

Розрахункова робота № 2

Тема. Диференціальні рівняння. Системи диференціальних рівнянь.

Завдання 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$. 1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$. 1.4. $\sqrt{3+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$.

1.5. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$. 1.6. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

1.7. $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$. 1.8. $e^{2x} + 5 dy + ye^{2x} dx = 0$.

1.9. $20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx$. 1.10. $y^4 + e^x dy - e^x dx = 0$.

1.11. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$. 1.12. $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$. 1.14. $e^x + 8 dy - ye^x dx = 0$.

1.15. $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$. 1.16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.

1.17. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$. 1.18. $y \ln y + xy' = 0$.

1.19. $1 + e^x y' = ye^x$. 1.20. $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$. 1.22. $y^4 + \ln y + xy' = 0$.

1.23. $3 + e^x yy' = e^x$. 1.24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0$.

1.25. $xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$. 1.26. $1 + e^x yy' = e^x$.

1.26. $\sqrt{5+y^2} dx + 4x^2 y + y dy = 0$. 1.30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y' = 0$.

1.28. $3x^2 y + y dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$. 1.29. $2xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$.

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. 2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$. 2.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$. 2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

2.7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$. 2.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

$$2.9. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

$$2.11. y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$2.13. y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$$

$$2.15. y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$$

$$2.17. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$$

$$2.19. y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$2.21. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$2.23. y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$2.25. 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$2.27. y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$2.29. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

$$2.10. xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$2.12. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.14. xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$2.16. xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.18. xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

$$2.20. xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.22. xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$2.24. xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$2.26. xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$2.28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.30. xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Завдання 3. Знайти розв'язок задачі Коші (тобто знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам).

$$3.1. y' - y/x = x^2,$$

$$y|_1 = 0.$$

$$3.2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x,$$

$$y|_{\pi/2} = 0.$$

$$3.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$y|_0 = 0.$$

$$3.4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x,$$

$$y|_{\pi/4} = 1/2.$$

$$3.5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,$$

$$y|_{-1} = 3/2.$$

- 3.6. $y' - \frac{x}{x+1}y = e^x x + 1$, $y|_0 = 1$.
- 3.7. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- 3.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y|\pi = \frac{1}{\pi}$.
- 3.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y|_1 = 1$.
- 3.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y|_0 = \frac{2}{3}$.
- 3.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y|_2 = 4$.
- 3.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$, $y|_1 = e$.
- 3.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y|_1 = 1$.
- 3.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y|_1 = 4$.
- 3.15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y|_1 = -5/6$.
- 3.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y|_1 = 1$.
- 3.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$, $y|_1 = 3$.
- 3.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y|_1 = 1$.
- 3.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y|_1 = 1$.
- 3.20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y|_1 = e^{-1}$.
- 3.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$, $y|_0 = \frac{2}{3}$.
- 3.22. $y' + xy = -x^3$, $y|_0 = 3$.
- 3.23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x x + 1^2$, $y|_0 = 1$.
- 3.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y|_0 = 1$.

$$3.25. y' - 2y/x + 1 = x + 1^3, \quad y_0 = 1/2.$$

$$3.26. y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y_0 = 3.$$

$$3.27. y' - 4xy = -4x^3, \quad y_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$3.28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y_1 = 1.$$

$$3.29. y' - 3x^2 y = \frac{x^2 + x^3}{3}, \quad y_0 = 0.$$

$$3.30. y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y_1 = 1.$$

Завдання 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам та обчислити значення отриманої функції в т. x_0 .

$$4.1. y''' = \sin x, \quad x_0 = \pi/2, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0, \quad y''_0 = 0.$$

$$4.2. y''' = 1/x, \quad x_0 = 2, \quad y_1 = 1/4, \quad y'_1 = y''_1 = 0.$$

$$4.3. y'' = 1/\cos^2 x, \quad x_0 = \pi/3, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 3/5.$$

$$4.4. y''' = 6/x^3, \quad x_0 = 2, \quad y_1 = 0, \quad y'_1 = 5, \quad y''_1 = 1.$$

$$4.5. y'' = 4 \cos 2x, \quad x_0 = \pi/4, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$$

$$4.6. y'' = 1/(1+x^2), \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0.$$

$$4.7. xy''' = 2, \quad x_0 = 2, \quad y_1 = 1/2, \quad y'_1 = y''_1 = 0.$$

$$4.8. y''' = e^{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{9}{8}, \quad y'_0 = \frac{1}{4}, \quad y''_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$4.9. y''' = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = -1/8, \quad y''_0 = 0.$$

$$4.10. y'' = 1/\sqrt{1-x^2}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad y'_0 = 3.$$

$$4.11. y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}, \quad x_0 = \frac{5}{4}\pi, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$4.12. y'' = x + \sin x, \quad x_0 = 5, \quad y_0 = -3, \quad y'_0 = 0.$$

$$4.13. y'' = \arctg x, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = y'_0 = 0.$$

$$4.14. y'' = \tg x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x_0 = \pi/4, \quad y_0 = 1/2, \quad y'_0 = 0.$$

$$4.15. y''' = e^{x/2} + 1, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 8, \quad y'_0 = 5, \quad y''_0 = 2.$$

