## Потенційна завадостійкість джерел повідомлень

1. Потенційна завадостійкість приймання двійкових повідомлень

Обмеження:

1) Сигнал відомий точно.

2) Завади адитивні.

3) $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$.

4) В якості критерію оптимальності вибираємо критерій мінімуму повної або середньої ймовірності помилкового прийому $p$ (Котельникова)

$$p = p(x_1)p_1 + p(x_2)p_2 = p(x_1)(1 - q_1) + p(x_2)(1 - q_2).$$

Знайти ймовірність правильного прийому $q_1$ першого повідомлення (y(t)= $s_1(t) + n(t)$):

$$\int_0^T [y(t) - s_1(t)]^2 dt < \int_0^T [y(t) - s_2(t)]^2 dt;$$

$$\int_0^T n^2(t)dt < \int_0^T n^2(t)dt + 2\int_0^T n(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt + \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt;$$

$$\int_0^T n(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt > -\frac{1}{2}\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt;$$

Розкладання Котельникова

$$q_1 = \int_{\xi_п}^{\infty} w(\xi)d\xi; \ \int_0^T \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt = \begin{cases} k \neq l; 0 \\ k = l; 1/f_\beta. \end{cases}$$

Тоді

$$\xi = \int_0^T n(t)s(t)dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} n_k \varphi_k(t) \sum_{l=1}^{n} s_l \varphi_l(t)dt = \sum_{k=1}^{m} \frac{s_l}{2f_\beta} n_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

де

$$\xi_k = \frac{s_l}{2f_\beta} n_k; \ m(\xi) = 0$$

тому

$$w(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_k}} \exp\left\{-\frac{\xi_k^2}{2\sigma_{\xi_k}^2}\right\}; \ \sigma_{\xi_k}^2 = \left(\frac{s_l}{2f_\beta}\right)^2 \sigma^2; \ w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right\};$$

$$\sigma_\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{s_l}{2f_\beta}\right)^2 \sigma^2; \ \sigma^2 = N_0 f_\beta; \ \frac{1}{2f_\beta} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = \int_0^T s^2(t)dt,$$

звідки випливає формула дисперсії розподілу випадкової величини

$$\sigma_{\xi}^{2}=\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t)dt=\frac{N_0}{2}\int_0^T\left[s_1(t)-s_2(t)\right]^2dt\,.$$

Нормована по дисперсії випадкова величина

$$t=\frac{\xi}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}};$$

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}}\int_{\xi_\text{п}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}d\xi;$$

$$\boxed{\Phi(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^x e^{-t^2}dt}.$$

Властивості (рис.1):

$$\Phi(-x)=-\Phi(x);\ \Phi(0)=0;\ \Phi(\infty)=1;\ \Phi(-\infty)=-1;$$

$$P\{\gamma\le\xi\le\beta\}=0{,}5\left[\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right)-\Phi\left(\frac{\gamma-m}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right)\right].$$

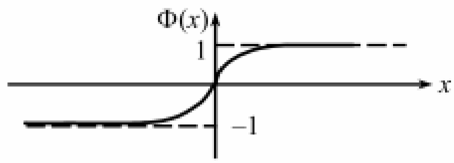

Рис.1 Функція Φ(x)

$$m=0;\ \beta=\infty;\ \gamma=\xi_\text{п}/\sqrt{2}\sigma_{\xi};$$

$$\xi_\text{п}=\frac{\int_0^T(S_1(t)-S_2(t))^2dt}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_0^T(S_1(t)-S_2(t))^2dt}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\int_0^T(S_1(t)-S_2(t))^2dt}{N_0}}\,.$$

$$q_1=0{,}5\left[\Phi(\infty)+\Phi\left[\frac{\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt}}\right]\right]=$$

$$=0{,}5\left[1+\Phi\left[\sqrt{\frac{\int_0^T[s_1(t)-s_2(t)]^2dt}{2N_0}}\Big/\sqrt{2}\right]\right]=0{,}5\left[1+\Phi\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right],$$

де

$$\alpha = \sqrt{\frac{\int\limits_0^T \left[s_1(t) - s_2(t)\right]^2 dt}{2N_0}}\,; \; p_1 = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right].$$

Повна ймовірність помилкового прийому

$$P_{p(x_1)=p(x_2)=0{,}5} = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right].$$

## 2 Завадостійкість прийому сигналу з амплітудною, частотною і фазовою модуляцією, криві завадостійкості

**1.Амплітудна модуляція** (рис.2)

$$\alpha_{\text{АМ}} = \sqrt{\frac{E}{2N_0}} = \frac{h}{\sqrt{2}}; \quad \frac{E}{N_0} = h_0^2;$$

$$P_{\text{АМ}} = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[\frac{h_0}{2}\right]\right]; \; E = P_{\text{c}}T.$$

