Розділ 4. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ І МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ

Список скорочень

ЗП — запам'ятовуючий пристрій (пристрій пам'яті)
ЕОМ — електронно-обчислювальна машина

4.1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ ОБ'ЄКТІВ ЗВ'ЯЗКУ

4.1.1. Загальна характеристика процесу проектування

Необхідною умовою успішних розробок складних технічних систем будь-якого призначення є розвиток і широке впровадження методів їх проектування з застосуванням ЕОМ.

Під автоматизованим проектуванням потрібно розуміти застосування ЕОМ у розробках складних систем з використанням моделей об'єктів, незалежно від фізичних явищ, які закладені в основу їх дії.

Проектування пов'язане з інженерною діяльністю, спрямованою на створення нових об'єктів, методів, теорій. Проте це не тільки створення ідеї побудови об'єкта, але й обґрунтування способу його реалізації, розробка моделі об'єкта з урахуванням наслідків, до яких призведе його створення, використання або зняття з виробництва.

Проектування як один із видів інженерної ***діяльності*** має такі специфічні особливості:

продуктом проектування є модель ***об'єкта, реально*** ще не існуючого в період проектування;

процедури проектування реального об'єкта зображуються як процедури перетворення його вихідного описування в деякому скінченному просторі;

проектований об'єкт входить в упорядковану ієрархію об'єктів і виступає, з одного боку, як частина системи більш високого рівня, а з іншого — як система для об'єктів більш низького рівня; у зв'язку з цим процес проектування складається з двох етапів: ***зовнішнього*** (об'єкт — частина системи більш високого рангу) і ***внутрішнього*** (об'єкт — сукупність компонентів);

проектування, як правило, носить ітераційний багатоваріантний характер.

Процес проектування реалізується відповідно до плану, який подається у вигляді ***логічної схеми*** (логічного графа) ***побудови проекту***. Така схема відображає черговість виконання основних проектних процедур і операцій. ***Проектна процедура*** відповідає формалізованій сукупності дій, внаслідок виконання яких приймається деяке проектне рішення. При цьому під ***проектним рішенням*** розуміється проміжне або остаточне описування об'єкта проектування, необхідне і достатнє для розгляду і визначення подальшого напрямку проектування або його закінчення. Проектна процедура складається з елементарних проектних операцій, має твердо встановлений порядок їх виконання і спрямована на досягнення локальної мети в процесі проектування. ***Проектна операція*** — це умовно виділена частина проектної процедури або елементарна дія, що виконується конструктором у процесі проектування. Операціями є окремі обчислювальні роботи: розв'язання рівняння, способи інтепретації результатів, побудова графіка, таблиці, види підготування певних даних. Прикладами проектних процедур є процедури моделювання, оптимізації прогнозування, коригування та ін. У свою чергу, ***алгоритм проектування*** відбиває сукупність розпоряджень, необхідних для проектування.

Будь-який процес проектування має свою стратегію і технологію.

Стратегія проектування — це пошук і визначення послідовності операцій, що вибираються проектувальником з метою розв'язання поставленої задачі; це використання методів і алгоритмів проектування, проте успіх, що досягається їх застосуванням, не очевидний і залежить від творчої діяльності людини. Стратегії проектування можуть бути лінійними, циклічними, розгалуженими, адаптивними та ін. При лінійній стратегії проектні операції виконуються послідовно; при циклічній — залежно від результатів, отриманих на поточній операції, можливе повторення попередньої проектної операції; при розгалуженій і адаптивній — залежно від результату попередньої проектної операції відповідно можливе підключення додаткових виконавців для роботи на паралельних операціях, вибір кожної наступної дії.

Технологія проектування — це апробована послідовність дій або операцій, що дає змогу виконати проектування заданого об'єкта. Важливою відмінністю стратегії від технології є те, що технологія є апробованою стратегією, позбавленою елемента пошуку і невизначеності на ключових етапах процесу проектування.

У процесі проектування використовуються мови проектування, які є засобом лінгвістичного або графічного уявлення рішень.

Розв'язання задач проектування технічних об'єктів поділяють на евристичні і систематичні. ***Евристичними*** розв'язаннями називають такі, що є результатом творчої діяльності проектувальника і не можуть бути логічно отримані з попереднього досвіду [1]. ***Систематичними*** називають такі, які отримані внаслідок використання методів, що стимулюють творчу діяльність людини, наприклад, методу «мозкового штурму», морфологічного методу, методу інверсії .

Самий процес проектування прийнято поділяти на попередній, ескізний і технічний етапи. ***Попередній етап*** починається з вибору структури об'єкта і матеріально-енергетичних засобів його реалізації, визначення характеристик об'єкта і складових його ланок. На етапі ***ескізного проектування*** провадиться подальше уточнення і конкретизація структурної схеми об'єкта, а також детальний аналіз характеристик використовуваних технічних засобів і їх оптимізації. На етапі ***технічного проектування*** випускається конструкторська і технологічна документація, необхідна для виготовлення експериментальної партії об'єктів у виробничих умовах. Конструкторська документація необхідна для виготовлення і налагодження проектованої системи, технологічна — містить технічне описування функціонування системи, інструкції з експлуатації, тести тощо.

Для успішного проектування складних систем необхідна методологія проектування, що використовує положення загальної теорії систем (теорію багаторівневих ієрархічних систем), дискретної математики (математичну логіку і теорію алгоритмів), теорії рішень, теорії інформації. Основною метою методології проектування є зменшення кількості ітерацій (повторення) у його процесі.

4.1.2. Моделі і рівні моделювання складних систем

При автоматизованому проектуванні розроблювач оперує не з самими об'єктами, а з їх моделями, тобто моделювання виступає і як апарат, і як засіб, за допомогою якого створюється проект складної системи.

Під моделюванням розуміють процес адекватного відображення найбільш істотних сторін досліджуваного об'єкта або явища з точністю, що необхідна для практичних потреб. Моделюванням можна назвати також особливу форму узагальнення, основою якого є формалізований підхід до дослідження складної системи.

Теоретичною базою моделювання є теорія подібності. **Подібність** — це взаємно однозначна відповідність між двома об'єктами, при якому відомі функції переходу від параметрів одного об'єкта до параметрів іншого, а математичні описування цих об'єктів можуть бути перетворені в тотожні. Теорія подібності дає можливість установити наявність подібності або розробити спосіб її одержання.

Таким чином, ***моделювання*** — це процес уявлення об'єкта дослідження адекватною (подібною) йому моделлю і проведення експериментів з нею для одержання інформації про об'єкт дослідження.

При моделюванні модель виступає і як засіб, і як об'єкт досліджень, що є подібним до модельованного об'єкта.

Іншими словами, *модель — це* фізична або абстрактна система, що адекватно є об'єктом дослідження.

Види моделей. Розрізняють фізичні і абстрактні моделі. ***Фізичні моделі*** утворюються із сукупності матеріальних об'єктів. Для їх побудови використовуються різноманітні фізичні властивості об'єктів, причому природа застосовуваних у моделі матеріальних елементів не обов'язково та ж, що й у досліджуваному об'єкті. Прикладом фізичної моделі є макет. ***Абстрактна модель*** — це описування об'єкта досліджень на будь-якій мові. Абстрактність моделі в тому, що її компонентами є поняття, а не фізичні елементи (наприклад, словесні описування, креслення, схеми, графіки, таблиці, алгоритми або програми, математичні описування). Серед абстрактних моделей розрізняють гносеологічні, інформаційні (кібернетичні), сенсуальні (чутливі), концептуальні, математичні.

Гносеологічні моделі (гносеологія — теорія пізнання) спрямовані на вивчення об'єктивних законів природи (наприклад, моделі сонячної системи, біосфери, світового океану, катастрофічних явищ природи).

Інформаційні моделі описують поводження об'єкта-оригіналу, але не копіюють його.

Сенсуальні моделі — моделі якихось почуттів, емоцій, або моделі, що впливають на почуття людини (наприклад, музика, живопис, поезія).

Концептуальна модель — це абстрактна модель, що виявляє причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту й істотні в рамках дослідження. Основне призначення концептуальної моделі — виявлення набору причинно-наслідкових зв'язків, урахування яких необхідно для одержання визначенних результатів. Один і той же об'єкт зображують різними концептуальними моделями, які будують залежно від мети дослідження. Так, одна концептуальна модель може відображати часові аспекти функціонування системи, інша — вплив відмов на працездатність системи.

Математична модель — абстрактна модель, подана на мові математичних відношень. Вона має форму функціональних залежностей між параметрами, що враховуються відповідною концептуальною моделлю. Ці залежності конкретизують причинно-наслідкові зв'язки, виявлені в концептуальній моделі, і характеризують їх кількісно.

Таким чином, модель — це спеціальний об'єкт, який замінює оригінал. Принципово, не існує моделі, що була б повним еквівалентом оригіналу. Будь-яка модель відбиває лише деякі сторони оригіналу. Тому з метою одержання відомостей про оригінал потрібно користуватися сукупністю моделей. Складність моделювання як процесу полягає у відповідному виборі такої сукупності моделей, які заміняють реальний пристрій або об'єкт. Наприклад, систему диференціальних рівнянь, що описує перемикальні процеси в елементах цифрового пристрою, можна використовувати для оцінки їх швидкодії (часу переключення), але не доцільно застосовувати для побудови тестів або часових діаграм роботи пристрою. Очевидно, в останніх випадках необхідно скористатися якими-небудь іншими моделями, наприклад, логічними рівняннями.

Рівні моделювання. Зараз при аналізі і синтезі складних систем використовують системний підхід, що відрізняється від класичного (або індуктивного), тобто система розглядається з позицій переходу від часткового до загального і синтезує (конструює) систему злиттям її елементів, які розроблюють окремо. При цьому досліджуваний об'єкт виділяють з навколишнього середовища.

Системний підхід дає можливість вирішити проблему побудови складної системи з урахуванням усіх факторів і можливостей, пропорційних їх значущості, на всіх етапах дослідження системи і побудови її моделі. Отже, кожна система є інтегрованим цілим навіть тоді, коли вона складається з окремих роз'єднаних підсистем.

Побудова моделі системи — системна задача, при розв'язанні якої використовують величезну кількість вихідних даних. Завдяки системному підходу можна не тільки побудувати модель реального об'єкта, але й вибрати необхідну кількість керуючої інформації в реальній системі, оцінити показники її функціонування і тим самим знайти найбільш ефективний варіант побудови й оптимальний режим функціонування реальної системи.

У процесі автоматизованого проектування складних систем моделювання їх елементів і функціональних вузлів виконується кількома етапами, на різних рівнях, що відповідають визначеним рівням проектування. Наприклад, для одержання оцінних характеристик поведінки складних інформаційно-обчислювальних систем (продуктивності, економічності, швидкодії), у яких ЕОМ є лише елементом, моделювання виконується на рівні окремих ЕОМ; для одержання орієнтованих характеристик ЕОМ — на рівні пристроїв; для уточнення функціональної поведінки пристроїв з урахуванням їх взаємних зв'язків — на рівні регістрів і логічних вентилів; для одержання найбільш точних часових характеристик і якісних показників (тривалостей і форм перехідних процесів, фронтів сигналів, часових затримок, значень логічних рівнів, завадостійкості) — на рівні елементів.

Методика моделювання безпосередньо залежить від рівня моделювання, тобто від ступеня деталізації описування об'єкта. Кожному рівню моделювання відповідає визначене поняття системи, елемента системи, закону функціонування елементів системи в цілому і зовнішніх впливів.

Так, при моделюванні арифметичного пристрою ЕОМ на рівні елементів як систему застосовують самий арифметичний пристрій. Елементом системи може бути деякий уніфікований розряд. Елементи пов'язані один з одним за функціональною схемою пристрою. Робота кожного елемента описується відповідною функцією з урахуванням, наприклад, затримок у обробці вхідних сигналів. На дану систему впливають послідовності операцій, що можуть виконуватися в арифметичному пристрої (арифметичних, логічих, операндів).

Дослідимо, наприклад, визначення закону розподілу часу виконання операцій як функції значення операндів. Той же арифметичний пристрій можна моделювати на рівні регістрів. Тоді як елемент використовують регістр (суматор), а як функції, виконувані елементом, розглядають окремі мікрооперації — зсув, інвертування, підсумовування. Час їх виконання вважають незалежним від значения операндів.

Метою дослідження може бути також визначення середньої тривалості операцій в пристрої, знаходження коефіцієнтів завантаження регістрів, визначення відносних частот використання мікрооперацій тощо.

