1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ З ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ

Тема 1.2: Системи координат, що застосовуються у вищій геодезії.

1. Системи координат, що застосовуються у вищій геодезії
2. Основи теорії поверхонь
3. Чисельні методи у сфероїдальній геодезії

1. Системи координат, що застосовуються у вищій геодезії

Системи координат, що застосовуються в сучасній геодезії, можна розділити на групи: *прямолінійні* (двовимірні – на площині, тривимірні – в просторі); *сферичні* (двовимірні – на сфері, тривимірні – в просторі), *еліпсоїдальні* (двовимірні – на поверхні еліпсоїда, тривимірні – в просторі) тощо. Прямолінійні координати – двовимірні на площині – можуть бути *полярними координатами на площині,* а сферичні координати деколи називають *полярними координатами в просторі.* Вони можуть відрізнятися за формою, що задається, і бути: прямокутними і криволінійними. Але принципові відмінності систем координат обумовлюються вибором початку, основної координатної площини та головної осі координат.

Система координат, початок якої знаходиться в центрі мас Землі або близько нього, називається *геоцентричною* та *квазігеоцентричною* відповідно. Звідси, координати, зв'язані з загальноземним еліпсоїдом, будуть загальноземними і геоцентричними, а координати, зв'язані з вибраним референц-еліпсоїдом – референцними і квазігеоцентричними. Якщо ж початок координат збігається з пунктом спостереження на земній поверхні (топоцентром), то систему координат називають *топоцентричною.*

В залежності від вибраної основної координатної площини розрізняють *екваторіальну* (екватор або площина, паралельна екватору), *екліптичну* (площина екліптики), *горизонтну* (площина місцевого горизонту) та *орбітальну* (площина орбіти небесного об'єкта) системи координат.

В залежності від вибраного напряму осей координат відносно точок простору, системи координат поділяють на: *зоряні,* якщо вони зорієнтовані за далекими зорями (вивчаються в курсі "Геодезична астрономія"), *квазарні,* якщо вони зорієнтовані за далекими природніми радіоджерелами (квазарами); *земні,* якщо вони зорієнтовані за нерухомими точками на земній поверхні.

Напрями осей вибраної системи координат в просторі можуть бути задані відносно характерних точок небесної сфери або земної поверхні. У відповідності з цим слід розрізняти системи координат, що не обертаються і що обертаються разом з Землею.

В геодезії широке застосування мають особливі системи зв'язаних з Землею координат, основні координатні площини та головні осі яких збігаються відповідно з площиною земного екватора і віссю обертання Землі, або є паралельними до них. В одній із цих систем координат положення точки земної поверхні характеризується компонентами напряму прямовисної лінії в цій точці відносно координатних площин або нерухомих зірок. Оскільки положення точки земної поверхні в цій системі координат, що обертається разом з Землею, може бути визначене безпосередньо із астрономічних спостережень в цій точці, то ця сама система координат називається *астрономічною.*

Отже, астрономічні координати – компоненти напряму прямовисної лінії в даній точці простору відносно площини перпендикулярної до осі обертання Землі та площини початкового астрономічного меридіана.

Фігура Землі, як було сказано вище, в загальному має сфероїдальний вид, то для побудови другої системи координат вона замінюється деяким еліпсоїдом обертання з відомими розмірами та заданим положенням в тілі Землі. Положення точок земної поверхні характеризується компонентами напрямів нормалей до поверхні прийнятого еліпсоїда в цих точках та їх висотами над поверхнею цього еліпсоїда. Оскільки згадувані характеристики положення точок в цій системі координат визначаються за результатами геодезичних спостережень, то сама система називається *геодезичною*.

Астрономічна і геодезична системи координат можуть бути задані у вигляді як прямолінійних прямокутних, так і еліпсоїдальних координат.

При заданні геодезичних координат в еліпсоїдальному виді паралелі та меридіани приймають за систему ортогональних координатних ліній на еліпсоїді, а за координати приймають кутові величини. Перейдемо до їх розгляду.