$$4.16. y'' = x/e^{2x}, \quad x_0 = -1/2, \quad y_0 = 1/4, \quad y'_0 = -1/4.$$

- 4.17. $y'' = \sin^2 3x$, $x_0 = \pi/12$, $y_0 = -\pi^2/16$, $y'_0 = 0$.
- 4.18. $y''' = x \sin x$, $x_0 = \pi/2$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $y''_0 = 0$.
- 4.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$, $x_0 = 5\pi/2$, $y_{\pi/2} = \pi/2$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y''(\frac{\pi}{2}) = -1$.
- 4.20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $x_0 = \pi$, $y_0 = -e^{-\pi}$, $y'_0 = 1$.
- 4.21. $y'' = \sin^3 x$, $x_0 = 2,5\pi$, $y_{\pi/2} = -7/9$, $y'_{\pi/2} = 0$.
- 4.22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1/8$, $y'_0 = \frac{1}{8} \cos 2$, $y''_0 = \frac{1}{2}$.
- 4.23. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x/2}$, $x_0 = 4\pi$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$.
- 4.24. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x$, $x_0 = \pi/2$, $y_0 = -5/9$, $y'_0 = -2/3$.
- 4.25. $y'' = 2 \sin^2 x \cos x$, $x_0 = \pi$, $y_0 = 1/9$, $y'_0 = 1$.
- 4.26. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$.
- 4.27. $y'' = 2 \cos x \sin^2 x - \cos^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y_0 = 2/3$, $y'_0 = 2/3$.
- 4.28. $y'' = x - \ln x$, $x_0 = 2$, $y_1 = -5/12$, $y'_1 = 3/2$.
- 4.29. $y'' = 1/x^2$, $x_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y'_1 = 1$.
- 4.30. $y''' = \cos 4x$, $x_0 = \pi$, $y_0 = 2$, $y'_0 = 15/16$, $y''_0 = 0$.

Завдання 5. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

- 5.1. $1 - x^2 y'' - xy' = 2$.
- 5.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
- 5.3. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.
- 5.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.
- 5.5. $y'' x \ln x = y'$.
- 5.6. $xy'' - y' = x^2 e^x$.
- 5.7. $y'' x \ln x = 2y'$.
- 5.8. $x^2 y'' + xy' = 1$.
- 5.9. $y'' = -x/y$.
- 5.10. $xy'' = y'$.
- 5.11. $y'' = y' + x$.
- 5.12. $xy'' = y' + x^2$.
- 5.13. $xy'' = y' \ln y'/x$.
- 5.14. $xy'' + y' = \ln x$.
- 5.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.
- 5.16. $y'' + 2x y'^2 = 0$.
- 5.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$.
- 5.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$.
- 5.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$.
- 5.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.
- 5.21. $y'' + 4y' = 2x^2$.
- 5.22. $xy'' - y' = 2x^2 e^x$.
- 5.23. $x y'' + 1 + y' = 0$.
- 5.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$.

5.25. $y'' + y' = \sin x$.

5.26. $x^2 y'' = y'^2$.

5.27. $2xy'' y' = y'^2 - 4$.

5.28. $y''' x \ln x = y''$.

5.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$.

5.30. $1 + x^2 y'' = 2xy$.

Завдання 6. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку.

6.1. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.2. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.3. $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.4. $y'' + 2y y'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$.

6.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2 y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$.

6.6. $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.7. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.8. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

6.9. $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

6.10. $y''' = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$.

6.11. $2yy'' - y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

6.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

6.13. $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6.14. $yy'' - 2 y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

6.15. $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.16. $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.17. $y''(1+y) = 5 y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.18. $y''(2y+3) - 2 y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

6.19. $4 y''^2 = 1 + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6.20. $2 y'^2 = y - 1 y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

- 6.21. $1 + y'^2 = yy''$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- 6.22. $y'' + y - y'^3 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 6.23. $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 6.24. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 6.25. $y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y) y'^2 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 6.26. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$.
- 6.27. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 6.28. $y^3 y' y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1, y'(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.
- 6.29. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 6.30. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

- 7.1. $y'' + y' = 2x - 1$.
- 7.2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x$.
- 7.3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$.
- 7.4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.
- 7.5. $y'' - 3y' + 2y = 34 - 12x e^{-x}$.
- 7.6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.
- 7.7. $y'' + y = 2 \cos x - 4x + 4 \sin x$.
- 7.8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$.
- 7.9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x$.
- 7.10. $y'' + 6y' + 9y = 48x + 8 e^x$.
- 7.11. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.
- 7.12. $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$.
- 7.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$.
- 7.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.
- 7.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.
- 7.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$.

- 7.17.** $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$.
- 7.18.** $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$.
- 7.19.** $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$.
- 7.20.** $y'' + 5y' = 39 \cos 3x - 105 \sin 3x$.
- 7.21.** $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$.
- 7.22.** $y'' - 4y' + 5y = 24 \sin x + 8 \cos x e^{-2x}$.
- 7.23.** $y'' + 16y = 8 \cos 4x$.
- 7.24.** $y'' + 9y' = 9x^4 + 12x^2 - 27$.
- 7.25.** $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.
- 7.26.** $y'' + 4y' = e^x - 24 \cos 2x + 2 \sin 2x$.
- 7.27.** $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.
- 7.28.** $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.
- 7.29.** $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.
- 7.30.** $2y'' + 7y' + 3y = 222 \sin 3x$.