Виділимо три основних рівні моделювання залежно від ступеня деталізації описування складних систем і їх елементів.

1. Рівень структурного або імітаційного моделювання складних систем із використанням їх алгоритмічних моделей (моделюючих алгоритмів) і застосуванням спеціалізованих мов моделювання, теорій множин, алгоритмів, формальних граматик, графів, масового обслуговування, статистичного моделювання.

2. Рівень логічного моделювання функціональних схем елементів і вузлів складних систем, моделі яких рекомендуються як рівняння безпосередніх зв'язків (логічні рівняння) і будуються із застосуванням апарата двозначної або багатозначної алгебри логіки.

3. Рівень кількісного моделювання (аналізу) принципових схем елементів складних систем, моделі яких подаються як системи нелінійних алгебричних, або інтегро-диференціальних рівнянь і досліджуються із застосуванням методів функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики.

Сукупністю моделей об'єкта на структурному, логічному і кількісному рівнях моделювання є ієрархічна система, що розкриває взаємозв'язок різних сторін описування об'єкта, яка забезпечує системну зв'язність його елементів і властивостей на всіх стадіях процесу проектування. При переході на більш високий рівень абстрагування здійснюється згортка даних про модельований об'єкт, при переході до більш детального рівня описування — розгортка цих даних. Розглянемо це питання більш докладно.

На структурному рівні моделюється склад елементів об'єкта, на нижчому — відбувається структурування у вигляді деякої множини у $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, властивості і параметри якого подані описуванням $E(v)$ на рівні з описуванням об'єкта $E(V) = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$, а також структурними відношеннями між елементами і описуваннями. До структурних належать бінарні відношення ієрархічного підпорядкування, відношення порядку, суміжності, спряженості, функціонального зв'язку.

Так, на структурному рівні моделюються ранні етапи проектування об'єкта, коли топологічною моделлю об'єкта є орієнтований граф (орграф) С (V, E), упорядкування якого базується на змістовному описуванні складу (множина вершин V) і способу дії об'єкта (множина ребер E). Вершинами орграфа V_i (елементами об'єкта) є, як правило, функціонально закінчені блоки (частини) об'єкта, а ребрами e_j інформаційні зв'язки між ними.

Структурні відношення між елементами множини V описуються ***матрицею суміжності***

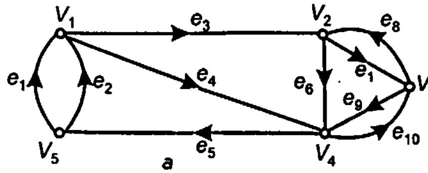
$$[C_{ij}]_V = [n \times n],$$

рядки і стовпчики якої відповідають вершинам орграфа структурної моделі, а її C_{ij}-й елемент дорівнює кількості ребер, спрямованих від вершини V_i до вершини V_j. Відношення між елементами множини V і E, тобто між вершинами і ребрами орграфа, описуються у виді *булевої матриці інцидентності*

$$[a_{ij}]_{V,E} = [n \times m],$$

рядки якої відповідають вершинам, а стовпчики — ребрам орграфа; при цьому її a_{ij}-й елемент дорівнює + 1, якщо v_i — початкова вершина ребра e_j, і — 1, якщо v_i — скінченна вершина ребра e_j.

За подібними матрицями можна зобразити й інші бінарні відношення, наприклад, між «описуванням» елементів і «описуванням» об'єкта в цілому та ін.



$$C = \begin{array}{c|ccccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & \\ \hline & & 1 & & 1 & & v_1 \\ & & & 1 & 1 & & v_2 \\ & & 1 & & 1 & & v_3 \\ & & & 1 & & 1 & v_4 \\ & 1 & & & & & v_5 \\ \hline \end{array}$$

б

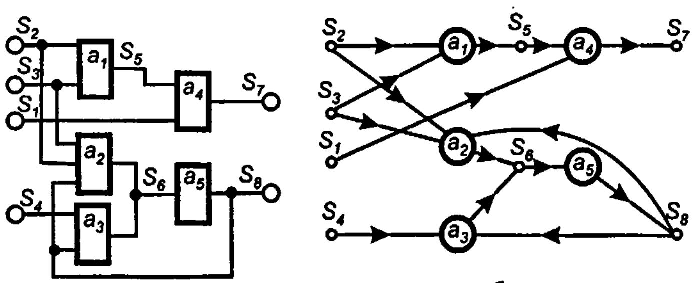
Рис. 4.1. Матриці суміжності і інцидентності (*б*) для орграфа (*а*)

Приклад 4.1. Для орграфа (рис. 4.1, *а*) матриця суміжності C і інцидентності А мають вигляд, показаний на рис. 4.1, *б*.

У цілому на структурному етапі моделюються зв'язки, зумовлені такими відношеннями: приналежності об'єктів, їх елементів і властивостей до визначених множин; ієрархічної підпорядкованості; інцидентності, суміжності і порядку.

На логічному рівні моделювання кожній множині булевої матриці бінарних відношень або структурного графа відповідають набори логічних відношень між вхідними в них елементами, поданими у вигляді логічних змінних. Множинам V і $E(V)$ також відповідають визначені логічні відношення, що відбивають причинно-наслідкові зв'язки. Останні описують послідовності зміни станів об'єкта з урахуванням стану інших, необов'язково суміжних з ним, об'єктів.

Наприклад, при функціонально-логічному проектуванні моделлю цифрових пристроїв є орієнтовані графи, які складаються з двох частин — біографи з двома підмножинами вершин , що не перетинаються: підмножиною V_1, утвореною елементами (на більш глибокому рівні структурування) і їх міжз'єднаннями, і *підмножиною* V_2, що відповідає сигналам (логічним змінним). Ребра такого графа добре відбивають причинно-наслідкові зв'язки між зазначеними підмножинами вершин, що відповідають статичному (підмножина V_1) і динамічному (підмножина V_2) описуванням об'єкта. Розходження між входами і виходами встановлюється за напрямками ребер: вихідний сигнал логічного елемента спрямований з відповідної вершини, а вхідний сигнал — до вершини (рис. 4.2, *б*). Кожний біорграф можна описати матрицею B, що визначає відношення інцидентності елементів і сигналів:



а б

B=

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
a_1		1	1		-1			
a_2		1	1			-1		1
a_3				1		-1		1
a_4					1		-1	
a_5	1					-1		-1

в

Рис. 4.2. Модель логічного елемента (*а*); орієнтований граф, який складається з двох частин (*б*); матриця графа (*в*)

$$B = [A \times S],$$

кількість рядків якої дорівнює кількості елементів і кількість стовпчиків — кількості сигналів. Кожний елемент b_{ij} матриці дорівнює +1, якщо сигнал S_j є вхідним сигналом елемента a_i і дорівнює −1, якщо S_i — вихідний сигнал елемента a_i.

Приклад 4.2. Для орієнтованого графа, який складається з двох частин (рис. 4.2, *б*), і є моделлю логічного елемента (рис. 4.2, *а*), матриця набуває вигляду (рис. 4.2, *в*).

При кількісному моделюванні кожному елементу множини булевої матриці або логічної змінної відповідає алгебрична й інша кількісна змінна, а логічні відношення переходять у кількісні відношення, наприклад, рівняння, нерівності.

На кожному з основних рівнів моделювання можливі описування об'єкта з різним ступенем повноти й узагальнення, тому що існують різні ступені деталізації структурних, логічних і кількісних властивостей і відношень. Проте задача побудови необхідної наближеної моделі, яка б достатньо точно відбивала характерні властивості об'єкта або його елемента на даному рівні проектування й у той же час була доступною для дослідження, пов'язана із значними труднощами.

4.1.3. Характеристика проблеми і методів моделювання складних систем

Проблема моделювання. У основі моделювання — інформаційні процеси, оскільки при реалізації моделі одержують інформацію про даний об'єкт, одночасно в експеримент із моделлю вводиться керуюча інформація, далі відбувається обробка отриманих результатів, тобто інформація — основа всього процесу моделювання.

Зараз як об'єкт моделювання використовують великі організаційно-технічні системи, які належать до класу складних систем 5 (*М*). За змістом модель *М* також є частиною системи 5 (*М*), тобто може належати до класу складних систем.

Складні системи мають такі властивості

1. ***Мета функціонування*** визначає ступінь цілеспрямованості поведінки моделі *М*. Моделі бувають одноцільові, призначені для рішення однієї задачі, і багатоцільові, що дають змогу розв'язати або розглянути ряд сторін функціонування реального об'єкта.

2. ***Цілісність і складність*** вказують на те, що утворювана модель *М* є однією цілісною системою 5 (*М*), яка містить велику кількість складових частин (елементів), що знаходяться в складному взаємозв'язку один з одним.

3. ***Невизначеність*** системи буває за станом системи, можливість досягнення поставленої мети, методами розв'язання задач, достовірністю вихідної інформації. Основна характеристика невизначеності — це така міра інформації, як ентропія, що дає можливість оцінити кількість керуючої інформації, необхідної для досягнення заданого стану системи.

4. ***Адаптивність*** є властивістю високоорганізованої системи, що дає можливість пристосуватися до різноманітних зовнішніх факторів у широкому діапазоні зміни впливу зовнішнього середовища. Стосов-

но моделі істотно можливі її адаптація в широкому спектрі збурюючих впливів, а також вивчення поведінки моделі в змінних умовах, близьких до реального. Важливими є питання усталеності моделі до різноманітних збурюючих впливів, а також пов'язані з існуванням моделі, наприклад питання живучості, надійності.

5. *Універсальність* математичних моделей (наприклад процесів теплопередавання). Однакову структуру мають моделі, що описують коливальні процеси в нелінійних механічних і електронних резонансних системах.

4.2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ СИСТЕМ І МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ

4.2.1. Постановка задач оптимізації проектування

Однією з найважливіших та суттєвих задач при оптимізації мереж зв'язку є визначення основних показників системи, які характеризують її якість. Їх можна назвати ***зовнішніми або вихідними параметрами системи***. Позначимо ці параметри як a_1, a_2, ..., a_n. До них належать, наприклад середньоквадратична помилка ξ, достовірність повідомлень, затримка переданої інформації, ймовірність помилки $P_{\text{пом}}$ при передаванні дискретних повідомлень, середній час безвідмовної роботи $\Delta t_{\text{сер}}$, вартість C та ін. За умовами задачі проектування значення деяких з параметрів a_1 , a_2, ..., a_n мають бути фіксованими, а інші можуть у процесі проектування змінюватися в певних межах (варіювати). Нехай зовнішніми варійованими параметрами є a_1, ..., a_i, ..., $a_{n'}$ (де $n' \le n$).

Розглянемо вплив на якість системи монотонного збільшення одного з цих параметрів, наприклад a_i, за інших рівних умов, тобто незмінних умов роботи системи і незмінних значень всіх інших параметрів системи. Очевидно, при цьому можливий лише один з випадків, коли із зростанням якість системи:

поліпшується;

погіршується;

не змінюється;

змінюється немонотонно (тобто спочатку погіршується, а потім поліпшується або, навпаки, спочатку поліпшується, а потім погіршується).

На даному етапі проектування не вдається за тих або інших причин установити характер залежності якості системи від значень параметра a_i.

Очевидно, у третьому випадку параметр a_i не впливає на якість системи і може при проектуванні взагалі не враховуватися. Надалі, якщо при монотонному збільшенні параметр a_i набуває значення першого або другого випадку, цей параметр називається ***показником якості системи*** і позначається k_i. У всіх інших випадках a_i не належить до класу показників якості і називається просто ***варійованим параметром системи.***

Таким чином, показником якості k_i ($i = 1, 2, ..., m$) системи є така числова характеристика системи, яка пов'язана з її якістю строгою монотонною залежністю — чим більше (чим менше) величина k_i, тим краща система при інших рівних умовах.

Взагалі, навіть не аналізуючи дії системи, можна сказати, які зовнішні змінні параметри можуть при заданих вихідних даних розглядатися як показники якості (наприклад імовірність помилки, затримка, пропускна здатність, надійність і вартість). Навпаки, кількість транзитних вузлів, кількість абонентів у мережі тощо не належать до показників якості.

При вирішенні питання про те, чи даний показник a_i може бути показником якості, враховується вплив цього показника на якість системи за інших рівних умов, зокрема, при зберіганні всіх інших показників системи.