**2.Частотна модуляція** (рис.2)

$$\alpha_{\text{ЧМ}} = \sqrt{\frac{E}{N_0}} = h_0;$$

$$P_{\text{ЧМ}} = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[\frac{h_0}{\sqrt{2}}\right]\right].$$

**3.Фазова модуляція** (рис. 2)

$$\alpha_{\text{ФМ}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = h_0\sqrt{2}\,; \;\; P_{\text{ФМ}} = 0{,}5\left[1 - \Phi(h_0)\right].$$

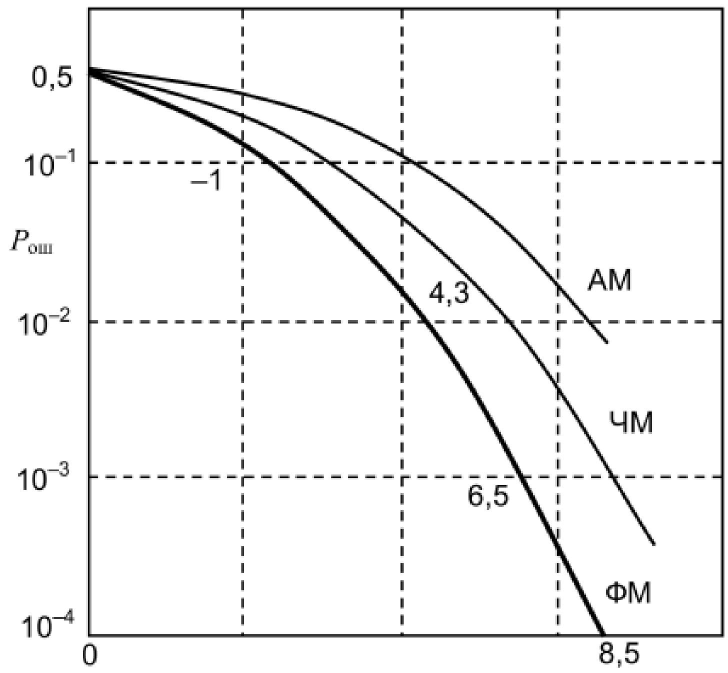


Рис.2. Криві завадостійкості

У загальному випадку

$$P = 0{,}5\ [1 – \Phi(\gamma h_0)],$$

де

$$\gamma_{АМ} = 1/2;\ \gamma_{ЧМ} = 1/\sqrt{2};\ \gamma_{ФМ} = 1.$$

**Завадостійкість прийому на фоні випадкових перешкод**

Необхідно знайти ймовірність помилки

$$P = f(h_0^2)$$

при вихідних даних:

$$p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5;$$

Ймовірність помилки для двійкового сигналу визначається ймовірностями правильного прийому $p_1$ і $p_2$:

$$P = 0{,}5(p_1 + p_2)$$

Згідно з правилом прийняття рішення:

$$\int_0^T y(t)s_1(t)dt < \int_0^T y(t)s_2(t)dt\ ;$$

$$y(t) = s_i(t) + n(t) + u_n(t),$$

звідси

$$\xi < \xi_{пороговое};$$

$$s_{1\text{-}2}(t) = s_1(t) - s_2(t);\ \xi = \int_0^T n(t)s_{1-2}(t)dt;\ m_\xi = 0;$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{N_0}{2}\int_0^T s_{1-2}^2(t)dt = N_0E(1-r_{1,2});$$

$$\xi_n = -E(1 - r_{1,2} + h_n r_{1\text{-}2,п}); \quad h^2_{п} = E_{п} / E,$$

де $\varphi$ – кут між векторами сигналів; $r_{1,2}$ – коефіцієнт подібності між першим і другим сигналами:

$$r_{1,2п} = \frac{\int_0^T s_{1-2}(t)u_n(t)dt}{\sqrt{E_п}\sqrt{E}};$$

$$\frac{\xi_n}{\sqrt{2}\sigma_\xi} = \frac{E(1-r_{1,2}+h_п r_{1-2,п})}{\sqrt{2}\sqrt{N_0E(1-r_{1,2})}} = h_0\left(\frac{\sqrt{1-r_{1,2}}}{\sqrt{2}} + \frac{h_п r_{1-2,п}}{\sqrt{2}\sqrt{1-r_{1,2}}}\right) =$$

