но моделі істотно можливі її адаптація в широкому спектрі збурюючих впливів, а також вивчення поведінки моделі в змінних умовах, близьких до реального. Важливими є питання усталеності моделі до різноманітних збурюючих впливів, а також пов'язані з існуванням моделі, наприклад питання живучості, надійності.

5. *Універсальність* математичних моделей (наприклад процесів теплопередавання). Однакову структуру мають моделі, що описують коливальні процеси в нелінійних механічних і електронних резонансних системах.

4.2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ СИСТЕМ І МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ

4.2.1. Постановка задач оптимізації проектування

Однією з найважливіших та суттєвих задач при оптимізації мереж зв'язку є визначення основних показників системи, які характеризують її якість. Їх можна назвати ***зовнішніми або вихідними параметрами системи***. Позначимо ці параметри як a_1, a_2, ..., a_n. До них належать, наприклад середньоквадратична помилка ξ, достовірність повідомлень, затримка переданої інформації, ймовірність помилки $P_{пом}$ при передаванні дискретних повідомлень, середній час безвідмовної роботи $\Delta t_{сер}$, вартість C та ін. За умовами задачі проектування значення деяких з параметрів a_1 , a_2, ..., a_n мають бути фіксованими, а інші можуть у процесі проектування змінюватися в певних межах (варіювати). Нехай зовнішніми варійованими параметрами є a_1, ..., a_i, ..., $a_{n'}$ (де $n' \le n$).

Розглянемо вплив на якість системи монотонного збільшення одного з цих параметрів, наприклад a_i, за інших рівних умов, тобто незмінних умов роботи системи і незмінних значень всіх інших параметрів системи. Очевидно, при цьому можливий лише один з випадків, коли із зростанням якість системи:

поліпшується;

погіршується;

не змінюється;

змінюється немонотонно (тобто спочатку погіршується, а потім поліпшується або, навпаки, спочатку поліпшується, а потім погіршується).

На даному етапі проектування не вдається за тих або інших причин установити характер залежності якості системи від значень параметра a_i.

Очевидно, у третьому випадку параметр a_i не впливає на якість системи і може при проектуванні взагалі не враховуватися. Надалі, якщо при монотонному збільшенні параметр a_i набуває значення першого або другого випадку, цей параметр називається ***показником якості системи*** і позначається k_i. У всіх інших випадках a_i не належить до класу показників якості і називається просто ***варійованим параметром системи***.

Таким чином, показником якості k_i (i = 1, 2, ..., m) системи є така числова характеристика системи, яка пов'язана з її якістю строгою монотонною залежністю — чим більше (чим менше) величина k_i, тим краща система при інших рівних умовах.

Взагалі, навіть не аналізуючи дії системи, можна сказати, які зовнішні змінні параметри можуть при заданих вихідних даних розглядатися як показники якості (наприклад імовірність помилки, затримка, пропускна здатність, надійність і вартість). Навпаки, кількість транзитних вузлів, кількість абонентів у мережі тощо не належать до показників якості.

При вирішенні питання про те, чи даний показник a_i може бути показником якості, враховується вплив цього показника на якість системи за інших рівних умов, зокрема, при зберіганні всіх інших показників системи.

Навіть відносно такого показника, як вартість C, не можна було б стверджувати, що «чим менше вартість, тим краща система», тому що при зменшенні вартості можуть погіршуватися такі найважливіші показники якості, як імовірність помилки, затримка та ін. Але при цьому виникає питання — у чому зміст визначених, зазначеним вище способом, показників якості k_1, ..., k_m із сукупності $\{a_1, \ldots a_n\}$ зовнішніх параметрів системи, якщо врахувати, що часто прагнення поліпшити в процесі проектування один із показників k_i призводить до зміни одного або більше інших показників, і, отже, «інші рівні умови» не мають місця. Проте, як буде показано далі, введення показників якості k_1, ..., k_m дає можливість у процесі проектування виключити безумовно гірші варіанти побудови системи, завдяки чому можна не тільки уникнути прийняття безумовно гіршого розв'язку, але і часто полегшити і прискорити знаходження оптимального (кращого) розв'язку.