Навіть відносно такого показника, як вартість C, не можна було б стверджувати, що «чим менше вартість, тим краща система», тому що при зменшенні вартості можуть погіршуватися такі найважливіші показники якості, як імовірність помилки, затримка та ін. Але при цьому виникає питання — у чому зміст визначених, зазначеним вище способом, показників якості $k_1, ..., k_m$ із сукупності $\{a_1, ... a_n\}$ зовнішніх параметрів системи, якщо врахувати, що часто прагнення поліпшити в процесі проектування один із показників k_i призводить до зміни одного або більше інших показників, і, отже, «інші рівні умови» не мають місця. Проте, як буде показано далі, введення показників якості $k_1, ..., k_m$ дає можливість у процесі проектування виключити безумовно гірші варіанти побудови системи, завдяки чому можна не тільки уникнути прийняття безумовно гіршого розв'язку, але і часто полегшити і прискорити знаходження оптимального (кращого) розв'язку.

З урахуванням вищевикладеного сукупність $D = \{D_1, ..., D_l\}$ усіх вихідних даних можна поділити на підгрупи:

сукупність $Y = \{Y_1, ..., Y_p\}$ умов;

сукупність $O_s = \{O_{s1}, ..., O_{sq}\}$ обмежень на структуру і параметри проектованої мережі;

склад сукупності (вектори) $K = < k_1, ..., k_m >$ показників якості системи;

сукупність $O_k = \{O_{k1}, ..., O_{kr}\}$ обмежень, які накладаються на показники якості.

Сукупність O_s містить обмеження, що накладаються на структуру і параметри $x_1, ..., x_i, ..., x_u$ системи. Ці обмеження можуть бути типу рівностей ($x_i = x_{i0}$), нерівностей $x_i \le x_{iм}$ або $x_{i\min} \le x_i \le x_{iм}$, дискретності ($x_i = 1, 2, 3 ...$), зв'язку [$\Phi_j(x_1, ..., x_n) = 0$ або $\Phi_j(x_1, ..., x_n) = 0$], та іншого характеру, наприклад, «мережа не повинна містити транзитних вузлів визначеного типу».

До умов Y роботи системи належать різні характеристики мережі або системи зв'язку.

Вектор $K = < k_1 , ..., k_m >$ містить сукупність показників якості системи, які враховуються в процесі синтезу. При визначенні вихідних даних відомо лише склад цієї сукупності, тобто вказується, що варто розуміти під k_1, під k_2 і т. д.; чисельні ж значення складових $k_1, k_2, ..., k_m$ (вектори K) залежать від структури і параметрів системи і у процесі синтезу варіюються. Надалі символ C_k буде означати, що мова йде не про величину складового вектора K', а лише про склад цього вектора.

Обмеження O_k, що накладаються на величини показників якості $k_1, ..., k_m$, можуть бути типу рівності ($k_i = k_{i0}$), нерівності ($k_i \le k_{iм}$, $k_i > 0$) і зв'язку (наприклад $\Phi_j (k_1, ..., k_m) \le 0$).

Зазначимо, що розподіл вихідних даних на умови Y, обмеження O_s і показники якості $k_1, ..., k_m$ є умовним, так як залежно від постановки задачі проектування ту саму числову характеристику можна розглядати або як показник якості, або як умову, або як обмеження. Наприклад, кількість керуючої інформації $I_{кер}$, необхідну системі керування для забезпечення заданої точності параметрів керованої мережі, можна розглядати, з одного боку, як показник якості, а з іншої — як умову роботи системи керування. Ряд показників якості (наприклад імовірність помилки, затримка переданої інформації, надійність) у процесі проектування часто доводиться переводити в розряд обмежень (типу рівностей або нерівностей). Проте, незважаючи на деяку умовність розподілу вихідних даних на умови, обмеження і показники якості, такий розподіл взагалі є корисним.

Система (варіант побудови системи) S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s\}$ вихідних даних, називається ***допустимою***. При цьому може існувати не одна допустима система, а деяка множина допустимих $M_д$ систем. Допустима система, що задовольняє сукупності обмежень O_k, називається ***строго допустимою***. Інакше кажучи, строго допустимою називається система, що задовольняє усій сукупності $D = \{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних. Може існувати не одна, а деяка множина $M_{сд}$ строго допустимих систем. З усіх строго допустимих систем оптимальною (найкращою) вважається та система $S_{опт}$, що має найкраще (серед заздалегідь установлених) значення вектора K показників якості. Отже, для вибору оптимальної системи попередньо обирають (обґрунтовують) критерій переваги (критерій оптимальності), і, як правило, за ним одне значення вектора K вважають кращим (або гіршим) за інше його значення.

Нещодавно при проектуванні не прагнули до пошуку обов'язково оптимальної системи: задача проектування вважалася успішно вирішеною, якщо вдавалося знайти (спроектувати) будь-яку строго допустиму систему. Проте в останні роки стає усе більш актуальною задача створення не тільки строго допустимих, але й оптимальних систем. Це пояснюється тим, що з кожним роком зростають вимоги до телекомунікаційних мереж. Тому вважається суттєвим не просто задовольнити вихідним вимогам O_k, що пред'являються до показників якості системи, але і поліпшити ці показники.

Часто пошук оптимальної системи називається (коротко) ***синтезом системи***.

З викладеного випливає, що задачу синтезу можна сформулювати так: знайти таку систему S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних і має при цьому значення $K = < k_1, ..., k_m >$ показників якості, найкраще як заздалегідь обраний критерій переваги (критерій оптимальності системи).

Комбінований процес сполучення математичних і евристичних методів назвемо ***інженерним синтезом***.

Синтез складних систем, як правило, має бути векторним.

Векторним називається синтез з урахуванням декількох показників якості, тобто за зазначенням вектора $K = <k_1, ..., k_m >$ показників якості. Відзначимо, що векторний синтез називають ***векторною оптимізацією, оптимізацією за векторним критерієм або багатокритеріальною оптимізацією***. На відміну від цього, синтез, що провадиться за єдиним показником якості ($m = 1$), називається ***скалярним***.

Глобальним є синтез з урахуванням усіх суттєвих показників якості, включаючи економічні і конструктивні. Якщо при синтезі враховуються не всі суттєві показники якості, то він називається частковим. У тому, що інженерний синтез має бути векторним і глобальним, неважко переконатися з наступних міркувань. Інженерний синтез завершається розробкою системи, оптимальної з погляду її практичного застосування. Отже, у процесі цього синтезу враховують усі суттєві для нього показники якості. Якщо не врахований хоча б один із суттєвих для практичного застосування показників якості, система не може вважатися оптимальною.

Звідси випливає, що інженерний синтез завжди має бути глобальним. При інженерному синтезі не може бути такої ситуації, щоб суттєвим був тільки один показник якості: завжди буде щонайменше два суттєвих показники — вартість C та показник, що характеризує основний ефект, що досягається при застосуванні системи (ефективність системи). На практиці кількість суттєвих показників якості більше двох. Звідси випливає, що глобальний синтез, а отже й інженерний синтез, завжди є векторним.

При математичному синтезі на відміну від інженерного для того, щоб зробити чисто математичне розв'язання задачі можливим або спростити його, іноді відмовляються від урахування деяких суттєвих показників, наприклад, не враховують (кількісно) економічні і конструктивні показники. Тому математичний синтез може бути як глобальним, так і частковим.

Синтез телекомунікаційної мережі, системи зв'язку або пристроїв звичайно містить розв'язання таких основних задач:

синтез оптимальної структури мережі (системи);

вибір оптимальних значень параметрів мережі або системи, наприклад, затримки переданої інформації, достовірності, мінімальної кількості керуючої інформації в системі керування, що забезпечує задану точність параметрів керованої мережі, та інше, або ***оптимізацію параметрів***;

вибір оптимального варіанта побудови мережі (системи) із скінченної кількості N цілком визначених варіантів S_1 , S_2, ... , S_N, або дискретний вибір мережі (системи).

Таким чином, синтез телекомунікаційної мережі (системи і пристрою) звичайно складається з синтезу структури, оптимізації параметрів і дискретного вибору мережі (системи).

4.2.2. Задача векторного синтезу

Задача векторного синтезу формулюється так: знайти таку систему S, що задовольняє сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних і має при цьому значення вектора $K' = < k_1 ..., k_i ,...,k_m >$ показників якості, найкраще як обраний критерій переваги. При цьому під показником якості k_i ($i = 1, 2, ..., m$) розуміємо числову характеристику системи, пов'язану з її якістю монотонної залежності: чим більше (менше) величина K_i, тим краще система за інших рівних умов, тобто при незмінних $\{Y, O_s, C_{k'}, O_k\}$ і незмінних значеннях інших (m — 1) показників якості. Для зручності порівняння значень вектора K, що відповідають різним варіантам побудови системи, зручно попередньо привести всі показники якості k_1, ..., k_i, ...,k_m до стандартного виду. Показник якості k_i вважається стандартним (або поданим у стандартному вигляді), якщо він задовольняє умові:

$$k_i \geq 0 \, (i = 1, ..., m), \tag{4.1}$$

і чим менше (а не більше) величина k_i, тим краще система (при сформульованих вище інших рівних умовах). З (4.1) випливає, зокрема, що ідеальною відносно показника якості k_i системою є така система, у якої $k_i = 0$.

Якщо деякий показник якості K_i' не є стандартним, то його завжди можна привести до стандартного вигляду K_i. Дійсно, нехай, наприклад, невід'ємний показник якості K_i' такий, що може змінюватися в межах

$$k'_{i\,\min} \le k'_i \le k'_{i\,\max}, \tag{4.2}$$

і чим більше величина k_i', тим краща система. Тоді як еквівалентний йому стандартний показник якості можна вибрати величину

$$k_i = k'_{i\,\max} - k'_i. \tag{4.3}$$

Якщо $K_i' \to \infty$, то замість (4.3)

$$k_i = 1/k'_i. \tag{4.4}$$

Нарешті, якщо невід'ємний показник k_i задовольняє умові (4.2) (при цьому він менший, тим краща система), тоді

$$k_i = k'_i - k'_{i\,\min}. \tag{4.5}$$

Коли $k'_{i\,\min} = 0$, одержуємо $k_i = k_i'$, тобто вихідний показник якості k_i' є стандартним і, отже, перетворювати його не потрібно.

Очевидно, такі найбільш поширені показники, як затримка, ймовірність помилки, відношення сигнал/шум, середній квадрат помилки тощо, мають стандартний вигляд і перетворень не потребують. Якщо показником якості k_i' є ймовірність $P_п$ деякої події і чим більше ця ймовірність (наприклад імовірність ураження цілі), тим краща система. Тоді, як випливає з (4.3),

$$k_i = 1 - P_п = P_{пп}, \tag{4.6}$$

де $P_{пп}$ — імовірність протилежної події (наприклад, імовірність непошкодження цілі).

Заміна нестандартних показників якості відповідними їм стандартними показниками не призводить до зміни результатів синтезу, але спрощує одержання цих результатів.

Основне спрощення полягає в тому, що в m-мірному просторі показників якості $k_1, k_2, ..., k_m$ кожній сукупності $<k_1, k_2, ..., k_m>$ показників якості відповідає деякий m-мірний вектор $K = <k_1, k_2, ..., k_m>$, проведений із початку координат. При цьому цілком ідеальній системі, тобто системі, кращій відносно всіх показників якості $k_1, k_2, ..., k_m$, відповідає нульове значення у векторі K, тобто точка, що збігається з початком координат.

Очевидно, що жодна реальна система не може мати нульовий вектор K, тому що не існує системи, ідеальної в усіх відношеннях. У кращому випадку можуть існувати системи, ідеальні лише в деяких відношеннях, тобто нульові значення мають лише деяких із m показників якості. Тому, якщо за математичним синтезом одержимо

$$K = 0, \tag{4.7}$$

то це свідчитиме про некоректну постановку задачі синтезу надмірної ідеалізації задачі (зневагу дуже суттєвими обмеженнями). Звідси випливає: при коректній постановці задачі векторного синтезу множина $M_Д$ допустимих систем (рішень) не включає початок координат.

4.2.3. Особливості постановки задачі при дискретному виборі системи

При дискретному виборі сукупність строго допустимих систем відображає у просторі R^m показників якості задане дискретною множиною $M_{сд}$ точок (систем), і задача синтезу полягає у виборі такої точки цієї множини, яка має найкраще значення вектора K.