Приймемо один з меридіанів за початковий. Тоді положення будь-якого другого меридіана буде визначатися двогранним кутом, утвореним площинами початкового та даного меридіанів. Цей кут має одну і ту ж величину для всіх точок даного меридіана і, відповідно, може бути прийнятий за координату для меридіана. Він позначається буквою L і називається *геодезичною довготою.*

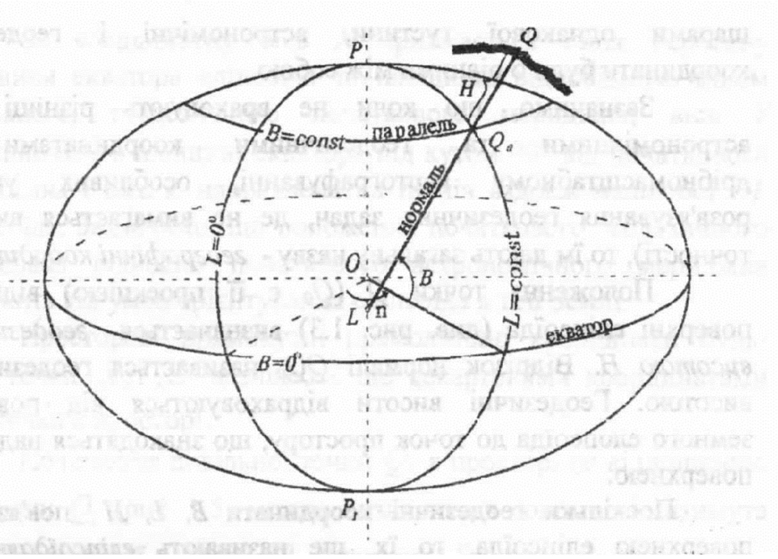

Рис. 1.1.

Довготи, що відраховуються від площини початкового меридіана на схід (в полюсі проти руху годинникової стрілки) в межах від 0 до +180° називаються східними довготами, а на захід в межах від 0 до -180° – західними довготами.

Отже, меридіан це координатна лінія, у всіх точках якої геодезична довгота має одну і ту ж величину ($L=const$). Відмітимо, що площина геодезичного меридіана проходить через нормаль до поверхні еліпсоїда Q_0 і вісь обертання еліпсоїда POP_1 (*рис. 1.1*). Тобто, геодезичний меридіан – слід перерізу земного еліпсоїда площиною, що проходить через нормаль до поверхні земного еліпсоїда в даній точці і його малу вісь.

Внаслідок симетричності поверхні еліпсоїда відносно меридіана пряма Q_0n буде перпендикулярна одночасно до дотичної до меридіана і до дотичної до паралелі**,** відповідно вона перпендикулярна до дотичної площини в точці Q_0.

Гострий кут, утворений нормаллю до поверхні еліпсоїда і площиною екватора, називається *геодезичною широтою* і позначається буквою *B*.

Геодезична широта відраховується від площини екватора в межах від 0 до ±90°.Отже**,** паралель є координатна лінія, у всіх точках якої геодезична широта має одне і теж значення *B=const.*

Система геодезичних координат *B* і *L* представляє собою основну систему координат, яка дозволяє однозначно визначати положення будь-якої точки на поверхні еліпсоїда. Практичне значення її полягає в тому, що геодезичні координати *B* і *L* дуже мало відрізняються від астрономічних координат φ і λ (предмет вивчення геодезичної астрономії) Останні, як відомо, визначаються із астрономічних спостережень незалежно від геодезичних вимірювань. Відмітимо, що коли не проводять різниці між астрономічними та геодезичними координатами (в дрібномасштабному картографуванні, особливих умовах розв’язування геодезичних задач, де не вимагається високої точності), то їм дають загальну *географічні координати.*

Положення точки *Q* (Q_0 є її проекцією) відносно поверхні еліпсоїда (див. *рис. 1.1*) визначається *геодезичною висотою H.* Відрізок нормалі QQ_0 називається геодезичною висотою. Геодезична висота відраховується від поверхні земного еліпсоїда в сторону збільшення висот.

Оскільки геодезичні координати *B, L, H* прив'язані до поверхні еліпсоїда, то їх ще називають еліпсоїдальними координатами.

