°30′	31°00′	
35	50°40′	51°20′	30°00′	31°00′	
36	51°00′	51°20′	31°00′	31°30′	
37	51°00′	51°20′	31°30′	32°00′	
38	50°40′	51°00′	31°00′	31°30′	
39	50°40′	51°00′	31°30′	32°00′	
40	50°40′	51°20′	31°00′	32°00′	
41	50°20′	50°40′	28°00′	28°30′	
42	50°20′	50°40′	28°30′	29°00′	
43	50°00′	50°20′	28°00′	28°30′	
44	50°00′	50°20′	28°30′	29°00′	
45	50°00′	50°40′	28°00′	29°00′	
46	50°20′	50°40′	29°00′	29°30′	
47	50°20′	50°40′	29°30′	30°00′	
48	50°00′	50°20′	29°00′	29°30′	
49	50°00′	50°20′	29°30′	30°00′	
50	50°00′	50°40′	29°00′	30°00′	
51	50°00′	50°40′	30°00′	31°00′	
52	50°20′	50°40′	30°00′	30°30′	
53	50°20′	50°40′	30°30′	31°00′	
54	50°00′	50°20′	30°00′	30°30′	
55	50°00′	50°20′	30°30′	31°00′	
56	50°00′	50°40′	31°00′	32°00′	
57	50°20′	50°40′	31°00′	31°30′	
58	50°20′	50°40′	31°30′	32°00′	
59	50°00′	50°20′	31°00′	31°30′	
60	50°00′	50°20′	31°30′	32°00′	
61	49°20′	50°00′	28°00′	29°00′	
62	49°40′	50°00′	28°00′	28°30′	
63	49°40′	50°00′	28°30′	29°00′	
64	49°20′	49°40′	28°00′	28°30′	
65	49°20′	49°40′	28°30′	29°00′	
66	49°20′	50°00′	29°00′	30°00′	

Продовження ДОДАТКУ 2

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5	6
68	49°40′	50°00′	29°00′	29°30′	
69	49°20′	49°40′	29°00′	29°30′	
70	49°20′	49°40′	29°30′	30°00′	
71	49°20′	50°00′	30°00′	31°00′	
72	49°40′	50°00′	30°00′	30°30′	
73	49°40′	50°00′	30°30′	31°00′	
74	49°20′	49°40′	30°00′	30°30′	
75	49°20′	49°40′	30°30′	31°00′	
76	49°20′	50°00′	31°00′	32°00′	
77	49°40′	50°00′	31°00′	31°30′	
78	49°40′	50°00′	31°30′	32°00′	
79	49°20′	49°40′	31°00′	31°30′	
80	49°20′	49°40′	31°30′	32°00′	
81	51°20′	52°00′	27°00′	28°00′	
82	51°40′	52°00′	27°00′	27°30′	
83	51°40	52°00′	27°30′	28°00′	
84	51°20′	51°40′	27°00′	27°30′	
85	51°20′	51°40′	27°30′	28°00′	
86	50°40′	51°20′	27°00′	28°00′	
87	51°00′	51°20′	27°00′	27°30′	
88	51°00′	51°20′	27°30′	28°00′	
89	50°40′	51°00′	27°00′	27°30′	
90	50°40′	51°00′	27°30′	28°00′	
91	50°00′	50°40′	27°00′	28°00′	
92	50°20′	50°40′	27°00′	27°30′	
93	50°20′	50°40′	27°30′	28°00′	
94	50°00′	50°20′	27°00′	27°30′	
95	50°00′	50°20′	27°30′	28°00′	
96	49°20′	50°00′	27°00′	28°00′	
97	49°40′	50°00′	27°00′	27°30′	
98	49°40′	50°00′	27°30′	28°00′	
99	49°20′	49°40′	27°00′	27°30′	
00	49°20′	49°40′	27°30′	28°00′	

