

# 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ З ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ

## **Тема 1.1: Роль та значення вищої геодезії. Фізичні і математичні моделі Землі.**

1. Вступ
2. Предмет та задачі вищої геодезії
3. Математичні та фізичні моделі Землі

### **1. Вступ**

Визначення параметрів земного еліпсоїда і форми земної поверхні становить велику наукову зацікавленість та має важливе значення для практичної і інженерної геодезії, для топографії і картографії, а також для багатьох суміжних наук: астрономії, геофізики, геодинаміки тощо.

Вивчення геометрії земного еліпсоїда та методів розв'язування задач на його поверхні складає вагомий частину змісту курсів “Основи вищої геодезії” та “Вища геодезія”. Ці питання, а також питання зображення поверхні еліпсоїда на площині відносяться до частини вищої геодезії, яка історично отримала назву “сфероїдна геодезія”.

Земний еліпсоїд, який є еліпсоїдом обертання з малим стисненням – сфероїдом, є математичною фігурою, що краще всього репрезентує загальну фігуру Землі. Тому поверхня еліпсоїда і служить поверхнею віднесення, на яку проектують (відносять) всі виміряні на фізичній поверхні Землі величини. Вона просто визначається точними математичними формулами і є зручною координатною поверхнею для розв'язування різноманітних геодезичних задач.

Математичні основи сфероїдної геодезії були закладені в першій половині XIX ст. в зв'язку з необхідністю опрацювання градусних вимірювань, тобто вимірювань, що мали за мету визначення розмірів та форми Землі. Імена Лежандра, Гаусса, Бесселя, Гельмерта і інших видатних математиків, астрономів і геодезистів неперервно пов'язані з розвитком сфероїдної геодезії.

При вивченні сфероїдної геодезії широко використовуються вища математика, в основному, сферична тригонометрія, диференційне і інтегральне числення, теорія рядів. Геометрію земного еліпсоїда можна розглядати як один із спеціальних розділів теорії поверхонь.

Вища геодезія, в тому числі її частини – сфероїдна геодезія та теоретична геодезія, є однією із основних дисциплін, що забезпечує необхідну теоретичну і практичну спеціальну підготовку фахівців геодезичного профілю.

### **2. Предмет та задачі вищої геодезії**

*Вища геодезія* вивчає фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі, методи створення систем геодезичних координат на всю поверхню Землі або на окремі її ділянки, а також способи визначення положення точок земної поверхні в тій чи іншій системі координат.

Фундаментальною *теоретично-практичною задачею* вищої геодезії є побудова земної системи геодезичних координат та єдиної моделі зовнішнього гравітаційного поля Землі. Розв'язання цієї задачі проводиться на основі теоретичних досліджень та математичної обробки результатів наземних астрономічних, геодезичних та гравіметричних вимірювань,

супутникових спостережень, світлолокації Місяця та великобазисних радіоінтерферометричних спостережень.

До недавнього часу основним методом побудови геодезичних мереж був метод триангуляції, який широко застосовувався в геодезичному виробництві, як в нашій країні так і за кордоном. Координати пунктів обчислювались від різних початків і були віднесені до різних відлікових поверхонь, які апроксимували Землю найкращим чином в межах незначних територій. З розвитком інтеграційних процесів, широким впровадженням сучасних систем зв'язку, розробкою глобальних міжнародних науково-практичних проектів роль геодезії і задачі, які вона повинна виконувати, поступово змінюються. Перш за все змінюється сам принцип створення геодезичних мереж. На зміну традиційним геодезичним вимірам, які полягали у вимірюванні горизонтальних напрямів та відстаней між пунктами мережі, прийшли сучасні методи: визначення місцеположення з допомогою спеціальних супутникових систем. При цьому значно зросла точність визначення координат, оперативність їх отримання, а також можливість визначення їх в глобальній (загальноземній) системі координат.