$$= h_0\left(\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})} + \frac{h_п r_{1-2,п}}{\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})}}\right) = h_0\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})}\left(1 + \frac{h_п r_{1-2,п}}{1-r_{1,2}}\right);$$

$$\frac{\xi_n}{\sqrt{2}\sigma_\xi} = h_0\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})}(1+\beta);\ \beta = \frac{h_п r_{1-2,п}}{1-r_{1,2}}.$$

$$h_п = \frac{\uparrow E_п}{E};\ \beta = \frac{h_п \uparrow r_{1-2,п}}{1-r_{1,2}}$$

$$\downarrow h_п = \frac{E_п}{\uparrow E}; \Rightarrow \beta = \frac{h_п \uparrow r_{1-2,п}}{1-r_{1,2}}$$

Ймовірність помилкового прийому першого повідомлення

$$p_1 = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[h_0(1+\beta)\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})}\ \right]\right].$$

Нелінійна функція

$$p_2 = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[h_0(1-\beta)\sqrt{0{,}5(1-r_{1,2})}\ \right]\right].$$

Якщо кореляційний момент $r_{1,2,П}$ близький до одиниці, то така перешкода називається імітаційною.

## 3 Узгоджений фільтр

Кореляційні інтеграли можна обчислити на основі узгодженого фільтру (УФ).

Якщо на вхід УФ подати вхідний сигнал y(t), то напруга на виході буде

$$z(t) = \int_0^t h(\tau) y(t-\tau) d\tau,$$

де $h(\tau)$ – імпульсна характеристика фільтра. Виберемо $h(\tau)$ такою, щоб у момент часу t = T отримати максимальне значення відношення сигнал/шум:

$$h^2_{\text{с/ш}} \to \max;$$

$$P_{c\,\text{вых}} = \left( \int_0^T h(\tau) u_S(t-\tau) d\tau \right)^2; \quad P_{\text{ш вых}} = \left( \int_0^T h(\tau) n(t-\tau) d\tau \right)^2.$$

Рішенням цієї задачі є функція

$$h(\tau) = A\, S(t_0 - \tau).$$

Для фізичної реалізації фільтра необхідно, щоб

$$h(\tau) = 0, \text{ при } \tau < 0,$$

якщо $t_0 \geq T$, то умова фізичної реалізованості виконується, оскільки при цьому

$$(t_0 - \tau) > T \to u_S(t_0 - \tau) = 0, \text{ при } \tau < 0.$$

Реакція на сигнал узгодженого фільтра тривалістю T існує тільки на тривалості 2T.

Передаточна функція УФ визначається перетворенням Фур'є:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} S(t_0 - \tau) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) e^{-j\omega(t_0 - \tau)} d\tau = A S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Відгук УФ тоді одержимо у вигляді

$$z(T) = A\int_0^T y(T-\tau)u_S(T-\tau)d\tau = A\int_0^T y(t)u_S(t)dt .$$

Узгоджений фільтр служить для формування одного відліку, за яким судять про те, який сигнал був переданий.

Тепер доведемо, що

$$h^2_{\text{с/ш}}(T) \to \max$$

якщо фільтр узгоджено:

$$P_{\text{ш}} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 \, d\omega$$

$$h^2 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 \, d\omega}.$$

Згідно з нерівністю Буняковского–Шварца

$$\left(\int_a^b A(x)B(x)dx\right)^2 \le \int_a^b A^2(x)dx \int_a^b B^2(x)dx$$

рівність наступає, якщо B(x) = $a$A(x):

$$A(\omega) = S^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0);\quad B(\omega) = K(j\omega);\quad A^*(\omega) = S(j\omega)\exp(-j\omega t_0);$$

$$h^2(T) \le \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)e^{j\omega t_0}|^2 \, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 \, d\omega}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 \, d\omega} =$$

$$= \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 \, d\omega = \frac{2E}{N_0} = 2h_0^2 .$$

Реалізація узгодженого фільтра (рис.3, 4):

$$u_S(t) = \sum_{k=0}^{N} X(k) \frac{\sin 2\pi\Delta F(t - k\Delta t)}{2\pi\Delta F(t - k\Delta t)}.$$