При оптимізації параметрів варіюється сукупність (вектор) $X = < x_1, ..., x_n >$ параметрів системи S і потрібно вибрати таке значення x цієї сукупності, при якому вектор $K = <k_1, ..., k_m>$ має найкраще (стосовно обраного критерію переваги) значення. У загальному випадку кожний із показників якості $k_1, ..., k_m$ може залежати від усіх n параметрів:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ k_m &= F_{1m}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\}. \tag{4.8}$$

Ці залежності називають *цільовими функціями.*

У силу накладених обмежень O_s параметри $x_1, ..., x_n$ мають задовольняти деяким обмеженням типу рівностей, нерівностей і дискретності. При цьому обмеження типу рівностей або нерівностей накладаються не тільки на значення кожного з параметрів окремо, але і на зв'язки між ними. Наприклад, обмеження можуть мати вигляд:

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = a(j = \overline{1, p}), \tag{4.9}$$

$$f_j(x_n, \ldots, x_n) = a_j(j = p + 1,\ p + 2, \ldots). \tag{4.10}$$

Очевидно, ці співвідношення можуть бути записані також у вигляді:

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1,\ p), \tag{4.11}$$

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) \le 0\ (j = p + 1, \ldots, q), \tag{4.12}$$

де $\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1, \ldots, x_n) - a_j$.

Функції $\Phi_j(x_1, \ldots, x_n)$ називаються звичайно *функціями зв'язку* або *функціями обмежень.*

Крім того, мають бути задані обмеження на показники якості $k_1, ..., k_m$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \le k_{1\text{м}}, \\ \dots \\ k_m \le k_{m\text{м}}. \end{array}\right\} \qquad (4.13)$$

Задача оптимізації параметрів складається з двох основних етапів.

На першому (попередньому) етапі, виходячи із сукупності $\{Y, O_s, C_k\}$ вихідних даних, знаходять вигляд цільових функцій і функцій зв'язку.

При цьому, очевидно, необхідно мати вихідні дані про структуру системи, яку можна розглядати як частину умов Y або обмежень O_s.

На другому (основному) етапі оптимізують параметри системи, тобто відшукують таке значення $\hat{x} = <\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n>$ сукупності параметрів системи, що задовольняють обмеженням (4.11), (4.12) та (4.13), забезпечуючи найкраще значення вектора $K = <k_1, \dots, k_m>$.

Відзначимо, що істотною є та обставина, що при оптимізації параметрів у математичному відношенні задача зводиться до дослідження поведінки цільових функцій (4.8), тобто функцій скінченної кількості змінних $x_1, \dots, x_n$ при урахуванні обмежень, що накладаються на ці змінні.

Розглянемо формулювання задачі оптимізації параметрів у m-мірному просторі R^m показників якості. Зі співвідношень (4.7) і (4.8) випливає, що при оптимізації параметрів, крім простору R^m показників якості $k_1, \dots, k_m$ можна розглядати також простір R^n варійованих параметрів $x_1, \dots, x_n$, простір R^q обмежень.

Оптимізацію параметрів для кожного варіанта S побудови системи, або кожну систему S (повністю) визначимо сукупністю $x = <x_1, \dots, x_n>$ значень своїх параметрів, тобто

$$S = S(x) = S(x_1, \dots, x_n). \qquad (4.14)$$

У свою чергу кожній системі S відповідає визначене значення вектора $K = <k_1, \dots, k_n>$ показників якості.

Будемо вважати, що залежність між S і K взаємооднозначна, і позначимо її

$$K = K(S). \qquad (4.15)$$

Тоді в просторі R^m показників якості кожній системі S відповідатиме одна, і тільки одна точка $A(S)$, у якій вектор показників якості $R(S)$, і навпаки, кожному значенню вектора $K(S)$, тобто кожній точці $A(S)$, буде відповідати одна, і тільки одна система S. Оскільки на можливі значення вектора параметрів $x = <x_1, x_2, \dots, x_n>$, а отже, і на можливі (допустимі) системи S накладені обмеження (наприклад вигляду (4.8)), тоді припустимі значення вектора K в просторі R^m обмежені деякою m-мірною областю $M_{\text{д}}$. Вигляд цієї області залежить як від обмежень (4.8), так і від вигляду цільових функцій (4.7), тобто визначається сукупністю $\{Y, O_s, C_k\}$ вихідних даних, прийнятих при формулюванні задачі синтезу.

Якщо показники якості задовольняють визначеним обмеженням (ці обмеження визначаються при рішенні кожної конкретної задачі), то з області $M_д$ має бути виділена строго допустима область $M_{сд}$, що задовольняє цим обмеженням. При дискретному синтезі сукупності строго припустимих систем відповідає в просторі R^m скінченна множина точок. На відміну від цього при оптимізації параметрів множина відповідних точок у просторі R^m (у невиродженому випадку) нескінченна і має потужність континуум (неперервної множини). При цьому задача оптимізації параметрів складається у виборі такої точки (системи) із множини $M_{сд}$, якій відповідає найкраще (стосовно обраного критерію переваги) значення вектора K.

Розглянемо особливості постановки задачі оптимізації при синтезі структури. З технічної точки зору синтез структури відрізняється від оптимізації параметрів тим, що в процесі синтезу структура системи варіюється настільки істотно, що ці варіації не можна звести до зміни скінченної кількості параметрів системи. Більш строго, з математичної точки зору, синтез структури відрізняється від оптимізації параметрів тим, що в процесі оптимізації варіюється не сукупність $< x_1, ..., x_n >$ деяких чисел (параметрів), а оператор системи. При цьому залежності показників якості $k_1, ..., k_m$ від варіантів побудови системи вже не можна описати цільовими функціоналами. Вигляд цих функціоналів дуже складний. Обмеження, що накладаються при синтезі структури, також можуть мати більш складний характер, чим при оптимізації параметрів, тому що ці обмеження накладаються не тільки на значення деяких чисел $x_1, ..., x_n$ або зв'язків між ними, але і на вигляд функціональних залежностей або зв'язків між цими залежностями.

У просторі R^m показників якості задача синтезу структури зводиться, як і при оптимізації параметрів, до наступного. При заданій сукупності $\{Y, O_s, C_k, O_k\}$ вихідних даних сукупність усіх строго припустимих точок (систем) утворить деяку область $M_{сд}$. Кожній точці A цієї області відповідають цілком визначені системи S і показник якості $K(S)$. Тому синтез структури зводиться до вибору з усіх точок області $M_{сд}$ такої точки, у якій вектор K має найкраще (відносно обраного критерію переваги) значення. Відмінність синтезу структури від оптимізації параметрів полягає в тому, що вигляд області $M_{сд}$ тепер визначається не сукупністю цільових функцій (4.7) і обмежень (4.8), а більш складними співвідношеннями (цільовими функціоналами, обмеженнями інтегрального вигляду тощо). Таким чином, можна сформулювати загальні риси й особливості дискретного вибору системи, синтезу структури й оптимізації параметрів. В усіх цих випадках строго припустимим системам (варіантам побудови системи) у просторі

R^m показників якості відповідає деяка множина $M_{сд}$ точок. При цьому задача зводиться до вибору такої із цих точок, якій відповідає найкраще (відносно обраного критерію пропозиції) значення вектора K. Для цього узагальнення між трьома основними видами синтезу (оптимізації), можна сформулювати ряд загальних положень, правдивих для всіх цих видів. Варто лише пам'ятати про різний зміст поняття «*система S*». При дискретному виборі можливо лише скінченна кількість цілком визначених варіантів S_1, ..., S_N побудови системи S.

При оптимізації параметрів кожний варіант побудови системи S (кожна система S) цілком визначається скінченною кількістю n параметрів x_1, ..., x_n, тобто $S = S(x_1, ..., x_n)$. При синтезі структури варіанти побудови системи S можуть відрізнятися не тільки чисельними значеннями скінченної кількості параметрів, але і можуть мати більш принципові розходження. Проте й при синтезі структури, якщо які-небудь два варіанти S_1 і S_2 побудови системи (дві системи) відрізняються тільки значеннями своїх параметрів або навіть значенням тільки одного з параметрів, ці варіанти (системи) вважаються різними (незбіжними). Це зумовлено тим, що задача синтезу структури полягає не тільки в тому, щоб визначити принцип побудови системи, але і щоб для знайденого принципу встановити (вибрати) цілком визначені чисельні значення всіх параметрів системи. Тому при синтезі структури знижується вибір варіанта побудови системи, включаючи вибір значень усіх параметрів системи.

4.3. МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

4.3.1. Способи пошуку екстремуму

Відомо, що екстремумом функції $y = f(x)$ називаються такі її значення $f(x_e)$, для яких мають місце такі нерівності:

$f(x + h) < f(x_e)$ — для випадку максимуму;

$f(x_e + h) < f(x_e)$ — для випадку мінімуму

при будь-яких малих значеннях h, позитивних і негативних.

Для неперервної функції екстремум має місце тільки в тих точках, у яких похідна або дорівнює нулю, або не існує (зокрема, прямує до нескінченності), або змінює знак. Відповідно до цього перевірка деякої області завдання функції на екстремум може засновуватися або на визначенні екстремуму, або на умові існування екстремуму. Очевидно, що для визначення екстремального значення функції необхідно перевірити або збільшення функції при позитивних і негативних h, або поводження похідної справа і зліва від припустимої точки екстремуму, що накладає визначені вимоги на динаміку системи.

Таким чином, шукати екстремум можна, перевіряючи кожну точку характеристики на екстремум за приростом виходу або за поведінкою похідної. Виходячи з цього, були розроблені два основних способи пошуку екстремуму.

Пошук за приростом базується на визначенні екстремуму. Суть методу полягає в тому, що при переміщенні робочої точки за характеристикою об'єкта визначається приріст функції якості, що відповідає визначеному приросту вхідного сигналу об'єкта. Якщо функція якості досягає екстремуму, то при подальшій зміні вхідного сигналу приріст змінить знак. При переході через максимум приріст стане з позитивного негативним $[f(x_e + h) < f(x_e)]$, а при переході через мінімум — навпаки. Тоді правильним напрямком руху при пошуку максимуму буде той, якому відповідають позитивні прирости вихідної координати, а при пошуку мінімуму — негативні.

Пошук за чутливістю базується на достатній умові існування екстремуму. Метод полягає у формуванні керуючого сигналу за результатами вимірювання крутості характеристики об'єкта в даній точці. Якщо перша похідна функції якості за вхідним параметром позитивна, то для досягнення максимуму необхідно збільшити величину вхідного сигналу об'єкта, а для досягнення мінімуму — зменшити. При переході через екстремум похідна змінює знак.

Розглянемо більш докладно кожний із способів пошуку на прикладі функції

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{4.16}$$

В результаті нескладного перетворення функція набуває вигляду:

$$y = a(x - x_e)^2 + y_e. \tag{4.17}$$

На рис. 4.3, *а* показана крива, що відповідає рівнянню (4.17), з екстремумом на початку координат. Визначимо приріст виходу об'єкта Δy при зміні координати x на величину h:

$$y(x + h) = a(x + h - x_e)^2 + y_e = a(x - x_e)^2 + 2ah(x - x_e) + ah^2 + y_e,$$

звідки

$$\Delta y = y(x + h) - y(x) = 2ah(x - x_e) + ah^2,$$

$$\Delta y = 2ah\left(x + \frac{h}{2} - x_e\right). \tag{4.18}$$

Неважко зрозуміти, що величина приросту Δy пропорційна відстані до екстремуму, а знак залежить від екстремуму ($a > 0$ при мінімумі і

$a < 0$ при максимумі), знак приросту h і знак різниці $\left(x + \frac{h}{2} - x_e\right)$. Якщо відомі знаки h і a, тоді за знаком Δy можна визначити співвідношення між x і x_e, отже, і напрямок руху до екстремуму.

Існує декілька методів визначення приростів виходу. Найбільш поширені два з них: метод почергових кроків (крокові екстремальні системи) і метод запам'ятовування екстремуму.

При кроковому методі вимірюють приріст функції якості, що відповідає зміні входу на величину кроку h. Пошук екстремуму в кроковій системі показаний на рис. 4.3, *б*, де для простоти узято змінну x з постійною швидкістю. Знак швидкості спочатку змінювався довільно (суцільні лінії).

Для того щоб замірювання екстремуму відбувалося автоматично, необхідно змінювати напрямок прямування x (реверсувати) відповідно до зміни знаку збільшення (Δy, зміна x_p, Δy_p при цьому показано штрихами).

Метод запам'ятовування екстремуму полягає у використанні різниці між поточним і екстремальним значенням функції якості для знаходження моменту реверса системи. Для визначення екстремального значення функції використовується пристрій пам'яті ЗП, включений так, що на його вхід надходять тільки позитивні (при пошуку максимуму) або тільки від'ємні (при пошуку мінімуму) збільшення показника якості. На рис. 4.4 наведено діаграму зміни функції якості $y(x)$ і відповідну їй діаграму виходу пристрою пам'яті $y_{зп}(x)$. Пошук екстремуму за методом запам'ятовування показаний на рис. 4.5.