Даний курс обмежений колом питань, яке може бути назване “класичною вищою геодезією”, оскільки в ній фігура Землі та її гравітаційне поле, як об'єкти вивчення, розглядаються незалежними від часу, тобто зв'язана з Землею система координат з часом не змінюється. Це справедливо з досить високою точністю ( $10^{-6}$  і вище). Але на протязі останніх десяти років точність порядку  $10^{-7}$  і навіть  $10^{-8}$  стала реальністю. Це означає точність визначення абсолютного положення порядку декількох сантиметрів. На такому рівні точності геодинамічні (залежні від часу) ефекти мають вже помітний вплив на точність визначення земних систем координат. Вони можуть спричинятися глобальними еволюційними процесами в житті Землі і проявлятися у рухах земної кори, переміщенні літосферних плит, нерівномірності обертання, переміщенні полюсів та центра мас Землі тощо.

Методи побудови геодезичних мереж, способи точних вимірювань їх параметрів (наземні лінійно-кутові, супутникові виміри), а також методи обробки результатів цих вимірювань розглядають в курсах “Основні геодезичні роботи” та, частково, “Космічна геодезія”. Астрономічні визначення широт і довгот точок земної поверхні та азимутів напрямів вивчаються в курсі “Геодезична астрономія”. Вивченням земного поля сили ваги, методів вимірювання та обробки параметрів гравітаційного поля Землі, тобто, гравіметричними визначеннями займається “Гравіметрія”.

Встановлення залежностей між результатами астрономо-геодезичних, гравіметричних та супутникових вимірювань і величинами, що визначають фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі, складає одну із задач *теоретичної геодезії*, як складової вищої геодезії.

*Сфероїдальна або математична геодезія* є однією із найбільш важливих складових вищої геодезії.

В сфероїдальній геодезії вивчаються перш за все метода визначення взаємного положення точок, розташованих як на поверхні земного еліпсоїда так і над цією поверхнею – вихідною координатною поверхнею.

Відомо, що класичні геодезичні вимірювання проводяться на земній поверхні і зв'язані з прямовисними лініями (лініями виска), і відповідно з рівневою поверхнею.

*Рівневою поверхнею* називають поверхню, у всіх точках якої нормалі до неї збігаються з прямовисними лініями. *Прямовисна лінія* – це пряма, що збігається з напрямом дії сили ваги в даній точці.

Рівневих поверхонь можна побудувати нескінченну множину. Серед них виділяють одну, яка збігається з незбуреною припливами і хвилями водною поверхнею Світового океану. Якщо

цю поверхню продовжити під материками так, щоби вона всюди залишалась нормальною до напрямку прямовисних ліній, то отримаєм замкнуту поверхню, яка дістала назву – *поверхня геоїда*.

Поверхня геоїда не може бути представлена одним рівнянням в кінцевому виді, із-за чого для розв'язування основних задач вищої геодезії вибирають допоміжну поверхню, з одного боку, просту і достатньо добре вивчену в математичному плані і, з другого боку – близьку до поверхні геоїда. Ці умови добре задовольняє належно підібраний *еліпсоїд обертання*. Називають такий еліпсоїд *земним еліпсоїдом* або *земним сфероїдом*.

Отже, при розв'язуванні основних задач астрономо-геодезичної і картографічної практики земну поверхню заміняють поверхнею еліпсоїда обертання або сфероїда і однією із задач вищої геодезії є вивчення геометрії поверхні еліпсоїда обертання, що складає предмет сфероїдальної геодезії.

Безпосередні виміри, пов'язані з напрямками прямовисних ліній, приводяться (редукуються) на поверхню еліпсоїда. Щодо кутових вимірювань, то це означає, перш за все, введення поправок за відхилення прямовисних ліній. *Відхилення прямовисних ліній* – це кут між прямовисною лінією і нормаллю до поверхні земного еліпсоїда в даній точці.

Питання редукцій вимірювань, тісно пов'язані з задачею вивчення фігури Землі, встановлення розмірів земного еліпсоїда та його орієнтування відносно поверхні геоїда, розглядаються в теоретичній геодезії. При вивченні всіх питань сфероїдальної геодезії допускається, що результати геодезичних вимірювань вже приведені на поверхню еліпсоїда.