ДОДАТОК 3

Вихідні дані для виконання практичної роботи №4

Таблиця 3.1

Розв'язування геодезичних задач

№ варіанту (2 останні цифри номера залікової книжки)	B_1	L_1	A_{12}	S, м
1	2	3	4	5
01	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45297,282
02	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45797,282
03	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46297,282
04	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46797,282
05	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47297,282
06	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47797,282
07	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48297,282
08	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48797,282
09	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49297,282
10	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49797,282
11	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45400,500
12	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45900,500
13	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46400,500
14	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46900,500
15	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47400,500
16	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47900,500
17	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48400,500
18	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48900,500
19	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49400,500
20	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49900,500
21	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50003,718
22	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50106,936
23	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50210,154
24	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50313,372
25	50°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50416,590
26	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45297,282
27	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45797,282
28	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46297,282
29	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46797,282

Продовження ДОДАТКУ 3

Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5
30	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47297,282
31	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47797,282
32	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48297,282
33	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48797,282
34	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49297,282
35	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49797,282
36	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45400,500
37	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	45900,500
38	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46400,500
39	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	46900,500
40	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47400,500
41	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	47900,500
42	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48400,500
43	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	48900,500
44	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49400,500
45	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	49900,500
46	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50003,718
47	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50106,936
48	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50210,154
49	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50313,372
50	48°35′44,6278″	28°25′43,2822″	45°29′34,268″	50416,590
51	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	45297,282
52	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	45797,282
53	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	46297,282
54	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	46797,282
55	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	47297,282
56	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	47797,282
57	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	48297,282
58	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	48797,282
59	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	49297,282
60	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	49797,282
61	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	45400,500
62	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	45900,500
63	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	46400,500
64	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	46900,500
65	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	47400,500
66	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	47900,500
67	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	48400,500

Продовження ДОДАТКУ 3

Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5
68	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	48900,500
69	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	49400,500
70	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	49900,500
71	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	50003,718
72	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	50106,936
73	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	50210,154
74	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	50313,372
75	50°35′44,6278″	26°25′43,2822″	45°29′34,268″	50416,590
76	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	45297,282
77	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	45797,282
78	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	46297,282
79	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	46797,282
80	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	47297,282
81	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	47797,282
82	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	48297,282
83	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	48797,282
84	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	49297,282
85	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	49797,282
86	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	45400,500
87	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	45900,500
88	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	46400,500
89	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	46900,500
90	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	47400,500
91	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	47900,500
92	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	48400,500
93	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	48900,500
94	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	49400,500
95	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	49900,500
96	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	50003,718
97	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	50106,936
98	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	50210,154
99	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	50313,372
00	48°35′44,6278″	30°25′43,2822″	45°29′34,268″	50416,590

ДОДАТОК 4

Зразок оформлення титульного аркуша

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний університет «Житомирська політехніка»

Кафедра маркшейдерії
Група _____
Варіант_____

ЗВІТ

з практичних робіт
з курсу

«Основи вищої геодезії»