З урахуванням вищевикладеного сукупність $D = \{D_1, \ldots, D_l\}$ усіх вихідних даних можна поділити на підгрупи:

сукупність $Y = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$ умов;

сукупність $O_s = \{O_{s1}, \ldots, O_{sq}\}$ обмежень на структуру і параметри проектованої мережі;

склад сукупності (вектори) $K = < k_1, \ldots, k_m >$ показників якості системи;

сукупність $O_k = \{O_{k1}, \ldots, O_{kr}\}$ обмежень, які накладаються на показники якості.

Сукупність O_s містить обмеження, що накладаються на структуру і параметри $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_u$ системи. Ці обмеження можуть бути типу рівностей ($x_i = x_{i0}$), нерівностей $x_i \le x_{iм}$ або $x_{i\min} \le x_i \le x_{iм}$, дискретності ($x_i = 1, 2, 3 ...$), зв'язку [$\Phi_j(x_1, ..., x_n) = 0$ або $\Phi_j(x_1, ..., x_n) = 0$], та іншого характеру, наприклад, «мережа не повинна містити транзитних вузлів визначеного типу».

До умов Y роботи системи належать різні характеристики мережі або системи зв'язку.

Вектор $K = < k_1 , ..., k_m >$ містить сукупність показників якості системи, які враховуються в процесі синтезу. При визначенні вихідних даних відомо лише склад цієї сукупності, тобто вказується, що варто розуміти під k_1, під k_2 і т. д.; чисельні ж значення складових $k_1, k_2, ..., k_m$ (вектори K) залежать від структури і параметрів системи і у процесі синтезу варіюються. Надалі символ C_k буде означати, що мова йде не про величину складового вектора K', а лише про склад цього вектора.

Обмеження O_k, що накладаються на величини показників якості $k_1, ..., k_m$, можуть бути типу рівності ($k_i = k_{i0}$), нерівності ($k_i \le k_{iм}$, $k_i > 0$) і зв'язку (наприклад $\Phi_j(k_1, ..., k_m) \le 0$).

Зазначимо, що розподіл вихідних даних на умови Y, обмеження O_s і показники якості $k_1, ..., k_m$ є умовним, так як залежно від постановки задачі проектування ту саму числову характеристику можна розглядати або як показник якості, або як умову, або як обмеження. Наприклад, кількість керуючої інформації $I_{кер}$, необхідну системі керування для забезпечення заданої точності параметрів керованої мережі, можна розглядати, з одного боку, як показник якості, а з іншої — як умову роботи системи керування. Ряд показників якості (наприклад імовірність помилки, затримка переданої інформації, надійність) у процесі проектування часто доводиться переводити в розряд обмежень (типу рівностей або нерівностей). Проте, незважаючи на деяку умовність розподілу вихідних даних на умови, обмеження і показники якості, такий розподіл взагалі є корисним.

Система (варіант побудови системи) S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s\}$ вихідних даних, називається ***допустимою***. При цьому може існувати не одна допустима система, а деяка множина допустимих $M_д$ систем. Допустима система, що задовольняє сукупності обмежень O_k, називається ***строго допустимою***. Інакше кажучи, строго допустимою називається система, що задовольняє усій сукупності $D = \{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних. Може існувати не одна, а деяка множина $M_{сд}$ строго допустимих систем. З усіх строго допустимих систем оптимальною (найкращою) вважається та система $S_{опт}$, що має найкраще (серед заздалегідь установлених) значення вектора K показників якості. Отже, для вибору оптимальної системи попередньо обирають (обґрунтовують) критерій переваги (критерій оптимальності), і, як правило, за ним одне значення вектора K вважають кращим (або гіршим) за інше його значення.

Нещодавно при проектуванні не прагнули до пошуку обов'язково оптимальної системи: задача проектування вважалася успішно вирішеною, якщо вдавалося знайти (спроектувати) будь-яку строго допустиму систему. Проте в останні роки стає усе більш актуальною задача створення не тільки строго допустимих, але й оптимальних систем. Це пояснюється тим, що з кожним роком зростають вимоги до телекомунікаційних мереж. Тому вважається суттєвим не просто задовольнити вихідним вимогам O_k, що пред'являються до показників якості системи, але і поліпшити ці показники.