Розміри еліпсоїда характеризуються величинами його великої півосі і полярного стиснення, а положення його в тілі Землі переважно визначається складовими відхилення прямовисної лінії в площинах меридіана і першого вертикалу та висотою геоїда в якій-небудь одній точці, яка є проекцією відповідного пункту геодезичної мережі і приймається за вихідний пункт геодезичних вимірювань. При цьому напрям прямовисної лінії у вихідному пункті відносно основних координатних площин Землі (площини земного екватора та початкового меридіана) встановлюється шляхом астрономічних визначень його широти і довготи, а також азимута напрямку з даного пункту на який-небудь суміжний пункт. Шляхом виправлення астрономічної широти і довготи вихідного пункту та астрономічного азимута вибраного напрямку за відхиленням прямовисної лінії в тому ж пункті визначаються його геодезична широта і довгота та геодезичний азимут того ж напрямку, які разом з заданою висотою геоїда у вихідному пункті служать *вихідними геодезичними даними* для опрацювання геодезичних вимірювань на поверхні прийнятого еліпсоїда.

Методи визначення положення точок на поверхні еліпсоїда в системі поверхневих координат, точок фізичної поверхні Землі чи навколоземного простору в системі просторових координат складають основну частину предмету сфероїдальної геодезії.

При створенні топографічних карт, розв'язуванні багатьох практичних задач інженерного характеру суттєве спрощення робіт дає використання системи плоских прямокутних координат. Пошук картографічного зображення поверхні еліпсоїда на площину і встановлення системи плоских координат теж предмет досліджень сфероїдальної геодезії.

Отже, в сфероїдальній геодезії вивчають геометричні методи визначення взаємного положення точок земної поверхні та навколоземного простору, в яких за вихідну координатну поверхню прийнята поверхня земного еліпсоїда, а виміряні величини, що використовуються в цих методах, вільні від впливу відхилень прямовисних ліній. Методи вивчення фігури та зовнішнього гравітаційного поля Землі, параметри редукцій наземних астрономо-геодезичних вимірювань в єдину систему відліку – головні питання вивчення в теоретичній геодезії.

### 3. Математичні та фізичні моделі Землі

Встановлення геометричної фігури Землі, в принциповому плані, здавалось би не становить значної проблеми. Для цього достатньо за даними вимірювань визначити в певній системі координати точок земної поверхні та побудувати відповідну геометричну поверхню. Координати точок повинні бути певним чином, зв'язані з заданою системою ліній, які належать ординатній системі.

Класично, координати точок отримують із астрономо-геодезичних вимірювань. Як відомо, при цих вимірюваннях вісь геодезичного (чи астрономічного) приладу орієнтують відносно прямовисної лінії. Оскільки величина і напрям сили ваги в кожній точці пов'язані з обертанням Землі навколо своєї осі та розподілом мас в тілі Землі, що має досить складний характер, встановлення форми Землі стає неможливим без вивчення поля земного тяжіння, тобто гравітаційного поля Землі.

Проблема вивчення фігури Землі відноситься до числа найдавніших наукових проблем, поставлених людством ще на ранній стадії свого культурного розвитку. На протязі багатовікової історії вона була і до цих пір залишається однією із найважливіших наукових проблем природознавства і перш за все астрономії та геодезії. Вивчення виду та розмірів Землі, а також її положення і руху в світовому просторі в значному плані сприяли науковому світопізнанню.

Початком вивчення фігури Землі щодо її виду та розмірів було наукове обґрунтування погляду про її кулеподібність. Імена Піфагора, Арістотеля, Архімеда, Ератосфена та інших учених і філософів стародавньої Греції і Єгипта навечно залишились в пам'яті людства, як першопрохідців вчення про фігуру Землі. Вже перші практичні визначення розмірів Землі базувалися на принципіально правильному геометричному методі, розробленому стародавніми математиками та астрономами, що полягав у вимірюванні деякої дуги меридіана та визначенні відповідного їй кута в центрі земної кулі, тобто різниці широт кінцевих точок цієї дуги. За цими вимірюваннями визначалася довжина дуги меридіана в один градус або довжина всього кола земної кулі. Звідси виник принцип вимірювання довжини дуги градуса меридіана або принцип *градусного вимірювання*, на якому були засновані всі подальші методи дослідження фігури Землі щодо її виду та розмірів.