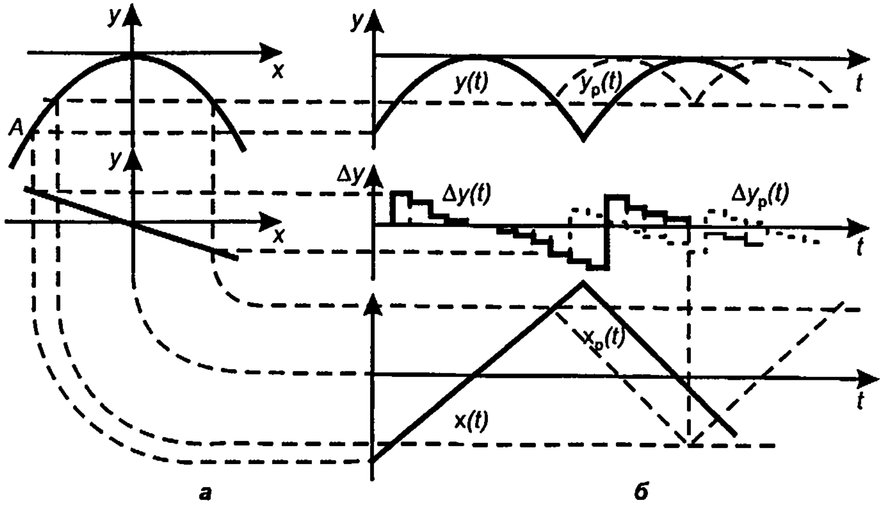


Рис. 4.3. Метод пошуку екстремуму за приростом

Для формування керуючого сигналу u використовується різниця $\varepsilon = y_{зп}(x) - y(x)$. Якщо система прямує до екстремуму, то $y_{зп}(x) = y(x)$, тоді $\varepsilon = 0$. Після досягнення екстремуму система продовжує прямувати в тому ж напрямку. При цьому $y_{зп}(x) = y_e > y(x)$, різниця стає відмінною від нуля і система реверсується. У момент реверсу стирається інформація, записана у ЗП, а потім записується поточне значення функції якості $y(x)$, отже, $\varepsilon = 0$ до чергового переходу через екстремум. Робоча точка коливається біля екстремуму.

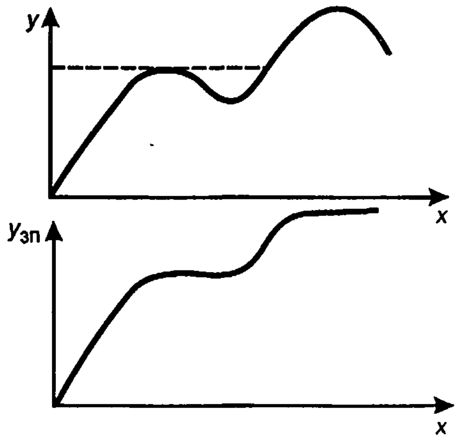


Рис. 4.4. Зміна функції якості і вихідного сигналу ЗП

Розглянемо тепер докладніше спосіб пошуку за чутливістю. При тій же характеристиці об'єкта маємо:

$$\left.\begin{aligned} y &= a(x - x_e)^2 + y_e; \\ \frac{dy}{dx} &= 2a(x - x_e). \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

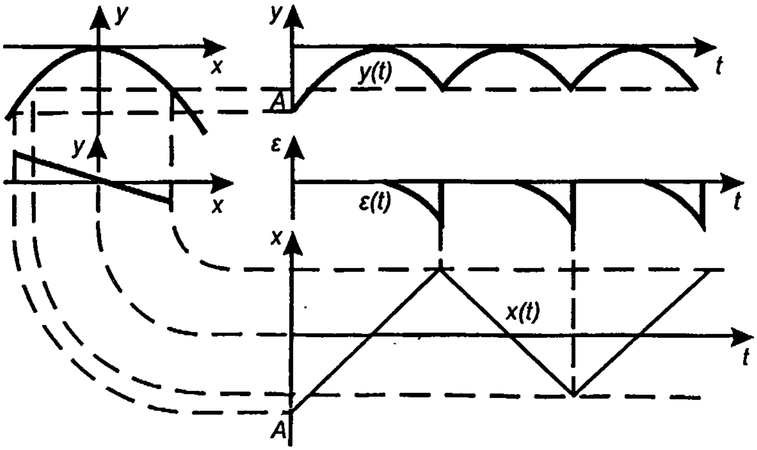


Рис. 4.5. Пошук екстремуму з запам'ятовуванням

При відомому знаку a співвідношення між x і x_e однозначно визначається знаком похідної

$$\operatorname{sign}(x - x_e) = \begin{cases} \operatorname{sign}\dfrac{dy}{dx}, & a > 0; \\ -\operatorname{sign}\dfrac{dy}{dx}, & a < 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Величина $\dfrac{dy}{dx}$ пропорційна відстані до екстремуму і не може бути визначена двома способами. Відповідно до цього розрізняють дві модифікації пошуку за чутливістю: виміром похідних за часом і з періодичним пошуковим сигналом (з модуляцією).

В основі першої модифікації співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}. \tag{4.21}$$

Дійсно, при $a = \text{const}$, $x_e = \text{const}$, $y_e = \text{const}$ маємо

$$\frac{dy}{dx} = 2a(x - x_e)\frac{dx}{dt}; \tag{4.22}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = 2a(x - x_e). \tag{4.23}$$

При пошуку із синусоїдальним пошуковим сигналом керуючий вплив складається із суми основного впливу x і пошукового $x_n A \sin \omega t$. Розглянемо складову вихідного впливу, зумовлену пошуковими коливаннями:

$$\begin{aligned} y(x + x_n) &= a(x + A\sin\omega t - x_e)^2 + y_e = \\ &= a(x - x_e) + y_e + 2a(x - x_e)A\sin\omega t + aA^2\sin^2\omega t = \\ &= y(x) + 2a(x - x_e)A\sin\omega t + \frac{1}{2}aA^2(1 - \cos 2\omega t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

або

$$y(x + x_n) = y(x) + A\frac{dy}{dx}\sin\omega t + \frac{1}{2}aA^2(1 - \cos 2\omega t), \tag{4.25}$$

тому що $2a(x - x_e) = \dfrac{dy}{dx}$; $\sin^2\omega t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$.

З (4.25) очевидно, що наявність коливань на вході призводить до появи коливань такої ж частоти на виході, причому амплітуда їх пропорційна похідній $\frac{dy}{dx}$. Оскільки похідна змінює знак при проходженні екстремуму, то і коливання на виході при цьому змінюють фазу на 180° (рис. 4.6, *а*).

На рис. 4.6, *а* показано три вхідні синусоїдального сигналу $x(t)$ (позначення без штрихів). Кожному з позначень відповідає робоча точка на статичній характеристиці $y = f(x)$ (*1'*, *3'*, *5'*, *a'*, *c'*, *e'*, *6'*, *8'*, *10'*). Залежно від положення робочої точки щодо екстремуму змінюється вихідний сигнал $\Delta y(t)$ (позначення з двома штрихами).

Розглянемо рис. 4.6, *б*. Як і в попередньому випадку, стан об'єкта характеризується точкою *А*. Почнемо змінювати x, припустимо, з постійною швидкістю, і промодулюємо його синусоїдальними коливаннями. Вектор стану y почне наближатися до екстремуму. Відфільтруємо складову y, тобто будемо спостерігати за Δy. Спочатку вихідні коливання зменшуватимуться за амплітудою. У точці екстремуму буде знаходитись тільки друга гармоніка $\cos 2\omega t$. При переході через точку екстремуму фаза основної гармоніки зміниться на 180° і її амплітуда почне збільшуватися, що свідчить про те, що вектор стану віддалиться від екстремуму.

Щоб знову наблизитися до екстремуму, варто змінити x у зворотному напрямку, тобто реверсувати його. Таким чином, використовуючи властивість синусоїдальних коливань змінювати амплітуду і фазу залежно від положення робочої точки, можна утримуватися в районі екстремуму.

Відзначимо, що як пошукові періодичні коливання використовуються також прямокутні, трапецеїдальні, трикутні та інші.

Розглянувши існуючі методи пошуку екстремуму, зробимо загальні висновки.

1. Для пошуку екстремуму і його точного визначення керуючий вплив обов'язково має змінюватися так, щоб можна було перевірити поведінку виходу за точкою припустимого екстремуму.

2. Керуючий вплив містить дві складові: одну, що відповідає екстремальному значенню, другу — спробну, яка використовується для відшукання екстремуму. Це можна побачити за методом пошуку з періодичним пошуковим сигналом, що застосовується для визначення властивостей об'єкта, тобто для відшукання екстремуму. Системи, що володіють такими властивостями, називаються дуальними, тобто мають двоїстий характер: визначають властивості об'єкта й управляють ними за їх визначенням. Такий дуалізм характерний для самонастроювальних систем, наприклад екстремальних.

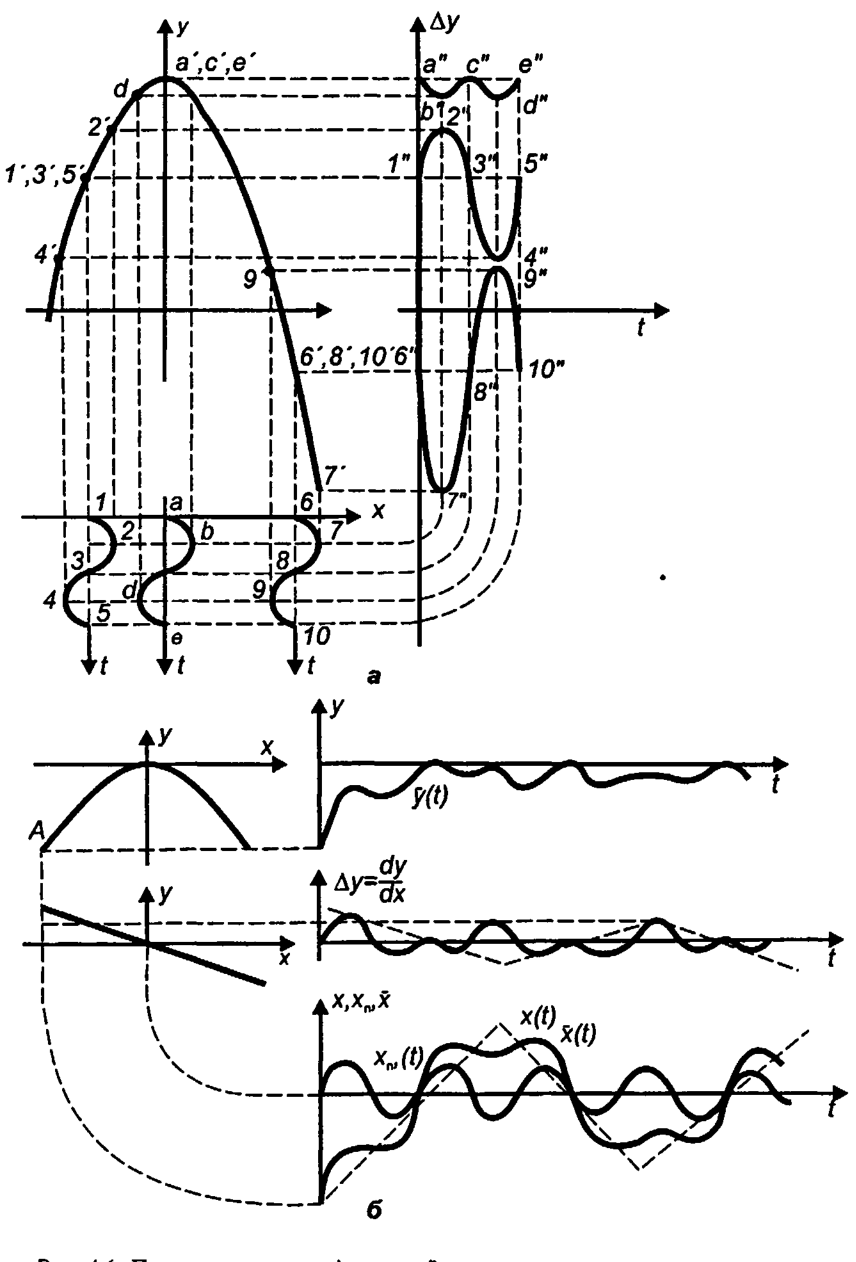


Рис. 4.6. Пошук екстремуму із синусоїдальним сигналом

4.3.2. Методи організації прямування до екстремуму

Вище було розглянуто способи пошуку екстремуму на прикладі однопараметричного об'єкта, у якому організація прямування зводиться до вибору співвідношення між швидкістю зміни входу системи і сигналом, отриманим з пристрою, що визначає положення екстремуму. Як і в звичайних системах регулювання, в екстремальних системах можлива побудова релейних і лінійних систем. У релейних екстремальних системах для керування прямуванням використовується лише знак показника екстремуму; величина сигналу, що надходить на виконавчий механізм, не залежить від відстані до екстремуму. Такі системи називаються ***екстремальними системами з незалежним пошуком***. Якщо ж для керування рухом використовується розмір показника екстремуму, тобто швидкість руху залежить від відстані до екстремуму, то системи називаються ***системами з залежним пошуком або пропорційними***.