Часто пошук оптимальної системи називається (коротко) ***синтезом системи.***

З викладеного випливає, що задачу синтезу можна сформулювати так: знайти таку систему S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних і має при цьому значення $K = < k_1, ..., k_m >$ показників якості, найкраще як заздалегідь обраний критерій переваги (критерій оптимальності системи).

Комбінований процес сполучення математичних і евристичних методів назвемо ***інженерним синтезом.***

Синтез складних систем, як правило, має бути векторним.

Векторним називається синтез з урахуванням декількох показників якості, тобто за зазначенням вектора $K = <k_1, ..., k_m>$ показників якості. Відзначимо, що векторний синтез називають *векторною оптимізацією, оптимізацією за векторним критерієм або багатокритеріальною оптимізацією.* На відміну від цього, синтез, що провадиться за єдиним показником якості ($m = 1$), називається ***скалярним.***

Глобальним є синтез з урахуванням усіх суттєвих показників якості, включаючи економічні і конструктивні. Якщо при синтезі враховуються не всі суттєві показники якості, то він називається частковим. У тому, що інженерний синтез має бути векторним і глобальним, неважко переконатися з наступних міркувань. Інженерний синтез завершається розробкою системи, оптимальної з погляду її практичного застосування. Отже, у процесі цього синтезу враховують усі суттєві для нього показники якості. Якщо не врахований хоча б один із суттєвих для практичного застосування показників якості, система не може вважатися оптимальною.

Звідси випливає, що інженерний синтез завжди має бути глобальним. При інженерному синтезі не може бути такої ситуації, щоб суттєвим був тільки один показник якості: завжди буде щонайменше два суттєвих показники — вартість C та показник, що характеризує основний ефект, що досягається при застосуванні системи (ефективність системи). На практиці кількість суттєвих показників якості більше двох. Звідси випливає, що глобальний синтез, а отже й інженерний синтез, завжди є векторним.

При математичному синтезі на відміну від інженерного для того, щоб зробити чисто математичне розв'язання задачі можливим або спростити його, іноді відмовляються від урахування деяких суттєвих показників, наприклад, не враховують (кількісно) економічні і конструктивні показники. Тому математичний синтез може бути як глобальним, так і частковим.

Синтез телекомунікаційної мережі, системи зв'язку або пристроїв звичайно містить розв'язання таких основних задач:

синтез оптимальної структури мережі (системи);

вибір оптимальних значень параметрів мережі або системи, наприклад, затримки переданої інформації, достовірності, мінімальної кількості керуючої інформації в системі керування, що забезпечує задану точність параметрів керованої мережі, та інше, або ***оптимізацію параметрів***;

вибір оптимального варіанта побудови мережі (системи) із скінченної кількості N цілком визначених варіантів S_1 , S_2, ... , S_N, або дискретний вибір мережі (системи).

Таким чином, синтез телекомунікаційної мережі (системи і пристрою) звичайно складається з синтезу структури, оптимізації параметрів і дискретного вибору мережі (системи).

4.2.2. Задача векторного синтезу

Задача векторного синтезу формулюється так: знайти таку систему S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних і має при цьому значення вектора $K' = < k_1 ..., k_i ,...,k_m >$ показників якості, найкраще як обраний критерій преваги. При цьому під показником якості k_i $(i = 1, 2, ..., m)$ розуміємо числову характеристику системи, пов'язану з її якістю монотонної залежності: чим більше (менше) величина K_i, тим краще система за інших рівних умов, тобто при незмінних $\{Y, O_s, C_{k'}, O_k\}$ і незмінних значеннях інших $(m - 1)$ показників якості. Для зручності порівняння значень вектора K, що відповідають різним варіантам побудови системи, зручно попередньо привести всі показники якості k_1, ..., k_i, ...,k_m до стандартного виду. Показник якості k_i вважається стандартним (або поданим у стандартному вигляді), якщо він задовольняє умові:

$$k_i \geq 0 \, (i = 1, ..., m), \tag{4.1}$$

і чим менше (а не більше) величина k_i, тим краще система (при сформульованих вище інших рівних умовах). З (4.1) випливає, зокрема, що ідеальною відносно показника якості k_i системою є така система, у якої $k_i = 0$.

