4. Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку.

Означення 1. Рівняння виду

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad (1)$$

де функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ задані і неперервні на деякому інтервалі $(a; b)$, називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Функція $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$ називають коефіцієнтами рівняння (1), а функцію $f(x)$ – правою частиною рівняння (1).

У випадку, коли всі коефіцієнти є сталі дійсні числа, рівняння (1) називається рівнянням із сталими коефіцієнтами.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням або рівнянням без правої частини.

Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним неоднорідним або рівняння з правою частиною.

Наприклад, рівняння $y''\sin x + 3y' - \frac{1}{x}y = 0$

є лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку, а рівняння

$$5y''' - y'' + 4y' + 2y = \cos^2 3x$$

– лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) третього порядку із сталими коефіцієнтами.

Встановимо деякі основні властивості лінійних диференціальних рівнянь, які виражаються рядом теорем.

Якщо функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ неперервні на інтервалі $(a; b)$, то для рівняння (1) має місце теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку).

Ліву частину рівняння (1) позначають

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

і називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку.

Маємо $$L_n(y) = f(x) \qquad (2)$$

Очевидно, що лінійний диференціальний оператор задовольняє умовам: $$L_n(Cy) = CL_n(y) \qquad (3)$$

де C – довільна стала, $L_n(y_1 + y_2) = L_n(y_1) + L_n(y_2)$ (4)

<u>Теорема 1.</u> Якщо функції y_1, y_2, ..., y_n є розв'язками ЛОДР

$$L_n(y) = 0, \qquad (5)$$

то довільна лінійна комбінація цих функцій $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, де C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння (довести самостійно).

При знаходженні загального і частинного розв'язків рівняння (1) важливу роль відіграє поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

<u>Означення 2.</u> Функції y_1, y_2, ..., y_n називаються лінійно залежними на інтервалі $(a; b)$, якщо існує n дійсних чисел α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, з яких принаймні одне відмінне від нуля, таких, що виконується тотожність

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n \equiv 0 \ (x \in (a; b)) \qquad (6)$$

В противному разі, тобто коли тотожність (6) виконується тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, функції y_1, y_2, ..., y_n називаються лінійно незалежними на інтервалі $(a; b)$.

Означення 3. Сукупність n лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, ..., y_n рівняння (5) називається фундаментальною системою розв'язків.

За її допомогою будується загальний розв'язок ЛОДР (5). Справедлива слідуюча теорема.

Теорема 2. (наслідок з теореми 1). Якщо розв'язки y_1, y_2, ..., y_n ЛОДР (5) утворюють фундаментальну систему розв'язків в інтервалі (a; b), то функція

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \qquad (7)$$

де C_i – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (5).

Таким чином, щоб розв'язати ЛОДР (5), треба знайти n частинних розв'язків цього рівняння таких, що утворюють фундаментальну систему і побудувати з них лінійну комбінацію (7).

Означення 4. Визначником Вронського (або вронскіаном) системи функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називається визначник

$$W[y_1, y_2, \ldots y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Теорема 3. Якщо функції y_1, y_2, ..., y_n на інтервалі (a; b) мають по-хідні до (n – 1)-го порядку включно і лінійно залежні, то визначник Вронського для цих функцій тотожно дорівнює нулю $W \equiv 0$ в (a; b).

□ За означенням 2 лінійної залежності функцій y_1, y_2, ..., y_n існують числа α_1, α_2, ..., α_n не всі одночасно рівні нулю такі, що має місце рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ для ($\forall x \in (a; b)$). Диференціюючи цю рівність (n – 1) раз, отримаємо систему n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими α_i (i = 1, 2, ..., n). За умовою ця система має нетривіальні розв'язки (адже не всі α_i одночасно рівні нулю), тобто головний визначник системи дорівнює нулю для ($\forall x \in (a; b)$). Але цей визначник і є визначник Вронського. Отже, $W[y_1, y_2, \ldots y_n] = 0$ ■

Теорема 4. Для того, щоб розв'язки y_1, y_2, ..., y_n ЛОДР (5) з неперервними коефіцієнтами були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського $W \not\equiv 0$ для $\forall x \in (a; b)$ (довести спробуйте самостійно для випадку $n = 2$).