При пошуках за чутливістю і кроковому за приростами можна використати як системи з незалежним пошуком, так і пропорційні. Системи з запам'ятовуванням екстремуму не змінюють швидкість пропорційно відстані до екстремуму, тому що при прямуванні до екстремуму показник екстремуму $\varepsilon = 0$ і тільки після екстремуму $\varepsilon \neq 0$. Отже, системи з запам'ятовуванням екстремуму обов'язково релейні.

У багатомірних системах функція декількох змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має при системі значень $(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$ у точці P_e екстремум, якщо можна вказати таке число ε, що область $x_{1e} - \varepsilon < x_{1e} < x_{1e} + \varepsilon$, $x_{2e} - \varepsilon < x_{2e} < x_{2e} + \varepsilon$, ..., $x_{ne} - \varepsilon < x_{ne} < x_{ne} + \varepsilon$ входить в область заданої функції і для кожної системи значень у цій області, крім самої системи $(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$, задовольняються умови:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < f(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$ — для максимуму і

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > f(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$ — для мінімуму.

З визначення видно, що для знаходження положення екстремуму необхідно досліджувати поведінку об'єкта при зміні всіх параметрів. Спосіб переходу від одного керуючого параметра до іншого і алгоритм прямування по екстремальній поверхні визначає організацію руху до екстремуму.

Всі існуючі методи пошуку багатомірного екстремуму можна поділити на дві основні групи: регулярний пошук і випадковий. Основні методи регулярного пошуку такі.

Метод сканування полягає в послідовному переглядані всіх можливих станів системи. Він дає можливість визначити екстремум за один цикл пошуку, проте для пошуку екстремуму багатомірних систем застосовується дуже рідко в екстремальних дискретних системах з невеликою кількістю можливих станів. Метод сканування використовують також при настроюванні одномірних багатоекстремальних систем на глобальний екстремум.

Метод Гаусса—Зайделя зводиться до пошуку екстремуму послідовно за всіма координатам так, що на кожному етапі екстремум відшукується тільки за однією координатою, тобто $\frac{df}{x_i}=0$. Цим методом за один цикл пошуку неможливо знайти шуканий стан.

На рис. 4.7, ***а*** показана екстремальна поверхня. Припустимо, що в початковий момент об'єкт знаходиться в точці *А*, якій відповідає координата y_a і діяння x_{1a} *і* x_{2a}. Через точку *А* проведемо площину , паралельну площині x_1y. Перетинаючись з екстремальною поверхнею, вона дає екстремальну лінію. Залишаючи x_2 постійною, шукаємо цей частковий екстремум (тобто умову $\frac{dy}{dx_1}=0$) зміною x_1 від x_{1a} до x_{1b}. Одержуємо точку *В*. Через точку *В* проведемо площину S_2, паралельну площині x_2y. Перетин її з екстремальною поверхнею дасть екстремальну лінію *2*. Залишаючи x_1 постійною, відповідно до умови $\frac{dy}{dx_1}=0$, шукаємо другий частковий екстремум (тобто умова $\frac{dy}{dx_2}=0$) зміною x_2 від x_{2a} до x_{2c}, одержуємо точку *С*.

Повторюємо цю операцію доти, поки $\frac{dy}{dx_1}$ і $\frac{dy}{dx_2}$ не дорівнюватимуть нулю. Практично вектор стану *у* буде здійснювати коливання біля екстремальної точки при поперемінній зміні x_1 і x_2. Зазначений метод нескладно поширити на будь-яку кількість змінних, від яких залежить екстремум.

Візьмемо тепер лінії рівних значень *у*, які позначимо *В* і *С*. Проекції цих ліній на площину x_1x_2 — $b'c'$. З рис. 4.7, ***а*** видно, що поперемінно змінювати x_1 і x_2 потрібно тоді, коли траєкторії x_1 і x_2 стануть дотичними до проекцій ліній рівних значень , тобто до кривих b' і c'.

Основним недоліком методу є повільна збіжність пошуку і неможливість настроювання в деяких випадках. Перевага методу — це простота алгоритму і його схемної реалізації, що іноді є вирішальним при виборі методу пошуку.

Метод градієнта полягає в тому, що система рухається в напрямку, зворотному миттєвому напрямку вектора градієнта функції. При цьому рух може бути неперервним або кроковим.

Градієнтом grad *у* називається вектор, спрямований по нормалі до поверхні рівня убік зростання (убування) функції *у* і який чисельно дорівнює швидкості зміни функції за напрямком

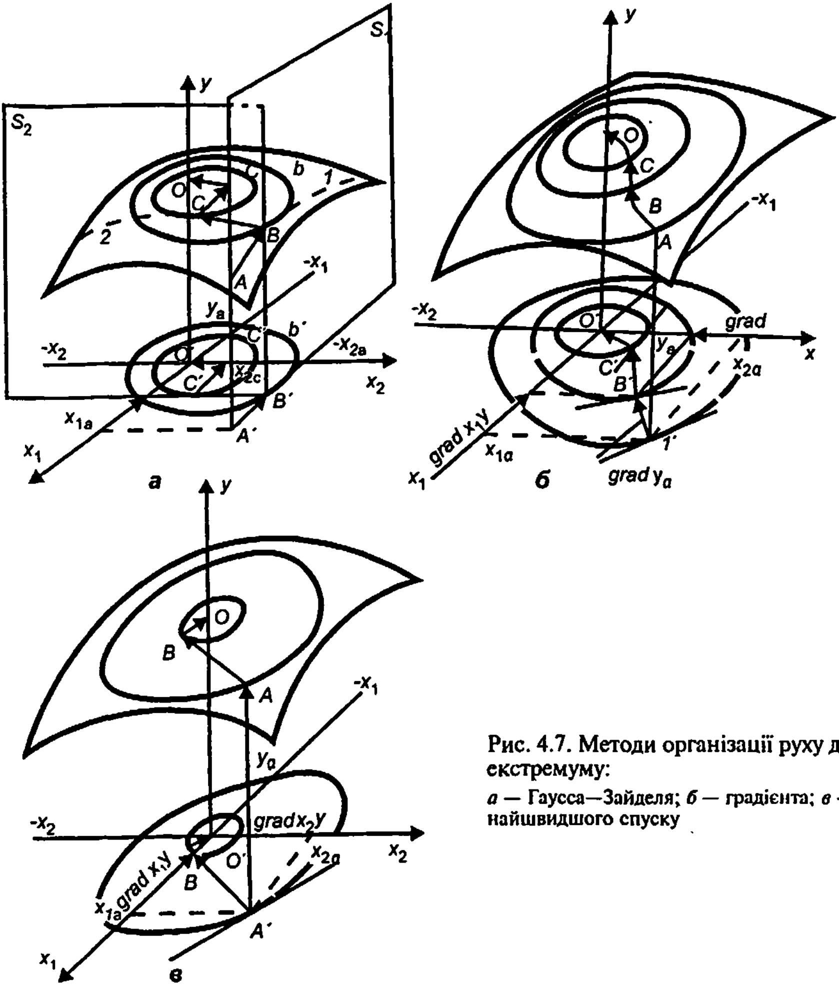


Рис. 4.7. Методи організації руху до екстремуму:

а — Гаусса—Зайделя; *б* — градієнта; *в* — найшвидшого спуску

$$|\operatorname{grad} y| = \frac{dy}{dn}. \tag{4.26}$$

Розглянемо екстремальну поверхню (рис. 4.7, *б*). Спроектуємо на площину x_1x_2 лінії рівного значення y. Одержимо концентричні еліпси, якщо екстремальна поверхня апроксимована еліптичним параболоїдом. Припустимо, що об'єкт знаходиться в точці A, якій відповідає координата y_a і діяння x_1 і x_2. Візьмемо градієнт у точці A:

$$\operatorname{grad} y_a = \frac{\partial y_a}{dn}.$$

Геометричний градієнт буде перпендикуляром до дотичної в точці на лінії рівного значення. Проекції градієнта на осі x_1 і x_2 відповідно будуть:

$$\operatorname{grad}_{x_1} y = \frac{\partial y}{dx_1};$$

$$\operatorname{grad}_{x_2} y = \frac{\partial y}{dx_2}.$$

Почнемо змінювати діяння x_1 і x_2 зі швидкістю, пропорційною градієнтам:

$$x_1 = a_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} t;$$

$$x_2 = a_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} t.$$

Неперервно вимірюючи градієнт і змінюючи пропорційно йому швидкості діяння x_1 і x_2, будемо переміщатися від однієї лінії рівних рівнів до іншої, поки не досягнемо точки, де $\frac{dy}{dx_1} = \frac{dy}{dx_2} = 0$. Отримана траєкторія AO на екстремальній поверхні є траєкторією кульки, що вільно скочується під дією сили ваги з екстремальної точки. У цій точці x_1 і x_2 не треба більше змінювати.

Практично вектор $\bar{y}$ буде здійснювати коливання біля точки екстремуму при незначних змінах x_1 і x_2.

Можна вимірювати градієнт не неперервно, а дискретно з деяким кроком h. Впливи змінюються стрибками, розміри яких пропорційні складовим градієнта:

$$\Delta x_1 = b_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} t;$$

$$\Delta x_2 = b_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} t.$$

При такому методі пошуку екстремум досягається достатньо швидко. Очевидно, що при кроковому прямуванні збіжність пошуку залежить від правильного вибору робочого кроку (коефіцієнта b_i). При значних і яскраво вираженій нелінійності функції, яка оптимізується в околі y_i, пошук може розходитися. При малих b_i і функції, близької до лінійної, зростає час прямування до екстремуму завдяки збільшенню часу аналізу складових градієнта і робочого часу.

Неперервне прямування можливе при неперервному вимірюванні всіх складових градієнта, а це може відбутися лише при пошуку з рознесенням частот пошукового сигналу ($\omega_{\text{п}i} \neq \omega_{\text{п}j}$; $i \neq j$). При кроковому пошуку методом градієнта значним недоліком є необхідність складного аналізу (спробних кроків перед робочим кроком), перевагою — його точність (що сприяє використанню методу градієнта).

Метод найшвидшого спуску є розвитком крокового пошуку методом градієнта. Сутність його в тому (рис. 4.5, *в*), що початкове положення характеризується точкою A, у якій градієнт

$$|\operatorname{grad} y|_a = \left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)_a.$$

Запишемо проекції градієнта на осі x_1 і x_2

$$\operatorname{grad}_{x_1} y = \frac{\partial y}{\partial x_1};$$

$$\operatorname{grad}_{x_2} y = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Пропорційно градієнтам будемо змінювати x_1 і x_2 доти, поки не одержимо $\frac{dy}{dl_1} = 0$. Це відбудеться тоді, коли вектор градієнта торкнеться якої-небудь проекції лінії рівних значень y (точка B). У цій точці знову виміряємо градієнт:

$$|\operatorname{grad} y|_b = \left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)_b.$$

Знову змінюємо x_1 і x_2, швидкості яких пропорційні складовим градієнта доти, поки $\frac{dy}{dl_2} \neq 0$. Повторюючи зазначені операції декілька разів, попадаємо в точку екстремуму за траєкторією ABO. Під час пошуку x_1 і x_2 можна змінювати кроками або неперервно.

Метод найшвидшого спуску простіший, ніж метод градієнта і має менший час виходу в екстремальну точку. Метод найшвидшого спуску градієнта можна поширити на незалежних змінних.