КМ. ЛР25. ХХ. 00. ЗВ

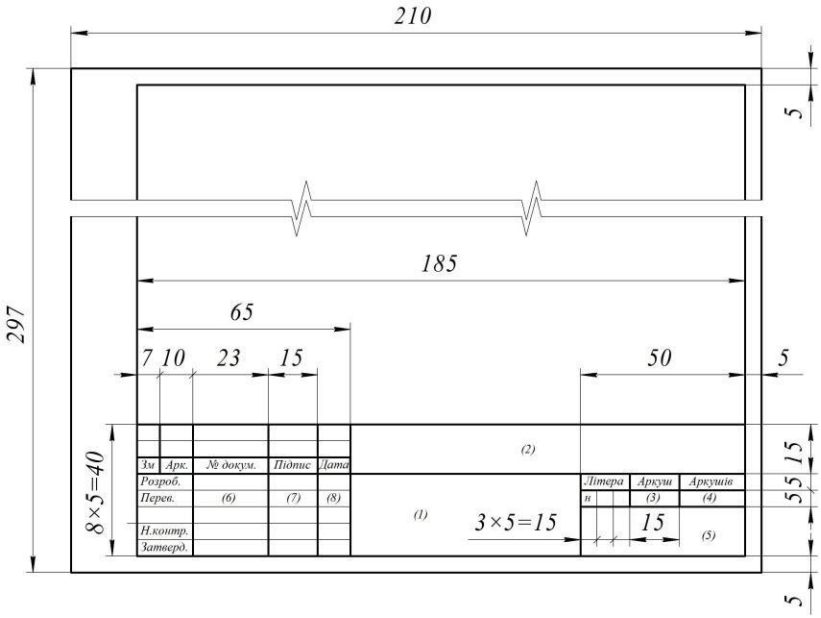
Виконав: _____ Дзюбак В.С.
(підпис студента)

Перевірила: Куницька М.С.

Житомир
2025

ДОДАТОК 5

Основні написи для текстових документів. Форма 2 та форма 2а



Основний напис для текстових документів. Форма 2

В графах основних написів зазначають наступні дані (номера граф наводяться в дужках):

графа 1 – назва лабораторної роботи;

графа 2 – позначення документа;

графа 3 – порядковий номер аркуша;

графа 4 – загальна кількість аркуші в лабораторній роботі;

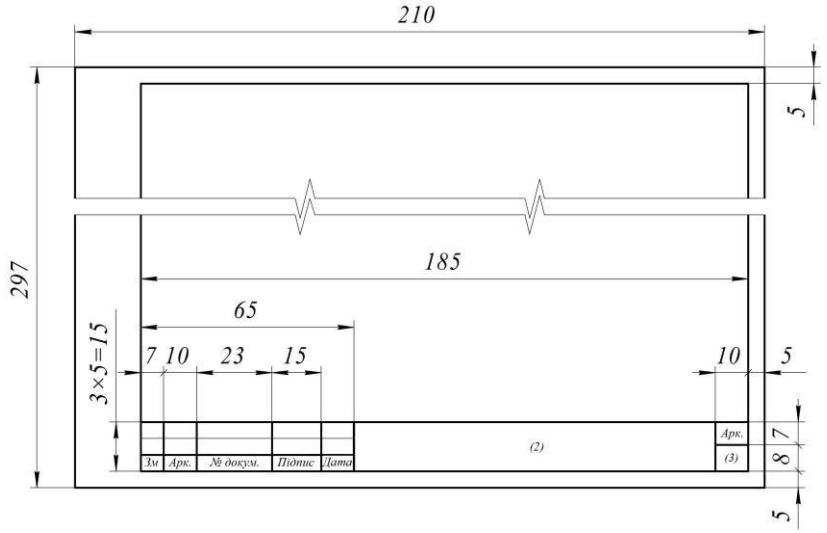
графа 5 – назва університету, шифр спеціальності та академічної групи;

графа 6 – прізвища осіб, що підписують роботу;

графа 7 – підписи осіб, прізвища яких зазначено в графі 6;

графа 8 – дата підписання роботи.

Продовження *ДОДАТКУ 5*



Основний напис для текстових документів. Форма 2а

Список рекомендованої літератури

1. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с

2. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с.

3. Островський А.Л. Геодезія. Частина перша. Топографія Навч. посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. - 440 с.

4. Савчук С.Г. Вища геодезія / С.Г. Савчук. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 315 с.

КОТЕНКО Володимир Володимир
КУНИЦЬКА Марина Сергіївна

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для практичних робіт з навчальної дисципліни «Основи вищої геодезії»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 184 «Гірництво»
освітньо-професійна програма «Гірництво»

Електронне видання. Формат 30×42 / 4. Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. акр. 1,16. Обл. вид. арк. 1,25.