В перших і подальших визначеннях розмірів Землі найбільш слабким місцем досліджень було вимірювання лінійної довжини дуги меридіана. Тодішня техніка вимірювання дозволяла вимірювати тільки короткі дуги меридіана, що в свою чергу при навіть незначних похибках у визначенні відповідного цій дузі центрального кута викликало значну похибку в довжині градуса меридіана та величині, земного радіуса. З застосуванням методу триангуляції з'явилась принципова можливість визначати дуги меридіанів та паралелей будь-якої довжини з високою точністю.

Градусні вимірювання Пікара (1670 р.) остаточно закріпили перше правильне і науково обґрунтоване представлення про кулеподібність Землі. В той же час в областях фізики, механіки, астрономії нагромадились нові факти, які вимагали узагальнення. Наукове пояснення цих фактів привело до обґрунтування нового вчення про фігуру Землі.

Теоретично встановив сплюснутість фігури Землі в напрямі її полюсів Ньютон (1687 р.). Він, на основі закону всесвітнього тяжіння, прийшов до висновку, що фігура планети при не дуже швидкому обертанні повинна прийняти форму *сфероїда* або в простішому вираженні *еліпсоїда обертання* з незначним стисненням. Величина цього стиснення, за розрахунками Ньютона при умові, що Земля складається із однорідної ідеальної рідини, склала 1:230. Разом з тим він розглядав і зміну форми фігури планети в залежності від зміни її розмірів, густини

маси та швидкості обертання навколо своєї осі. Тим самим ним було вказано, що дослідження фігури Землі щодо її виду та розмірів є не тільки геометричною задачею, але пов'язано із вивченням її генезису, внутрішньої будови і умов обертання навколо своєї осі.

Цілий ряд геодезичних експедицій в різних широтах (1718, 1737, 1742 рр.), а також теоретичні дослідження французького математика Клеро (1743 р.) практично і теоретично підтвердили обґрунтованість ідеї про сфероїдальність Землі. Дослідження Клеро підтвердили, що фігура Землі зв'язана з її внутрішньою будовою і фізичним станом й маси. Він вказав на можливість визначення величини стиснення земного сфероїда, якщо задані розміри, швидкість обертання і внутрішня будова Землі. Клеро розширив доказ Ньютона про те, що фігурою рівноваги однорідної ідеальної рідини, що обертається, буде еліпсоїд обертання малого стиснення.

В своїх дослідженнях Клеро обґрунтував і загальний закон розподілу величин прискорення сили ваги на поверхні земного сфероїда. Він встановив зв'язок між стисненням земного сфероїда та розподілом сили ваги на його поверхні. Відповідні рівняння або теореми Клеро є теоретичною основою виводу стиснення фігури Землі за вимірюванням сили ваги на її поверхні.

На початку XIX ст. в багатьох країнах почали розвиватися астрономо-геодезичні роботи з метою складання точних карт. При виконанні цих робіт приймалась до уваги і задача визначення розмірів Землі в новій її постановці.

Необхідно відмітити, що постановка задачі виводу розмірів земного еліпсоїда перш за все вимагала встановлення відповідного поняття або представлення про фігуру Землі, оскільки її фізична поверхня, що складається із поверхні материків та океанів, має значні “неправильності”. Зрозуміло, що фізична поверхня Землі в межах материків з їх відносними підвищеннями та пониженнями не є поверхнею еліпсоїда обертання і не може бути виражена яким-небудь математичним рівнянням. Звідси виникла задача встановлення поняття і певного підбору математичної поверхні Землі.

Фізична поверхня Землі складається переважно із поверхні морів та океанів, зв'язаних між собою, що утворюють єдину водну масу – Світовий океан. Поверхня води Світового океану, як рідкої маси, що знаходиться тільки під дією сили земного тяжіння та відцентрової сили обертання Землі, є однією із рівневих поверхонь потенціалу сили ваги. Вона характеризується тією основною властивістю, що на ній потенціал прискорення сили ваги має повсюди одне і теж постійне значення, тобто в кожній її точці напрям нормалі до неї збігається з напрямом дії сили ваги або з прямовисною лінією. Якщо рівневу поверхню Світового океану продовжити під материками таким чином, щоб вона всюди перетинала напрям прямовисної лінії під прямим кутом, то тоді вийде деяка замкнута поверхня, яка і буде характеризувати математичну фігуру Землі.