Система геодезичних координат також може бути задана у виді просторових прямокутних координат *X, Y, Z,* початок якої суміщений з центром *O* еліпсоїда і основною площиною яких *(XOY)* служить площина його екватора. За координатну вісь *X* приймається лінія перетину площини екватора еліпсоїда та відповідним чином вибраного геодезичного початкового меридіана, вісь *Y* розташована в площині екватора під кутом 90° від початкового меридіана і вісь *Z* направлена на північ вздовж малої осі *OP* еліпсоїда (*рис. 1.2*). Відмітимо, що положення початкового геодезичного меридіана відносно початкового астрономічного меридіана залежить від умов орієнтування еліпсоїда в тілі Землі.

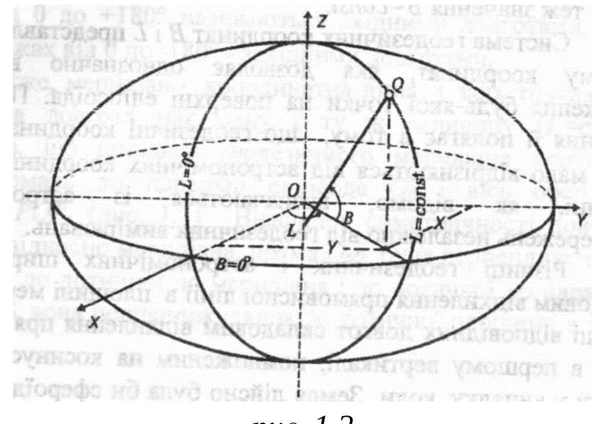

рис. 1.2

Отже, ми отримаєм геоцентричну екваторіальну систему координат, яка приймає участь в добовому русі Землі та є нерухомою відносно точок земної поверхні.

Геодезичні координати пунктів земної поверхні можуть бути задані також в проекції еліпсоїда на площину, тобто плоскими прямокутними координатами *xy.* В геодезичному виробництві, як у нас в Україні, так і в багатьох інших країнах, найбільш широко застосовується система плоских прямокутних координат Гауса-Крюгера. В основі цих координат лежить проекція, яку розробив німецький вчений К.Гаусс (1825-30 рр.) і для якої австрійський геодезист Л.Крюгер (1912 р.) дав робочі формули, довівши проекцію до практичного застосування. Це рівнокутна (конформна) поперечно-циліндрична проекція. Її і прийнято в даному випадку для зображення поверхні еліпсоїда на площину.

Якщо будь-яка точка на еліпсоїді, наприклад пункт геодезичної мережі, має координати *B* і *L*, то, використовуючи властивості проекції, можна за цими даними визначити для цієї точки плоскі прямокутні координати *x і y* та навпаки. Детальніше дану систему координат буде розглянуто при вивченні розділу "Плоскі прямокутні координати Гаусса –Крюгера".

Системи просторових еліпсоїдальних координат *B, L, H,* просторових прямолінійних прямокутних координат *X, У, Z,* а також плоских прямокутних координат *x, у* складають геодезичну систему координат. В класичній геодезичній літературі, під суто геодезичними, традиційно вважається система поверхневих еліпсоїдальних координат *B, L,* що склалася як першооснова геодезичної системи координат. Такої традиції ми будемо дотримуватися в подальших викладах і це не повинно бути причиною якогось непорозуміння.

Геодезична система координат знаходить широке застосування в теоретичних дослідженнях та практичних роботах в геодезії, топографії і картографії, оскільки вона об'єднує дані геодезії, топографічних знімань і картографування всієї поверхні Землі. Вона визначається також положенням центра мас, осі обертання та екватора Землі, а також нормаллю до земного еліпсоїда, що є надзвичайно зручним для вивчення фізичної фігури Землі і геоїда відносно земного еліпсоїда, визначення висот та розв'язку інших наукових і практичних задач.

2. Основи теорії поверхонь

Геометрію земного еліпсоїда можна розглядати як один із спеціальних розділів теорії поверхонь. Приведемо найбільш необхідні відомості із теорії поверхонь.