Приклад 1. Функції $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що вронскіан

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0 \text{ для } \forall› \in R, \text{ при } k_1 \neq k_2.$$

Приклад 2. Довести, що функції $y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{kx}$ лінійно незалежні.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + xke^{kx} \end{vmatrix} = e^{kx}(e^{kx} + xke^{kx}) - ke^{kx}xe^{kx} = e^{2kx} +$$

$$+ kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0 \quad (\forall x \in R)$$

Оскільки вронскіан $W[y_1, y_2] \neq 0$, то функції $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні.

Приклад 3. Показати, що система функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$, є фундаментальною для рівняння $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, і записати його загальний розв'язок.

Складемо вронскіан

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -6e^{2x} \neq 0 \quad (\forall x \in R)$$

Отже, функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$ лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР. За теоремою 2 загальний розв'язок рівняння має вигляд: $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

Поставимо питання про знаходження загального розв'язку ЛНДР (2).

Теорема 5. Загальний розв'язок ЛНДР (2) має вид

$$y = \tilde{y} + y^*, \qquad (7)$$
де $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР (5),

а y^* – який-небудь частинний розв'язок ЛНДР (2).

 Покажемо спочатку, що функція (7) є розв'язком рівняння (2). Справді, підставивши функцію $y=\tilde{y}+y^*$ в рівняння $L_n(y) = f(x)$ дістанемо $L_n(y) = L_n(\tilde{y} + y^*) = L_n(\tilde{y}) + L_n(y^*) = L_n(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i) +$

$$+ L_n(y^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i L_n(y_i) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

Перший доданок $\sum_{i=1}^{n} C_i L_n(y_i) = 0$, оскільки y_i ($i = 1, 2, ..., n$) – це частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $L_n(y) = 0$. Другий доданок $L_n(y^*) = f(x)$, оскільки y^* – розв'язок рівняння $L_n(y)=f(x)$. Отже, функція (7) є розв'язком рівняння (2).

Покажемо тепер, що функція (7) є загальним розв'язком рівняння (2), тобто доведемо, що довільні сталі C_i, які містяться у функції (7), можна підібрати так, щоб розв'язок рівняння (2) задовільнив наперед задані умови:
$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Запишемо функцію (7) у вигляді $y = \tilde{y} + y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y^*$ і підставимо початкові умови
$$y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} + y_0{}^*,$$
$$y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + ... + C_n y'_{n0} + y_0{}^{*\prime},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_0{}^{(n-1)} = C_1 y_{10}{}^{(n-1)} + C_2 y_{20}{}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}{}^{(n-1)} + y_0{}^{*(n-1)}$$

Дістали систему n-лінійних рівнянь з n невідомими $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} = y_0 - y_0{}^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + ... + C_n y'_{n0} = y'_0 - y_0{}^{*\prime}, \\ C_1 y_{10}{}^{(n-1)} + C_2 y_{20}{}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}{}^{(n-1)} = y_0{}^{(n-1)} - y_0{}^{*(n-1)}, \end{cases} \qquad (8)$$

Визначник цієї системи, будучи визначником Вронського фундаментальної системи розв'язків y_1, y_2, ..., y_n, відмінний від нуля. Тому система (8) має єдиний розв'язок
$$C_1 = C_{10},\quad C_2 = C_{20},\quad ...,\quad C_n = C_{n0}.$$

Отже, існують такі значення $C_1, C_2, ..., C_n$, при яких розв'язок рівняння (2) задовольняє задані початкові умови. Цим доведено, що функція (7) є загальним розв'язком рівняння (2) ■