Вказану основну властивість будь-якої рівневої поверхні можна виразити математичним рівнянням, представляючи відповідний її потенціал сили ваги функцією від координат її поточної точки та розподілу маси всередині Землі. В такому плані рівнева поверхня, що збігається з поверхнею Світового океану в стані рівноваги і відповідним чином продовжена під материками, є математичною поверхнею. Проте вид, або форма цієї поверхні залежить від розподілу сили ваги на ній або внутрішньої будови Землі.

В 1849 р. була опублікована робота відомого англійського математика Стокса, який вслід за Ньютоном і Клеро зробив значне узагальнення теорії про фігуру Землі. Зокрема, він поставив задачу знайти рівневу поверхню, що повністю охоплює маси, за відомим силовим полем і побудував формулу, що дає її розв'язок для випадку Землі малого стиснення, близької до еліпсоїда обертання.

Фізична поверхня Землі має дуже складну форму із-за сукупності різноманітних форм рельєфу і не може в цілому бути представлена точно якою небудь правильною математичною фігурою. В 1873 р. Лістінгом (J. Listing) було запропоновано вважати математичною фігурою Землі тіло, поверхня якого збігається із середнім рівнем води в морях та океанах і є рівневою. Така фігура дістала назву *геоїда*. В попередньому параграфі вже давалося поняття геоїда, як рівневої поверхні. Стандартизований термін геоїд – це фігура Землі, утворена рівневою поверхнею, що збігається з поверхнею Світового океану в стані цілковитого спокою та рівноваги, відповідно продовжена під материками (щоб напрями прямовисних ліній перетинали цю поверхню у всіх її точках під прямим кутом).

В приведеному вище понятті про геоїд є певна невизначеність, зв'язана з невизначеністю поняття про стан цілковитого спокою та рівноваги Світового океану. В дійсності Світовий океан знаходиться в стані безперервного руху, що постійно відхиляє його фізичну поверхню від деякої рівневої поверхні. Проте дані спостережень показують, що різниці середніх рівнів океанів і морів порівняно незначні (1-1,5 м) і при дослідженні фігури Землі щодо форми та розмірів невизначеність середнього рівня Світового океану не має особливого значення.

Отже, фігура геоїда є свого роду узагальненою або згладженою фігурою дійсної Землі. Форму фігури геоїда можна визначити за результатами вимірювання сили ваги. Іншими даними для дослідження фігури геоїда є астрономічні спостереження, що дають напрям дії сили ваги або прямовисної лінії в точках спостереження, та геодезичні вимірювання, що визначають взаємне положення цих точок в деякій системі координат. Ці вимірювання, що називаються ще градусними вимірюваннями, а також сучасні методи визначення місцеположення за допомогою супутникових систем дозволяють вирішувати задачу дослідження фігури геоїда.

Вивчення фігури геоїда щодо його виду та розмірів полягає у співставленні його з відомою фігурою порівняння. В цьому плані задачу вивчення фігури геоїда можна розділити на дві частини, котрі між собою тісно пов'язані і котрі тим не менше допустимо розглядати і розв'язувати окремо. В першу частину цієї задачі входить визначення виду і розмірів тієї фігури порівняння – аналітичної поверхні, яка правильно представляє загальну фігуру Землі в цілому, друга частина її полягає у визначенні залишкових відступів геоїда від вказаної фігури порівняння. Визначенням аналітичної поверхні за даними супутникових, астрономо-геодезичних і гравіметричних спостережень займається вища геодезія, а визначенням відхилень геоїда від знайденої поверхні – гравіметрія.

Можливість визначення відхилень геоїда від вибраної фігури порівняння починається з теоретичних робіт Стокса. Пізніше цілий ряд вчених розвинули теорію Стокса. Однією з основних передумов дослідження фігури геоїда та визначення елементів, що характеризують її земний еліпсоїд є необхідність проводити градусні вимірювання і вимірювання сили ваги безпосередньо на поверхні геоїда. Оскільки в дійсності ці вимірювання в межах суші проводяться на фізичній поверхні Землі, то звідси випливає задача приведення їх результатів до поверхні геоїда. Цю задачу називають ще редуційною. Детально ці питання розглядаються в курсі фізичної геодезії. Відмітимо лише, що для розв'язування цієї задачі в строгій постановці необхідно знати розподіл сили ваги або розподіл густин всередині маси Землі (вище поверхні геоїда) тобто аналітичне продовження аномалій сили ваги від фізичної поверхні до поверхні геоїда. В загальному випадку густина мас над геоїдом є апіорі невідомою тому і виникають значні труднощі точного приведення результатів вимірювань до поверхні геоїда, а також труднощі дослідження фігури геоїда за цими вимірюваннями.