Теорію поверхонь слід розглядати із двох сторін: внутрішньої геометрії поверхні та зовнішньої геометрії. З позиції першої розглядаються властивості, інваріантні відносно викривлення поверхні, а з другої – властивості, інваріантні відносно групи рухів в просторі. Однією з основних задач сфероїдальної геодезії є вивчення внутрішньої геометрії поверхні земного еліпсоїда.

Сукупність таких властивостей поверхні та фігур на ній, які не змінюються при викривленні поверхні, називається *внутрішньою геометрією поверхні.*

Викривленням називається таке перетворення поверхні, при якому довжини всіх ліній, що лежать на цій поверхні, зберігаються.

Накладення однієї поверхні на другу після викривлення називається *розгортанням* першої поверхні на другу.

Оскільки основна увага нами буде звернута на вивчення кривих на поверхні, нагадаємо основні визначення, що відносяться до кривих.

Плоскі криві

Рівняння кривої можна задати в неявному виді: *F(x,y)=0,* в явному виді: *y=f(x),* в параметричному виді $x=x(u)$, $y=y(u)$, де *u* параметр.

В залежності від виду заданої кривої диференціал дуги знаходять із виразів:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx\text{, де } y = f(x); \qquad (1.1)$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,du\text{, де } x = x(u); y = y(u).$$

Кривизною K плоскої кривої в даній точці *Q* називається границя відношення кута між дотичними в двох суміжних точках Q_1 і Q_2 до дуги кривої між цими точками при зменшенні дуги до нескінченно малих розмірів.

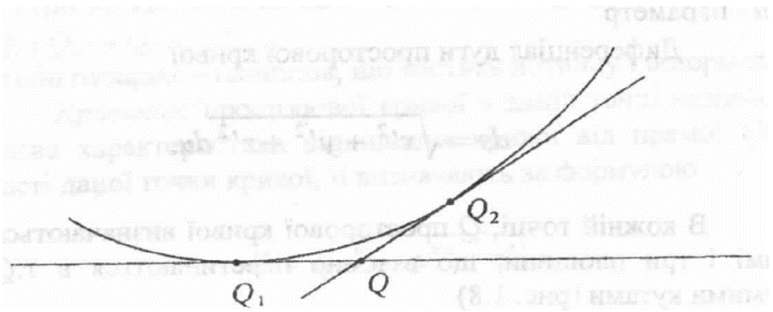

Рис. 1.3

Радіусом кривизни R вданій точці називається величина, обернена кривизні

$$R = \frac{1}{K}.$$

Кривизна та радіус кривизни плоскої кривої визначаються за формулами:

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}\text{, де } y = f(x); \qquad (1.2)$$

та

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}\text{, де } x = x(u); y = y(u).$$

Просторові криві.

Рівняння просторової кривої в параметричному виді

x=x(u), y=y(u), $z = z(u)$, де *u* – параметр.

Диференціал дуги просторової кривої

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,du. \qquad (1.3)$$

В кожній точці, *Q* просторової кривої визначаються три прямі і три площини, що взаємно перетинаються в т. *Q* під прямими кутами (*рис. 1.4*).

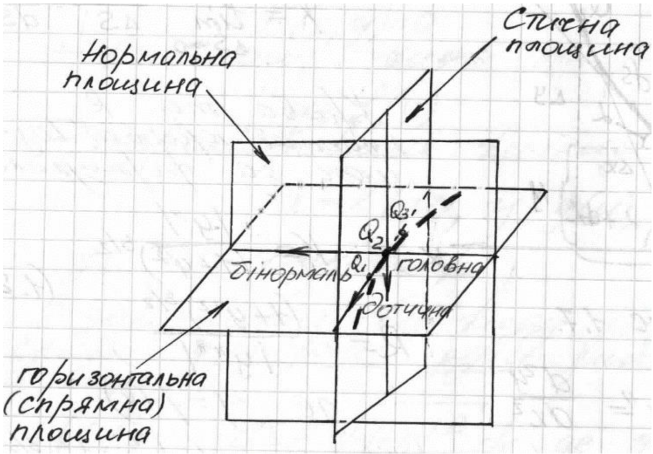

рис. 1.4

Прямі. Дотична – є граничним положенням січної. *Головна нормаль* – перетин нормальної і стичної площин, *бінормаль* – пряма, перпендикулярна до стичної площини.