При неперервному прямуванні нове вимірювання градієнта провадиться при $\frac{dy}{dt} = 0$, тому що при нерухомій екстремальній поверхні значення $\frac{dy}{dt}=0$ означає, що $\frac{dy}{dl_i}=0$. При кроковому прямуванні такий алгоритм дає змогу вибирати коефіцієнт b_i при меншому обсязі апріорної інформації про характер функції, яка оптимізується, тому що зменшення швидкості робочого кроку не призводить до збільшення часу аналізу. Неважко помітити, що чим більш полога лінія градієнта функції, яка оптимізується, тим вигідніше використання методу найшвидшого спуску в порівнянні з методом градієнта. Велика швидкість збіжності є основною перевагою цього методу і робить його основним при настроюванні багатомірних систем.

Якщо об'єкт з істотно нелінійними градієнтними напрямками, то метод найшвидшого спуску вироджується в метод градієнта.

Крім регулярного пошуку, існує множина алгоритмів випадкового пошуку, в основі яких — випадкове переглядання станів системи з множини можливих станів $\{X\}$, що забезпечують множину значень $\{Y\}$ на виході системи. Переглядання станів припиняється, якщо система потрапляє в підмножину $\{X^*\}$, що забезпечує виконання заданої вимоги, тобто при $y \in \{Y^*\}$. Методи випадкового пошуку не одержали широкого поширення. Переваги і відмінності методів випадкового пошуку від регулярного аналогічні перевагам і відмінностям випадкової вибірки в порівнянні з регулярною. Випадковий пошук за випадковістю вибирання чергового стану систем не може потрапити «в пастку» типу «сідла» для методу градієнта або «хребта» для методу Гаусса—Зайделя.

Розглянемо деякі алгоритми випадкового пошуку і насамперед алгоритм чисто випадкового пошуку, уперше застосований у гомеостаті Ешбі. Пошук заснований на визначенні знака збільшення функції якості при випадковому напрямку спробного кроку. Якщо напрямок спробного кроку результативний (знак збільшення відповідає цілі пошуку: плюс при пошуку максимуму або мінус при пошуку мінімуму), то в цьому ж напрямку здійснюється робочий крок, а з нового положення — спробний крок у випадковому напрямку. Якщо в результаті спробного кроку зростання показника якості не відповідає поставленій задачі, то робочий крок не провадиться, а система або повертається у вихідне положення і здійснює спробний крок в іншому напрямку, або у новому напрямку з тієї точки, де вона розміщується після попереднього (неправильного) спробного кроку. Ці варіанти чисто випадкового пошуку називаються відповідно ***випадковим пошуком із поверненням і випадковим пошуком із перерахунком***. На рис. 4.8 показане прямування системи до екстремуму при обох варіантах пошуку.

Алгоритм випадкового пошуку з поверненням може бути поданий у вигляді:

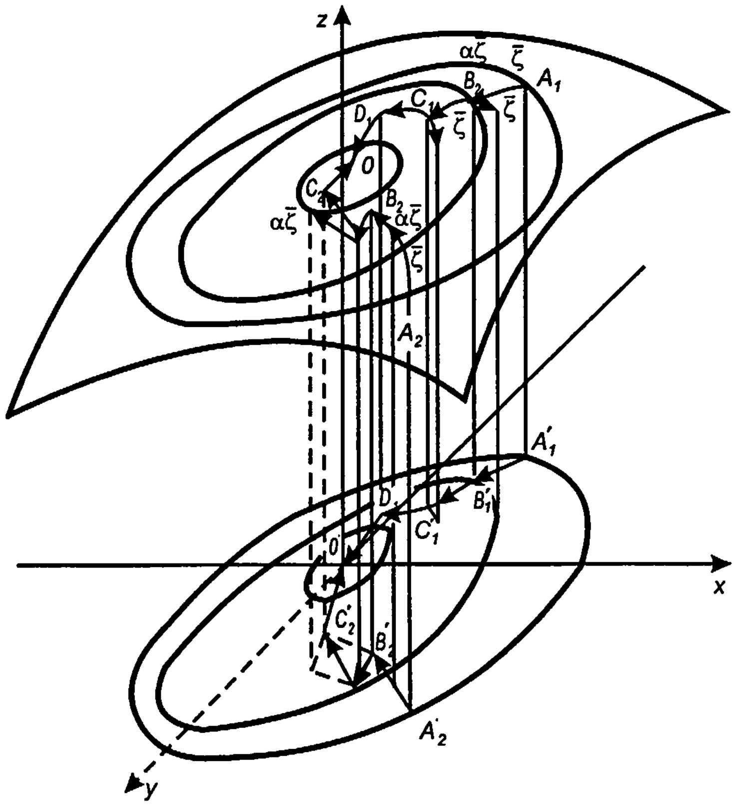


Рис.4.8. Організація прямування до екстремуму при випадковому пошуку

$$\Delta\bar{x}_{i+1} = \begin{cases} \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}; \\ \alpha\bar{\zeta} \quad \text{при} \quad y(\bar{x}_i) \lessgtr y(\bar{x}_i + 1); \\ -\Delta\bar{x}_i \quad \text{при} \quad y(\bar{x}_i) \underset{\geq}{\leq} y(\bar{x}_i + 1), \end{cases} \qquad (4.27)$$

де $\bar{x}$ — вектор стану входу об'єкта; $\bar{\zeta}$ — випадковий одиничний вектор; α — величина робочого кроку.

Знаки нерівностей визначаються метою пошуку (максимум або мінімум).

Алгоритм випадкового пошуку з перерахунком

$$\Delta\bar{x}_{i+1} = \begin{cases} \alpha\bar{\zeta} \text{ при } y(\bar{x}_i) \gtrless y(\bar{x}_{i+1}); \\ -\Delta\bar{x}_i + \alpha\bar{\zeta} \text{ при } y(\bar{x}_i) \lesseqgtr y(\bar{x}_{i+1}), \end{cases} \tag{4.28}$$

У науковій літературі наведено дослідження кількості проб, що забезпечують задану ймовірність успіху пошуку, і показано, що кількість проб не залежить від кількості регулюючих впливів. Необхідну кількість проб n можна визначити із співвідношення

$$n = \frac{\log(1 - S^*)}{\log(1 - k)}, \tag{4.29}$$

де S^* — необхідна ймовірність успіху; k — величина, що характеризує близькість вихідної області до екстремуму (відсоток кількості регулюючих діянь, що дають позитивний результат); S^* , k вибирають за апріорною інформацією.

До методів випадкового пошуку належать і методи статистичного градієнта, і статистичного найшвидшого спуску. Суть методів у тому, що з вихідної точки провадиться декілька випадкових проб, визначається збільшення показника якості й утворюється векторна сума приростів. Напрямок градієнта вибирають за напрямком вектора суми. Алгоритм відповідає алгоритмам пошуку за методом градієнта і методом найшвидшого спуску.

Методами випадкового пошуку, особливо при використанні алгоритмів із самонавчанням, можуть вирішуватися досить складні задачі. Найбільш ефективне використання випадкових методів при великій кількості регульованих параметрів. Дослідження показали, що градієнтний і випадковий методи пошуку мають однакову ефективність при трьох регульованих параметрах. При меншій кількості параметрів більш ефективний регулярний пошук, при більшій — випадковий. Проте вибирати метод пошуку необхідно обов'язково з урахуванням об'єкта регулювання й умов роботи.

4.3.3. Особливості пошуку дрейфуючого екстремуму

Характеристики більшості об'єктів не залишаються з плином часу незмінними, а змінюються зі значними швидкостями. Крім того, іноді характеристики об'єктів не визначаються аналітично, а витрати на експериментальне визначення можуть бути дуже великі. У той же час будь-яка характеристика апроксимується відрізками достатньо простих кривих — парабол порядку, не вище другого, причому вигляд апроксимуючої параболи (коефіцієнти рівняння) залежить від значення вхідної координати. Границі зміни коефіцієнтів визначаються без значних витрат. Враховуючи, що при пошуку екстремуму вхідна координата змінюється з часом за визначеним або випадковим законом, характеристику будь-якого екстремального об'єкта можна уявити квадратичною параболою, дрейфуючою за часом.

Виділяють два основних випадки зміни характеристик за часом: на об'єкт впливає завада; відбувається регулярний дрейф характеристики. Обом випадкам неважко знайти аналоги в теорії звичайних систем автоматичного регулювання.

У промислових екстремальних об'єктах основним є випадковий або нерегулярний дрейф. При дослідженні нерегулярного дрейфу доцільно застосувати прийом, що широко використовується в теорії авторегулювання — дослідження поведінки систем при різних регулярних вхідних впливах і збуреннях — стрибок, лінійна, квадратична або синусоїдальна зміна сигналу з часом. Розглянемо вплив дрейфу характеристик на пошук екстремуму.

Рівняння дрейфуючої параболи має вигляд

$$y(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{4.30}$$

або після перетворень

$$y(x,t) = a(t)[x - x_e(t)]^2 + y_e(t), \tag{4.31}$$

де

$$x_e(t) = -\frac{b(t)}{2a(t)};$$

$$y_e(t) = c(t) - \frac{b^2(t)}{4a(t)}.$$

Розглянемо можливість використання розглянутих вище способів пошуку екстремуму у випадку дрейфуючої характеристики.

Пошук за приростом. Нехай зміна вхідної координати відбувається миттєво, тоді

$$\begin{aligned} &y(x+h,\ t) - y(x,\ t) = a(t)\{[x+h-x_e(t)]^2 - [x-x_e(t)]^2\}, \\ &y(x+h,\ t) - y(x,\ t) = a(t)\cdot 2h\left\{\frac{h}{2} + [x - x_e(t)]\right\}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

З виразу (4.32) очевидно, що при безінерційній зміні x пошук зводиться до малого околу x_e.

Проте реально вхідне діяння x не може змінюватися миттєво. Для цього необхідний деякий час τ, тоді, враховуючи

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= a(t-\tau) + \Delta a(\tau); \\ x_e(t) &= x_e(t-\tau) + \Delta x_e(\tau); \\ y_e(t) &= y_e(t-\tau) + \Delta y_e(\tau) \end{aligned}\right\} \quad (4.33)$$

і використовуючи рівняння параболи (4.33), знайдемо вираз для збільшення вихідного сигналу об'єкта:

$$\Delta y = y(x,t) - y(x-h, t-\tau);$$

$$\Delta y = a(t)[x - x_e(t)]^2 + y_e(t) - [a(t) - \Delta a(\tau)][x - h - x_e(t) + \Delta x_e(\tau)]^2 -$$

$$-y_e(t) + \Delta y_e(\tau).$$

Виконуючи ряд перетворень, отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta y &= a(t)[x - x_e(t)]^2 - a(t)[x - x_e(t) - h + \Delta x_e(\tau)]^2 + \\ &+ \Delta a(t)[x - x_c(t) - h + \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau) = 2a(t)[x - x_c(t)] \times \\ &\times [h - \Delta x_e(\tau)] - a(t)[h - \Delta x_c(\tau)]^2 + \Delta a(\tau)[x - x_e(t)]^2 - \\ &-2\Delta a(\tau)[x - x_e(t)][h - \Delta x_e(\tau)] + \Delta a(\tau)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 \Delta y_e(\tau) = \\ &= 2[a(t) - \Delta a(\tau)][h - \Delta x_e(\tau)][x - x_e(t)] - [a(t) - \Delta a(\tau)][h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \\ &+ \Delta a(\tau)[x - x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Проаналізувавши вираз (4.34), зауважимо, що приріст функції якості залежить не тільки від положення робочої точки відносно екстремуму, але і від швидкості дрейфу і спотворення форми характеристики.

Припустимо для простоти, що характеристики дрейфують з малим спотворенням форми. Це означає, що $a(t) >> \Delta a(\tau)$, тоді

$$\Delta y = 2a(t)[h - \Delta x_e(\tau)][x - x_e(t)] - a(t)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_c(\tau)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2a(t)h[x - x_e(t)] - 2a(t)\Delta x_e(\tau)[x - x_e(\tau)] - \\ &-a(t)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Порівнюючи вирази (4.35) і (4.36), можна сказати, що відстань до екстремуму визначиться точно лише при виконанні умови

$$\delta y(\tau) = 2a(t)\Delta x_e(\tau)[x - x_e(t)] + a(t)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau) = 0. \quad (4.36)$$

Знак Δy правильно визначить напрямок прямування до екстремуму, якщо

$$\delta y(h) = 2a(t)h[x - x_e(t)] > - \delta y(\tau) = 2a(t)\Delta x_e(\tau)[x - x_e(t)] +$$

$$+a(t)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 - \Delta y_e(\tau). \qquad (4.37)$$

З виразу (4.37) можна визначити величину h, що забезпечує стійку роботу екстремальної системи з пошуком за приростом.