Альтернативне поняття фігури Землі у виді фізичної поверхні було введено Брунсом (1878 р.), але тільки Молоденським (1945 р.) розвинута теорія визначення безпосередньо

фізичної поверхні Землі. Він показав, що фігура Землі щодо її виду та розмірів може бути визначена на основі тільки тих даних, які отримують із вимірювань на її фізичній поверхні.

Вивчення фігури фізичної поверхні Землі також пов'язано з її узагальненням або згладжуванням шляхом виділення із неї відповідної “неправильної” або топографічної частини. Для цього Молоденський запропонував деяку допоміжну поверхню, дуже близьку до поверхні геоїда і названу ним *квасігеоїдом*. Визначення фігури квазігеоїда щодо її виду та розмірів за результатами вимірювань на фізичній поверхні Землі також базується на порівнянні її з відомою аналітичною поверхнею – земним еліпсоїдом.

При виводі розмірів земного еліпсоїда практично можна не рахуватися з різницею між геоїдом та квазігеоїдом, оскільки вона (1-2 м) не може мати великого значення при сучасній точності досліджень.

Отже, існують в основному три різні можливі поняття “фігура Землі”:

а) фізична або дійсна Земля – тверда і рідка частини Землі. Вона є надзвичайно нерегулярною навіть після деякого згладження. Згладжена поверхня піддається математичному опису після деякого усереднення в часі (геодинамічні ефекти);

б) геоїд чи квазігеоїд;

в) нормальна Земля або модель Землі. Найбільш простою математичною моделлю є еліпсоїд обертання – двоосний еліпсоїд; його інтенсивно використовують в практиці. В теоретичних дослідженнях застосовують також трьохосний еліпсоїд.

Фізичною моделлю Землі є гідростатична фігура рівноваги. Вона близька до еліпсоїдів, але не точно збігається з ними. Фізична модель Землі базуються на моделі внутрішньої будови і має застосування перш за все в геофізиці, хоча на сучасному етапі розвитку геодезії вона все більше виходить на передній план. На даний час найбільш широко використовуються моделі PREM (Preliminary Reference Earth Model). В вищій геодезії практично не роблять різниці між фігурою фізичною і поверхнею, що обмежує цю фігуру. Головна умова для Нормальної Землі або фігури порівняння – вона повинна найкращим чином представляти фігуру Землі як в геометричному плані так і в гравітаційному.

Приведемо ще декілька понять, що використовуються у вищій геодезії і, особливо, у сфероїдальній геодезії.

Геоїд за формою близький до сфероїда (тіло обертання близьке до кулі) з малим полярним стисненням і, зокрема, до найпростішого із сфероїдів – еліпсоїда обертання.

*Земний сфероїд* – це фігура, яку б прийняла Земля як пружно-в'язка планетарна маса, що знаходиться в стані гідростатичної рівноваги і під впливом тільки сил взаємного тяжіння її частинок і відцентрової сили її обертання навколо незмінної осі.

*Земний еліпсоїд* – це еліпсоїд, що характеризує фігуру та розміри Землі.

Еліпсоїд, що найбільш близько підходить до фігури Землі в цілому і центр якого збігається з центром мас Землі, називається *загальним земним еліпсоїдом*, а еліпсоїд, що найбільш близько підходить до поверхні геоїда на певній території (в межах держави, регіону чи континенту) і центр якого хоч і близько підходить, але не збігається з центром мас Землі називається *референц-еліпсоїдом*.

Отже, референц-еліпсоїд – це земний еліпсоїд, вісь якого паралельна **осі** загальноземного еліпсоїда, який найкращим чином характеризує частину земної поверхні, взятий для опрацювання геодезичних вимірів та встановлення системи геодезичних координат.