Площини. Нормальна площина – площина, перпендикулярна до дотичної. *Стична площина* – граничне положення площини, що проходить через три близькі точки кривої Q_1, Q_2 та Q_3 коли $Q_1 \to Q_2$ і $Q_3 \to Q_2$ (*рис. 1.4*). *Спрямна площина* – площина, що містить дотичну і бінормаль.

Кривизною просторової кривої в даній точці називається числова характеристика відхилення кривої від прямої лінії в області даної точки кривої, її обчислюють за формулою

$$K = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

А радіус кривизни, відповідно

$$R = \frac{1}{K}.$$

Крученням просторової кривої в даній точці називається числова характеристика відхилення просторової кривої від плоскої кривої в області даної точки.

Поверхні. Рівняння поверхні задається наступними формами:

$F(x, y, z) = 0$ – неявна;

$z = f(x, y)$ – явна;

$x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v)$ – параметрична.

Диференціал дуги або лінійний елемент поверхні

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1.4}$$

де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Праву частину рівняння (1.4) називають *першою квадратичною формою поверхні.* Коефіцієнти *E, F, G*, що є функціями координат *u* та *v*, залежать тільки від положення точки на поверхні. Через дані коефіцієнти можна виразити також кут між кривими та площі фігур, тобто перша квадратична форма визначає метрику поверхні. При вигинанні поверхні без розтягів та розривів її рівняння звичайно змінюється, але метрика залишиться тією ж, тобто *<u>перша квадратична форма при вигинанні поверхні зберігається</u>*.

В сфероїдальній геодезії застосовується ортогональна система криволінійних параметричних координат, які утворюють на поверхні прямокутну сітку координат. В такому випадку рівняння (4) прийме наступний вид:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \tag{1.5}$$

Позначивши $\sqrt{\frac{E}{G}}du = dt,$ отримаємо

$$ds^2 = G(dt^2 + dv^2).$$

Криволінійні координати *(t, v)* називаються *ізометричними координатами.*

Важливе значення у сфероїдальній геодезії мають *нормальні перерізи.* Вони отримуються від перетину поверхні площиною, що проходить через нормаль поверхні. Такі площини, як було вже вище сказано, називаються нормальними.

В теорії поверхонь доводиться, що всі криві на поверхні, які проходять через задану точку в одному і тому ж напрямі (тобто які мають спільну дотичну) і які мають спільну стичну площину, мають в цій точці одинакову кривизну *K*. Відповідно, кривизна довільної кривої рівна, кривизні плоского перерізу, що є слідом перетину поверхні стичною площиною даної кривої.

Якщо позначити радіус кривизни кривої, у якої головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні через R_0, тоді радіус кривизни якої завгодно кривої на поверхні буде визначатися згідно формули:

$$R = R_0 \cos v, \tag{1.6}$$

де v – кут, утворений головною нормаллю кривої та нормаллю до поверхні. Формула (1.6) виражає відому теорему Меньє:

Радіус кривизни якої завгодно кривої на поверхні рівний радіусу кривизни нормального перерізу, що має з нею спільну дотичну, помноженому на косинус кута між нормаллю до поверхні та головною нормаллю кривої.

Величина $\frac{1}{R_0}$ називається ще *нормальною кривизною.* Для її визначення служить наступна формула:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + Gdv^2}. \tag{1.7}$$

Вираз, що знаходиться в чисельнику, називається *другою квадратичною формою поверхні.* Величини *D, D', D''* називаються коефіцієнтами другої квадратичної форми.

Через кожну точку поверхні можна провести цілу низку нормальних площин і таким чином отримати цілий ряд нормальних перерізів. Із нормальних перерізів суттєве значення мають два головних взаємно перпендикулярних перерізи: один з найбільшою кривизною $\frac{1}{R_2}$, і другий з найменшою – $\frac{1}{R_1}$. Кривизну будь-якого нормального перерізу можна виразити через кривизну головних перерізів за формулою Ейлера

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2 A}{R_1}+\frac{\sin^2 A}{R_2}, \qquad (1.8)$$

де A – азимут даного нормального перерізу.