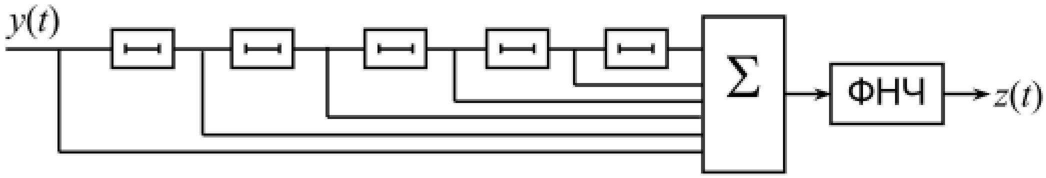


Рис.3. Нерекурсивний фільтр

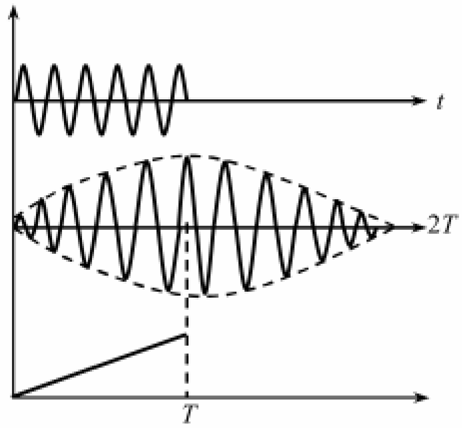


Рис. 4. Вхідний і вихідний сигнали фільтру

## 4 Потенційна завадостійкість прийому недвійкових повідомлень

Кількість рівноймовірних повідомлень N (N > 2).
Двійкові:

$$\begin{cases} x_1 \to s_1(t) \\ x_2 \to s_2(t) \end{cases}$$

а) Недвійкові:

$$\begin{cases} x_1 \to s_1(t) \\ x_2 \to s_2(t) \\ \vdots \\ x_n \to s_n(t) \end{cases}$$

б)

$$k \to N = 2^k.$$

1. Структурна схема приймача недвійкових повідомлень на основі правила максимуму функції правдоподібності (рис.5):

$$r_1 = \int_0^T s_1(t) y(t) dt;$$

$$r_2 = \int_0^T s_2(t) y(t) dt;$$

$$\vdots$$

$$r_n = \int_0^T s_n(t) y(t) dt.$$

Правило:

$$r_ш > r_i (i \neq m)$$

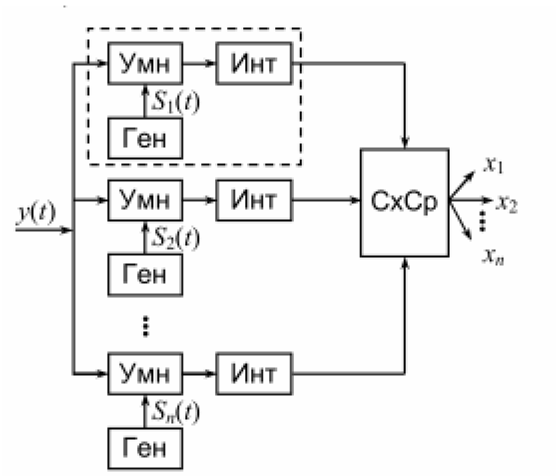


Рис.5. Структурна схема приймача недвійкових повідомлень на основі правила максимуму функції правдоподібності

На рис.5 позначено: Умн – помножувач; Ген – генератор; Інт - інтегратор, СхСр – схема порівняння.

Максимальна завадостійкість забезпечується при максимальних відстанях між сигналами.

Эквідистантная система сигналів – це система, відстані між кожною парою яких однакові і максимально можливі.

Розрізняють ортогональні (рис.6) і симплексні (рис.7) системи сигналів.

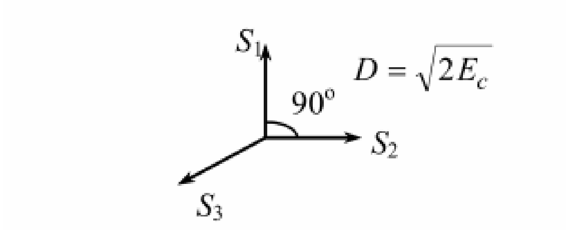


Рис. 15.6. Ортогональні системи для N=3

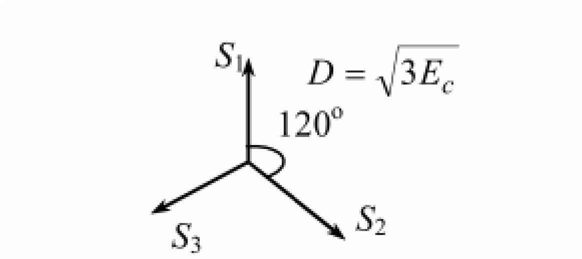


Рис. 15.7. Симплексні системи для N=3

$$\int_0^T s_m(t)y(t)dt > \int_0^T s_i(t)y(t)dt\,,\ \xi_m>\xi_i,\ i=1(1),\ n,\ \ i\neq m.$$