Аналізуючи вираз (4.37), зауважимо, що знак Δy відповідає знаку $\delta y(h)$, якщо напрямок спробного кроку вибрано так, що виконується умова:

$$\operatorname{sign} \delta y(h) = -\operatorname{sign} \delta y(\tau), \qquad (4.38)$$

тому що $\Delta y = \delta y(h) - \delta y(\tau)$.

Враховуючи, що $\delta y(h) = 2a(t)h[x - x_e(t)]$, тобто при незмінному знаку $a(t)$ і $[x - x_e(t)]$ знак $\delta y(h)$ визначається тільки знаком h, умова (4.38) виконується при одному із знаків h. Отже, стійку роботу релейної екстремальної системи можна забезпечити, якщо контролювати збільшення функції якості як при позитивних, так і при від'ємних спробних кроках.

Розглянемо докладніше алгоритм вибору напрямку руху до екстремуму при перевірному реверсі спробного кроку.

На рис. 4.9 подано характеристики об'єкта, що відповідають часу t, $t+\tau$, $t+2\tau$. У початковий момент робоча точка має координати x_a, y_a. Перший спробний крок має позитивний напрямок. Якби характеристика була нерухома, то робоча точка потрапила б у точку B_1', але внаслідок дрейфу характеристики — в точку B_1. Відрізок BB_1' визначає $\delta y(h)$, відрізок B_1B_1' — $\delta y(\tau)$. При цьому умови (4.37) і (4.38) не виконуються, тому знак Δy неправильно визначає напрямок прямування до руху екстремуму (спробний крок зроблений у правильному напрямку, а приріст функції якості — від'ємний), тобто

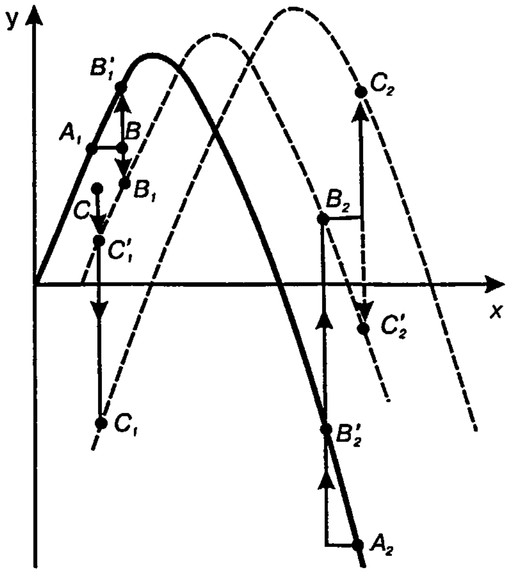


Рис. 4.9. Пошук екстремуму при дрейфі

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= |\delta y(h)| - |\delta y(\tau)| < 0; \\ \operatorname{sign} \Delta y &\neq \operatorname{sign} \delta y(h). \end{aligned}\right\} \qquad (4.39)$$

З точки B_1 зробимо перевірний спробний крок у від'ємному напрямку, одержимо $\delta y(h) = CC_1'$, $\delta y(\tau) = C_1'C_1$. Умова (4.37) знову не виконується, але виконується умова (4.38), тобто маємо

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= -|\delta y(h)| + |\delta y(\tau)| < 0; \\ \operatorname{sign}\Delta y &= \operatorname{sign}\delta y(h). \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

Порівнюючи величини приросту $\Delta y(h, \tau)$ і $\Delta y(-h, \tau)$, можна сформулювати правило визначення напрямку прямування до екстремуму: правильний напрямок визначає знак найбільшого з двох приростів функції якості, що відповідають двом напрямкам спробного кроку,

$$\operatorname{sign}\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \operatorname{sign}\Delta y(h), & |\Delta y(h)| > |\Delta y(-h)|; \\ -\operatorname{sign}\Delta y(-h), & |\Delta y(+h)| > |\Delta y(-h)|. \end{cases} \tag{4.41}$$

Системи, у яких напрямок спробного кроку час від часу змінюється для перевірки правильності обраного напрямку прямування до екстремуму руху, називаються ***системами з примусовою комутацією.*** Вони запропоновані В. В. Казакевичем.

На рис. 4.9 показано значення $\Delta y(h, \tau)$ і $\Delta y(-h, \tau)$, коли екстремум віддалиться від робочої точки A_1 і зміщується убік робочої точки A_2.

Визначимо, чому дорівнює різниця приростів функції якості, отриманих при різних знаках спробного кроку:

$$\Delta y(h, \tau) = 2a(t)h[x - x_e(t)] - 2a(t)\Delta x_e(\tau)[x - x_e(t)] -$$
$$-a(t)[h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau);$$

$$\Delta y(-h, \tau) = -2a(t)h[x - x_e(t)] - 2a(t)\Delta x_e(\tau)[x - x_e(t)] -$$
$$-a(t)[-h - \Delta x_e(\tau)]^2 + \Delta y_e(\tau).$$

Якщо дрейф рівномірний, тобто $\Delta x_e(\tau) = \text{const}$, $\Delta y_e(\tau) = \text{const}$, тоді

$$\Delta y(h, \tau) - \Delta y(-h, \tau) = 4a(t)h[x - x_e(t) + \Delta x_e(\tau)]. \tag{4.42}$$

З виразу (4.42) випливає, що різницю двох приростів можна використати для формування керуючого сигналу в пропорційній кроковій екстремальній системі.

Таким чином, крокові екстремальні системи при відповідній зміні алгоритму пошуку спроможні забезпечити стійкий пошук при дрейфі характеристик об'єкта, як випадковому, так і регулярному. При випадковому дрейфі використовуються статистичні оцінки приростів.

Для успішного пошуку в системах із запам'ятовуванням екстремуму необхідно, щоб при правильному напрямку прямування при пошуку максимуму виконувалася умова $\dfrac{dy}{dt} > 0$.

Визначимо швидкість зміни виходу

$$y = a(t)[x - x_e(t)]^2 + y_e(t);$$
$$\frac{dy}{dt} = 2a(t)[x - x_e(t)]\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_e(t)}{dt}\right] + \frac{da(t)}{dt}[x - x_e(t)]^2 + \frac{dy_e(t)}{dt}. \quad (4.43)$$

Вважаючи, як і раніше, що дрейф відбувається з малим спотворенням форми, одержимо

$$\frac{dy}{dt} = 2a(t)[x - x_e(t)]\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_e(t)}{dt}\right] + \frac{dy_e(t)}{dt}.$$

Бачимо, що успішний пошук можливий за таких умов:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} > \frac{dx_e(t)}{dt}; \\ &\left|2a(t)[x - x_e(t)]\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_e(t)}{dt}\right]\right| > \left|\frac{dy_e(t)}{dt}\right|. \end{aligned}\right\} \quad (4.44)$$

Виконання першої умови системи (4.44) необхідно для будь-якої екстремальної системи, тому що інакше неможливо «наздогнати» екстремум. Друга умова показує, що на пошук методом запам'ятовування екстремуму значний вплив має вертикальний дрейф характеристик.

Як і при кроковому пошуку, реверс прямування дає змогу правильно визначити напрямок руху (похідна $\frac{dy}{dt}$ або змінює знак, або значно збільшується залежно від співвідношення швидкостей горизонтального дрейфу, зміни вхідного сигналу і швидкості вертикального дрейфу), тому примусова комутація при деякому ускладненні алгоритму пошуку забезпечує стійку роботу. Проте при значних швидкостях дрейфу перевагу варто віддати системам з кроковим вимірюванням приростів.

Пошук з визначенням похідної за часом. Здиференціювавши за часом вираз для дрейфуючої екстремальної характеристики, отримаємо

$$\frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt}[x - x_e(t)]^2 +$$
$$+ 2a(t)[x - x_e(t)]^2\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_e(t)}{dt}\right] + \frac{dy_e(t)}{dt}. \quad (4.45)$$

Поділимо похідну на $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{\frac{dy(x,t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{da(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}[x-x_e(t)]^2+$$

$$+2a(t)[x-x_e(t)]\left[1-\frac{\frac{dx_e(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]+\frac{\frac{dy_e(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \qquad (4.46)$$

Знайдемо похідну по x від виразу екстремальної характеристики (4.31):

$$\frac{dy(x,t)}{dt}=2a(t)[x-x_e(t)]. \qquad (4.47)$$

Порівнюючи (4.46) і (4.47), можна зробити висновок, що пошук з визначенням похідної за часом можливий лише при незалежному пошуку і при виконанні умов (4.44).

Пошук із синусоїдальним пошуковим сигналом. Оскільки амплітуда коливань на виході пропорційна $\frac{\partial y}{\partial x}$, а похідна $y_x=2a(t)[x-x_c(t)]$, цей метод єдиний, що приводить до мети в умовах значного дрейфу без зміни алгоритму пошуку. Це випливає і з аналізу приростів функції якості, що відповідають $+h$ і $-h$. Дійсно, періодичний пошуковий сигнал може розглядатися як періодична перевірна комутація.

Підводячи підсумок вищевикладеному, зауважимо, що в умовах дрейфу характеристик найбільш успішний пошук забезпечують системи з модуляцією. При значних швидкостях дрейфу і необхідності у перевірних комутаціях крокові екстремальні системи (нагадаємо, що мається на увазі крокове вимірювання виходу) прямують до систем із модуляцією, які дають можливість легко одержати статистичні оцінки положення робочої точки відносно екстремуму і забезпечити якісну завадостійкість пошуку.

Контрольні запитання

1. З яких етапів складається процес проектування?
2. Що означають поняття проектне рішення і проектна операція?
3. Що означають поняття евристичного і систематичного рішення проектування технічних об'єктів?
4. Дайте визначення понять моделювання, модель? Назвіть види моделей.
5. Розкрийте сутність системного підходу моделювання.
6. Розкрийте сутність фізичних і абстрактних моделей.
7. Назвіть три основних рівні моделювання складних систем.
8. Перерахуйте основні властивості складних систем.

9. Для чого використовується орієнтований граф (орграф) і чим він описується?
10. Що таке оптимізація параметрів системи?
11. Що означають поняття строго допустима і оптимальна система?
12. Назвіть основні етапи оптимізації параметрів системи.
13. Назвіть основні вихідні параметри системи, які визначають її показник якості K_i.
14. Що означає критерій переваги (критерій оптимальності)?
15. Що означають поняття: інженерний синтез, векторний синтез, скалярний синтез, глобальний синтез, частковий синтез, математичний синтез?
16. Які способи пошуку екстремуму?
17. Які екстремальні системи називаються з незалежним пошуком, пропорційними?
18. Дайте характеристику основних методів регулярного пошуку екстремуму, переваги і недоліки кожного з них.
19. Які особливості пошуку дрейфуючого екстремуму?

Список рекомендованої літератури

1. *Батищев Д. И.* Поисковые методы оптимального проектирования. — М.: Сов. радио, 1975. — 216 с.
2. *Гостев В. И., Стеклов В. К.* Системы автоматического управления с цифровыми регуляторами. — К: Радіоаматор, 1998. — 704 с.
3. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. — М.: Сов. радио, 1975. — 367 с.
4. *Дегтярев Ю. И.* Методы оптимизации. — М.: Сов. радио, 1980. — 272 с.
5. *Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин А. М.* Основы оптимального и экстремального управления. — М.: Высш. шк., 1969. — 296 с.
6. *Стеклов В. К.* Проектування систем автоматичного керування. — К: Вища шк., 1995. — 232 с.
7. *Стеклов В. К., Беркман Л. Н.* Оценка параметров системы управления интеллектуальной сети // Пр. наук.-практ. конф. «Стратегія входження України в світовий інформаційний простір». — К., 1997. — С. 82—84.
8. *Стеклов В. К., Беркман Л. Н.* Построение математической модели интеллектуальной сети // Сб. науч. тр. по материалам V междунар. конф. «Теория и техника передачи, приёма и обработки информации». — Харьков — Туапсе, 1999. — С. 6—9.
9. *Стеклов В. К., Беркман Л. Н.* Системный метод оптимального проектирования интеллектуальной сети // Зв'язок. — 1998. — № 4. — С. 28—32.
10. *Стеклов В. К., Беркман Л. Н.* Телекомунікаційні мережі. — К.: Техніка, 2001. — 392 с.
11. *Стеклов В. К., Стародуб Н. М., Беркман Л. Н.* Выбор обобщённого критерия оптимальности систем управления информационными сетями // Зв'язок. — 2000. — № 5. — С. 48—50.