Якщо деякий показник якості K_i' не є стандартним, то його завжди можна привести до стандартного вигляду K_i. Дійсно, нехай, наприклад, невід'ємний показник якості K_i' такий, що може змінюватися в межах

$$k_{i\,\min}' \le k_i' \le k_{i\,\max}', \tag{4.2}$$

і чим більше величина k_i', тим краща система. Тоді як еквівалентний йому стандартний показник якості можна вибрати величину

$$k_i = k_{i\,\max}' - k_i'. \tag{4.3}$$

Якщо $K_i' \to \infty$, то замість (4.3)

$$k_i = 1/k_i'. \tag{4.4}$$

Нарешті, якщо невід'ємний показник k_i задовольняє умові (4.2) (при цьому він менший, тим краща система), тоді

$$k_i = k_i' - k_{i\,\min}'. \tag{4.5}$$

Коли $k_{i\,\min}' = 0$, одержуємо $k_i = k_i'$, тобто вихідний показник якості k_i' є стандартним і, отже, перетворювати його не потрібно.

Очевидно, такі найбільш поширені показники, як затримка, ймовірність помилки, відношення сигнал/шум, середній квадрат помилки тощо, мають стандартний вигляд і перетворень не потребують. Якщо показником якості k_i' є ймовірність $P_{\text{п}}$ деякої події і чим більше ця ймовірність (наприклад імовірність ураження цілі), тим краща система. Тоді, як випливає з (4.3),

$$k_i = 1 - P_{\text{п}} = P_{\text{пп}}, \tag{4.6}$$

де $P_{\text{пп}}$ — імовірність протилежної події (наприклад, імовірність непошкодження цілі).

Заміна нестандартних показників якості відповідними їм стандартними показниками не призводить до зміни результатів синтезу, але спрощує одержання цих результатів.

Основне спрощення полягає в тому, що в m-мірному просторі показників якості $k_1, k_2, ..., k_m$ кожній сукупності $<k_1, k_2, ..., k_m>$ показників якості відповідає деякий m-мірний вектор $K = <k_1, k_2, ..., k_m>$, проведений із початку координат. При цьому цілком ідеальній системі, тобто системі, кращій відносно всіх показників якості $k_1, k_2, ..., k_m$, відповідає нульове значення у векторі K, тобто точка, що збігається з початком координат.

Очевидно, що жодна реальна система не може мати нульовий вектор K, тому що не існує системи, ідеальної в усіх відношеннях. У кращому випадку можуть існувати системи, ідеальні лише в деяких відношеннях, тобто нульові значення мають лише деяких із m показників якості. Тому, якщо за математичним синтезом одержимо

$$K = 0, \tag{4.7}$$

то це свідчитиме про некоректну постановку задачі синтезу надмірної ідеалізації задачі (зневагу дуже суттєвими обмеженнями). Звідси випливає: при коректній постановці задачі векторного синтезу множина $M_Д$ допустимих систем (рішень) не включає початок координат.

4.2.3. Особливості постановки задачі при дискретному виборі системи

При дискретному виборі сукупність строго допустимих систем відображає у просторі R^m показників якості задане дискретною множиною $M_{сд}$ точок (систем), і задача синтезу полягає у виборі такої точки цієї множини, яка має найкраще значення вектора K.

При оптимізації параметрів варіюється сукупність (вектор) $X = < x_1, ..., x_n >$ параметрів системи S і потрібно вибрати таке значення x цієї сукупності, при якому вектор $K = <k_1, ..., k_m>$ має найкраще (стосовно обраного критерію переваги) значення. У загальному випадку кожний із показників якості $k_1, ..., k_m$ може залежати від усіх n параметрів:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ k_m = F_{1m}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\}. \tag{4.8}$$

Ці залежності називають *цільовими функціями.*

У силу накладених обмежень O_s параметри $x_1, ..., x_n$ мають задовольняти деяким обмеженням типу рівностей, нерівностей і дискретності. При цьому обмеження типу рівностей або нерівностей накладаються не тільки на значення кожного з параметрів окремо, але і на зв'язки між ними. Наприклад, обмеження можуть мати вигляд:

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = a(j = \overline{1, p}), \tag{4.9}$$

$$f_j(x_n, \ldots, x_n) = a_j(j = p+1,\ p+2, \ldots). \tag{4.10}$$

Очевидно, ці співвідношення можуть бути записані також у вигляді:

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1,\ p), \tag{4.11}$$

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) \le 0\ (j = p+1, \ldots, q), \tag{4.12}$$

де $\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1, \ldots, x_n) - a_j$.