Крім кривизни нормального перерізу, в сфероїдальній геодезії використовується Гауссова кривизна

$$K=\frac{1}{R_1 R_2},$$

а величина

$$R_c=\sqrt{R_1 R_2}\,. \qquad (1.9)$$

носить назву середнього радіуса, кривизни.

В нормального перерізу хоча б в одній точці головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні. Ця точка називається *геодезичною точкою.* В геодезичній точці нормального перерізу кут v рівний нулю. Відповідно, нормальна кривизна рівна кривині нормального перерізу в його геодезичній точці. Криву на поверхні, в якої всі точки геодезичні, тобто головна нормаль якої збігається з нормаллю до поверхні у всіх точках, називають *геодезичною лінією.* Геодезичні лінії на поверхні відіграють роль прямих на площині, тому багато положень диференціальної геометрії на площині можуть бути узагальнені для поверхонь з заміною прямих геодезичними.

3. Чисельні методи у сфероїдальній геодезії

Ще в недалекому минулому всі обчислення в області сфероїдальної геодезії виконувались з допомогою логарифмів, а пізніше з допомогою малопотужної обчислювальної техніки. При обчисленнях приходилось користуватися об'ємними таблицями тригонометричних функцій та багаточисельними таблицями різноманітних величин, що в основному залежали від широти.

В сучасних умовах, коли ми майже всі масові обчислення виконуються на ЕОМ, абсолютно відпала необхідність в складанні спеціальних таблиць для геодезичних обчислень. Достатньо мати лише обмежене число постійних величин, необхідних для розв'язку тієї чи іншої задачі. Прогрес обчислювальних методів з використанням сучасних програмних засобів дозволяє навіть обмежитись записом формул в самому загальному виді, іноді тільки у виді диференціальних рівнянь, а подальші перетворення віднести безпосередньо до процесу роботи на комп'ютері.

Характерним прикладом вибору обчислювальних методів на ЕОМ є застосування чисельних методів для розв'язку диференціальних рівнянь і обчислення еліптичних інтегралів. Такі методи були відомі давно, але на практиці не застосовувались, оскільки були досить трудомісткі і складні для ручних обчислень. Алгоритмів, якими користуються в сучасних чисельних методах дуже багато. Якщо їх реалізувати у вигляді достатньо універсальних програм, то вони можуть стати базовими і слугувати основою сучасних геодезичних технологій.

При розв'язку задач сфероїдальної геодезії приходиться мати справу з наступними обчислювальними задачами:

– апроксимація функцій (поліномінальна, дробово-раціональна);

– чисельне інтегрування (квадратурні формули Гаусса, Чебишева);
– чисельні методи розв'язку диференційних рівнянь з початковими умовами (методи Рунге-Кутта).

Апроксимація функцій (наближення) – це заміщення різноманітних функцій “близькими” до них більш зручними для використання функціями. До задач апроксимації функцій з параметрами, що входять лінійно, відносяться задачі апроксимації поліномами, а з параметрами, що входять нелінійно – дробово-раціональні апроксимації. Наближене представлення неперервної функції з допомогою полінома степені *n* можна отримати з допомогою ряду Тейлора та цілої низки його модифікацій, а одним із найбільш ефективних методів отримання необхідного числа дробово-раціональних наближень заданої функції є метод ланцюгових дробів.

Необхідно відмітити, що безпосереднє отримання коефіцієнтів цих функцій зв'язане з довгими алгебраїчними обчисленнями і на даний час такий шлях не є ефективним, оскільки простіше виконати обчислення із заданою функцією.

Наближене обчислення визначеного інтеграла можна проводити різними методами: Сімпсона, Гаусса, Чебишева, Ромберга тощо. Розглянемо коротко тільки деякі з них.

Для обчислення інтеграла

$$\int_b^a f(x)dx$$

методом Сімпсона інтервал інтегрування ділить на *n* рівних частин *(n* – парне число).