Ймовірність правильного прийому Q

$$\boxed{Q=\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi_i<\xi_m)^{N-1}W(\xi_m)d\xi_m}.$$

$$P(\xi_i<\xi_m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma_\xi\int_{-\infty}^{\xi_m}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}d\xi,$$

$\bar{\xi}$ – середнє значення

$$W(\xi_m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_m}}\exp\left\{-\frac{\left(\xi_m-\bar{\xi}_m\right)^2}{2\sigma_{\xi_m}^2}\right\};\quad \frac{\xi_m-\bar{\xi}_m}{\sqrt{2}\sigma_{\xi_m}}=\theta\,;$$

$$Q=\frac{1}{\sqrt{\pi}2^{N-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\Phi(\theta+h_0)\right]^{N-1}e^{-\theta^2}d\theta\,.$$

Одним із способів підвищення завадостійкості є кодування укрупненням:

$$N=2^k;\ h^2{}_0=E/\,N_0=kE_2/\,N_0=k\ h^2{}_{02},$$

де $E_2$ – енергія на один двійковий елемент або на один біт інформації; $kh_{02}^2$ – кількість інформації на один символ.

$$\begin{aligned} 00 &\to s_1 \\ 01 &\to s_2 \\ 10 &\to s_3 \\ 11 &\to s_4 \end{aligned}$$

$P_{m_{\text{в}}}$ – верхня гранична оцінка ймовірності помилки:

$$P_1 = 0{,}5\left[1 - \Phi\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right]\right]; \; P_{m_{\text{в}}} = \frac{N-1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha_{m_i}}{\sqrt{2}}\right)\right];$$

$$\alpha_{m_i} = \sqrt{\frac{\int_0^T \left[s_m(t) - s_i(t)\right]^2 dt}{2N_0}}, \; i = 1\ldots N, \; i \neq m; \; \frac{\alpha_{m_i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{0{,}5kh_{02}^2(1 - \cos\varphi_{m_i})}.$$

Суперечливі фактори (рис.8):

Якщо розмір блока $k$ збільшується, то $N$ збільшується теж, що приводить до збільшення $P_{m_{\text{в}}}$ .

При цьому, якщо $k$ збільшується, то збільшується $\alpha_{m_i}$, при цьому зменшується $P_{m_{\text{в}}}$, тобто існує граничне значення $h_{\text{пор}}^2$ , при якому при $h_{02}^2 < h_{\text{пор}}^2$ ймовірність помилки $P_{\text{п}}$зростає і зменшується при $h_{02}^2 > h_{\text{пор}}^2$


$$\boxed{h_{02\,\text{кр}}^2 = 0{,}693}$$

$$h_{02}^2 > h_{02\,\text{кр}}^2 : c \uparrow N \Rightarrow \downarrow P$$

$$h_{02}^2 < h_{02\,\text{кр}}^2 : c \downarrow N \Rightarrow \uparrow P$$

$$N_3 > N_2 > N_1$$

Рис.8. Криві завадостійкості

На основі послідовності перетворень, що дозволяють визначити значення $h_{02}^2$ знайдемо співвідношення для швидкості та пропускної здатності каналу:

$$P_2 < 0{,}5\exp\left(-h_{02}^2/2\right); \quad P_m < 0{,}5N\exp\left(-\frac{1}{2}h_{20}^2\log_2 N\right);$$

$$h_{20}^2 = \frac{P_c T_2}{N_0} = \frac{P_c}{N_0} = \frac{1}{V}; \; H_2(A) = 1; \quad V = \frac{H(A)}{T};$$

$$h_{m0}^2 = \frac{P_c T_m}{N_0} = \frac{P_c T_2}{N_0}\log N = h_{20}^2\log N;$$

$$P_m < \frac{1}{2}N\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{P_c}{T_0}\frac{\log N}{V}\right) = \frac{1}{2}e^{\ln N}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{P_c}{T_0}\frac{\log N\log e}{V}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(+\ln N\left(1-\frac{1}{2}\frac{P_c}{N_0}\frac{\log e}{V}\right)\right),$$

зі збільшенням $N$ зменшується $P_m$,, якщо

$$1-\frac{1}{2}\frac{P_c}{N_0}\frac{\log e}{V} < 0.$$

Звідки при $\Delta F = \infty$

$$V < \frac{1}{2}\frac{P_c}{N_0}\log e = C_\infty,$$

тобто отримуємо відоме співвідношення для каналу з перешкодами $V < C$.