Функції $\Phi_j(x_1, \ldots, x_n)$ називаються звичайно *функціями зв'язку* або *функціями обмежень.*

Крім того, мають бути задані обмеження на показники якості $k_1, ..., k_m$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\le k_{1\text{м}}, \\ &\dots \\ k_m &\le k_{m\text{м}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Задача оптимізації параметрів складається з двох основних етапів.

На першому (попередньому) етапі, виходячи із сукупності $\{Y, O_s, C_k\}$ вихідних даних, знаходять вигляд цільових функцій і функцій зв'язку.

При цьому, очевидно, необхідно мати вихідні дані про структуру системи, яку можна розглядати як частину умов Y або обмежень O_s.

На другому (основному) етапі оптимізують параметри системи, тобто відшукують таке значення $\hat{x} = < \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n >$ сукупності параметрів системи, що задовольняють обмеженням (4.11), (4.12) та (4.13), забезпечуючи найкраще значення вектора $K = < k_1, \dots, k_m >$.

Відзначимо, що істотною є та обставина, що при оптимізації параметрів у математичному відношенні задача зводиться до дослідження поведінки цільових функцій (4.8), тобто функцій скінченної кількості змінних $x_1, \dots, x_n$ при урахуванні обмежень, що накладаються на ці змінні.

Розглянемо формулювання задачі оптимізації параметрів у m-мірному просторі R^m показників якості. Зі співвідношень (4.7) і (4.8) випливає, що при оптимізації параметрів, крім простору R^m показників якості $k_1, \dots, k_m$ можна розглядати також простір R^n варійованих параметрів $x_1, \dots, x_n$, простір R^q обмежень.

Оптимізацію параметрів для кожного варіанта S побудови системи, або кожну систему S (повністю) визначимо сукупністю $x = < x_1, \dots, x_n >$ значень своїх параметрів, тобто

$$S = S(x) = S(x_1, \dots, x_n). \tag{4.14}$$

У свою чергу кожній системі S відповідає визначене значення вектора $K = < k_1, \dots, k_n >$ показників якості.

Будемо вважати, що залежність між S і K взаємооднозначна, і позначимо її

$$K = K(S). \tag{4.15}$$

Тоді в просторі R^m показників якості кожній системі S відповідатиме одна, і тільки одна точка $A(S)$, у якій вектор показників якості $R(S)$, і навпаки, кожному значенню вектора $K(S)$, тобто кожній точці $A(S)$, буде відповідати одна, і тільки одна система S. Оскільки на можливі значення вектора параметрів $x = < x_1, x_2, \dots, x_n >$, а отже, і на можливі (допустимі) системи S накладені обмеження (наприклад вигляду (4.8)), тоді припустимі значення вектора K в просторі R^m обмежені деякою m-мірною областю $M_д$. Вигляд цієї області залежить як від обмежень (4.8), так і від вигляду цільових функцій (4.7), тобто визначається сукупністю $\{Y, O_s, C_k\}$ вихідних даних, прийнятих при формулюванні задачі синтезу.

Якщо показники якості задовольняють визначеним обмеженням (ці обмеження визначаються при рішенні кожної конкретної задачі), то з області $M_д$ має бути виділена строго допустима область $M_{сд}$, що задовольняє цим обмеженням. При дискретному синтезі сукупності строго припустимих систем відповідає в просторі R^m скінченна множина точок. На відміну від цього при оптимізації параметрів множина відповідних точок у просторі R^m (у невиродженому випадку) нескінченна і має потужність континуум (неперервної множини). При цьому задача оптимізації параметрів складається у виборі такої точки (системи) із множини $M_{сд}$, якій відповідає найкраще (стосовно обраного критерію переваги) значення вектора K.