Для кожної вузлової точки *k* (*k* = 0, 1, 2, ..., n) з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ за аргументом $x_k = a + kh$ обчислюють значення підінтегральної функції $f(x_k)$. Після цього визначений інтеграл може бути обчислений за формулою

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + 4y_n). \qquad (1.10)$$

За Гаусом наближене обчислення визначеного інтеграла полягає в наступному. В проміжку між граничними значеннями аргументів $x = a$ *і* $x = b$ вибирають *n* вузлових точок за рівнянням

$$x_i = a + v_i(b-a), \quad i = 1,2,3,...,n,$$

де v_i – деяке постійне число менше одиниці, віднесене до відповідної вузлової точки. Для кожної вузлової точки за аргументом x_i обчислюють значення підінтегральної функції, яке потім домножують на деяке постійне число що відповідає цій точці.

Значення інтеграла можна обчислити за наступною формулою:

$$\int_b^a f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} R_i f(x_i), \qquad (1.11)$$

права частина якої тим ближча до точного значення інтегралу, чим більше використовується вузлових точок.

Значення величин v_i і R_t в залежності від кількості вузлових точок *n* наведені у таблиці.

n=1	v_1=0,5	R_1=1
n=2	v_1=1-v_2=0,21132487	R_1=R_2=0,5

n=3	v_1=1-v_3=0,1127016654 v_2=0,5	R_1=R_3=0,2777777778 R_3=0,4444444444
n=4	v_1=1-v_4=0,0694318442 v_2=1-v_3=0,3300094782	R_1=R_4=0,1739274226 R_2=R_3=0,3260725774
n=5	v_1=1-v_5=0,0469100770 v_2=1-v_4=0,2307653449 v_3=0,5	R_1=R_5=0,1184634425 R_2=R_4=0,2393143352 R_3=0,2844444444
n=6	v_1=1-v_6=0,0337652429 v_2=1-v_5=0,1693953068 v_3=1-v_4=0,3806904070	R_1=R_6=0,0856622462 R_2=R_5=0,1803807865 R_3=R_4=0,2339569673

Методи Рунге-Кутта належать до багатоточкових однокрокових методів чисельного інтегрування систем звичайних диференційних рівнянь. Суть методу Рунге-Кутта полягає в наступному. Нехай функція визначається диференційним рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

та початковими значеннями $y = y_0$ при $x = x_0$. Слід знайти чисельне значення функції y_n для заданого значення аргументу.

Для визначення y_n послідовно обчислюють значення функцій y_i для рівновіддалених проміжних значень $x_i = x_0 + h_i$ $(I=1,2,...n)$ причому за початкові приймають значення x_{i-1} і y_{n-1}, знайдені в попередньому обчислені. Приріст аргументу $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ є кроком інтегрування величина якого встановлюється в залежності від заданої точності визначення функції.

Функцію y_i обчислюють за формулою

$$y_i = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + 0(h^5), \tag{1.12}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0); \\ k_2 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}); \\ k_3 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}); \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3). \end{aligned} \tag{1.13}$$

При виведенні цих формул вихідним рівнянням послужив розклад функції y_i в ряд Тейлора за степенями h до четвертого порядку.

Для розв'язування системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

будується система рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$. Обчислення y_{ji} в кожній точці здійснюється за формулою

$$y_{ji} = y_{ji-1} + \frac{1}{6}(k_{j,1} + 2k_{j,2} + 2k_{j,3} + k_{j,4}), \tag{1.14}$$

де j – номер рівняння системи, i – номер точки інтегрування. Коефіцієнти k_{ji} визначаються за формулами, аналогічними (1.13).

Класичний метод Рунге-Кутта частково модифікувався для практичних застосувань (в основному для прискорення та спрощення процесу обчислень). Найбільш відомі модифікації Мерсона (1958) та Інгланда (1961). На даному рівні розвитку обчислювальних засобів особливого виграшу ці модифікації не дають, а отже класичний метод Рунге-Кутта залишається базовим методом чисельного інтегрування диференційних рівнянь першого порядку.