Розглянемо особливості постановки задачі оптимізації при синтезі структури. З технічної точки зору синтез структури відрізняється від оптимізації параметрів тим, що в процесі синтезу структура системи варіюється настільки істотно, що ці варіації не можна звести до зміни скінченної кількості параметрів системи. Більш строго, з математичної точки зору, синтез структури відрізняється від оптимізації параметрів тим, що в процесі оптимізації варіюється не сукупність $< x_1, ..., x_n >$ деяких чисел (параметрів), а оператор системи. При цьому залежності показників якості $k_1, ..., k_m$ від варіантів побудови системи вже не можна описати цільовими функціоналами. Вигляд цих функціоналів дуже складний. Обмеження, що накладаються при синтезі структури, також можуть мати більш складний характер, чим при оптимізації параметрів, тому що ці обмеження накладаються не тільки на значення деяких чисел $x_1, ..., x_n$ або зв'язків між ними, але і на вигляд функціональних залежностей або зв'язків між цими залежностями.

У просторі R^m показників якості задача синтезу структури зводиться, як і при оптимізації параметрів, до наступного. При заданій сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних сукупність усіх строго припустимих точок (систем) утворить деяку область $M_{сд}$. Кожній точці A цієї області відповідають цілком визначені системи S і показник якості $K(S)$. Тому синтез структури зводиться до вибору з усіх точок області $M_{сд}$ такої точки, у якій вектор K має найкраще (відносно обраного критерію переваги) значення. Відмінність синтезу структури від оптимізації параметрів полягає в тому, що вигляд області $M_{сд}$ тепер визначається не сукупністю цільових функцій (4.7) і обмежень (4.8), а більш складними співвідношеннями (цільовими функціоналами, обмеженнями інтегрального вигляду тощо). Таким чином, можна сформулювати загальні риси й особливості дискретного вибору системи, синтезу структури й оптимізації параметрів. В усіх цих випадках строго припустимим системам (варіантам побудови системи) у просторі

R^m показників якості відповідає деяка множина $M_{сд}$ точок. При цьому задача зводиться до вибору такої із цих точок, якій відповідає найкраще (відносно обраного критерію пропозиції) значення вектора K. Для цього узагальнення між трьома основними видами синтезу (оптимізації), можна сформулювати ряд загальних положень, правдивих для всіх цих видів. Варто лише пам'ятати про різний зміст поняття «*система S*». При дискретному виборі можливо лише скінченна кількість цілком визначених варіантів $S_1, ..., S_N$ побудови системи S.

При оптимізації параметрів кожний варіант побудови системи S (кожна система S) цілком визначається скінченною кількістю n параметрів $x_1, ..., x_n$, тобто $S = S(x_1, ..., x_n)$. При синтезі структури варіанти побудови системи S можуть відрізнятися не тільки чисельними значеннями скінченної кількості параметрів, але і можуть мати більш принципові розходження. Проте й при синтезі структури, якщо які-небудь два варіанти S_1 і S_2 побудови системи (дві системи) відрізняються тільки значеннями своїх параметрів або навіть значенням тільки одного з параметрів, ці варіанти (системи) вважаються різними (незбіжними). Це зумовлено тим, що задача синтезу структури полягає не тільки в тому, щоб визначити принцип побудови системи, але і щоб для знайденого принципу встановити (вибрати) цілком визначені чисельні значення всіх параметрів системи. Тому при синтезі структури знижується вибір варіанта побудови системи, включаючи вибір значень усіх параметрів системи.

4.3. МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

4.3.1. Способи пошуку екстремуму

Відомо, що екстремумом функції $y = f(x)$ називаються такі її значення $f(x_e)$, для яких мають місце такі нерівності:

$f(x + h) < f(x_e)$ — для випадку максимуму;

$f(x_e + h) < f(x_e)$ — для випадку мінімуму

при будь-яких малих значеннях h, позитивних і негативних.

Для неперервної функції екстремум має місце тільки в тих точках, у яких похідна або дорівнює нулю, або не існує (зокрема, прямує до нескінченності), або змінює знак. Відповідно до цього перевірка деякої області завдання функції на екстремум може засновуватися або на визначенні екстремуму, або на умові існування екстремуму. Очевидно, що для визначення екстремального значення функції необхідно перевірити або збільшення функції при позитивних і негативних h,