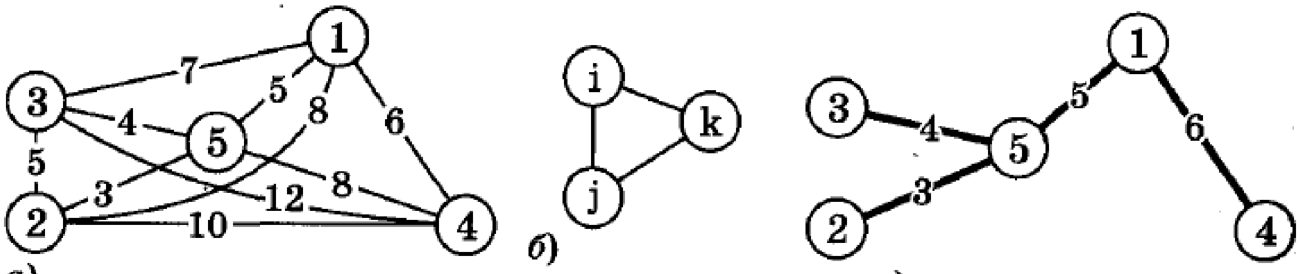
Алгоритм Ейлера для розв'язання задачі про комівояжера

- **Алгоритм Ейлера** реалізовує наближений розв'язок задачі про комівояжера.
- Розглянемо приклад повного графа.



а) б) в)

- Зауважимо, **алгоритм Ейлера, що будує гамільтонів цикл мінімальної довжини для повного графа**, працює лише за такої умови:
  - для кожної трійки вершин i, j, k виконується нерівність трикутника:

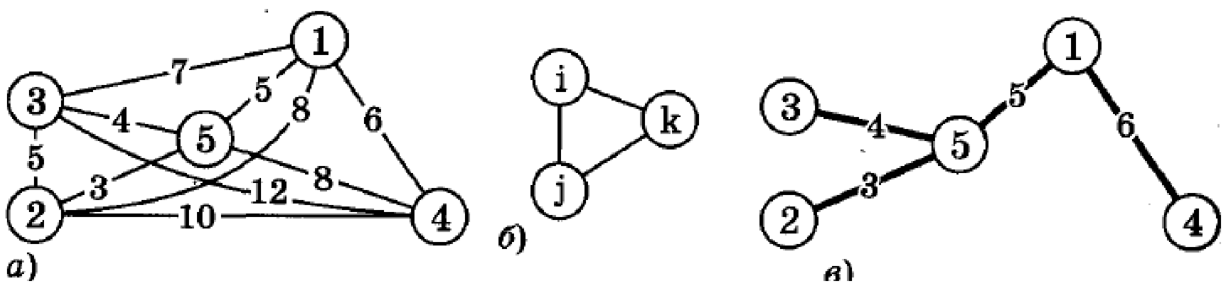
$$d_{ij}<d_{ik}+d_{kj}$$

Алгоритм Ейлера для розв'язання задачі про комівояжера

- **Граф** у задачі про комівояжера є **повним**.
- **Комівояжер** повинен відвідати **кожне місто**, побувавши в ньому лише один раз.
- Шлях комівояжера є **гамільтоновим циклом**.
- Оскільки у повному графі для комівояжера є **(N - 1) варіант відвідування міст**, отже, **гамільтонових циклів є стільки само**.
- Задача зводиться до *побудови найкоротшого гамільтонового циклу в повному графі.*
- Як отримати найкоротший гамільтонів цикл?
- Алгоритм, результатом роботи якого, є підграф, що містить усі вершини заданого графа - ***алгоритм Прима і Краскала.***
- *Цей алгоритм дає змогу побудувати **остовне дерево мінімальної довжини**.*

Алгоритм Ейлера для розв’язання задачі про комівояжера

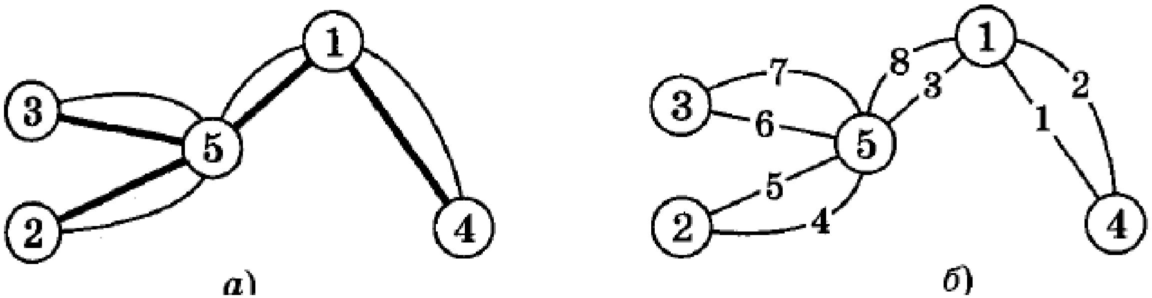
- Таке **остовне дерево у ЗК** буде складатися з ребер заданого графа, сумарна довжина яких є мінімальною, і буде містити **всі вершини заданого графа**, однак не буде циклом, а тим більше гамільтоновим (рис. в).



- Як перейти ***від остовного дерева до гамільтонового циклу***?
- Граф, який дає таку можливість, - це **ейлеровий граф**. Однією з умов його існування - ***степені усіх вершин повинні мати парні значення*** - ця **умова порушена** для даного графа**.**

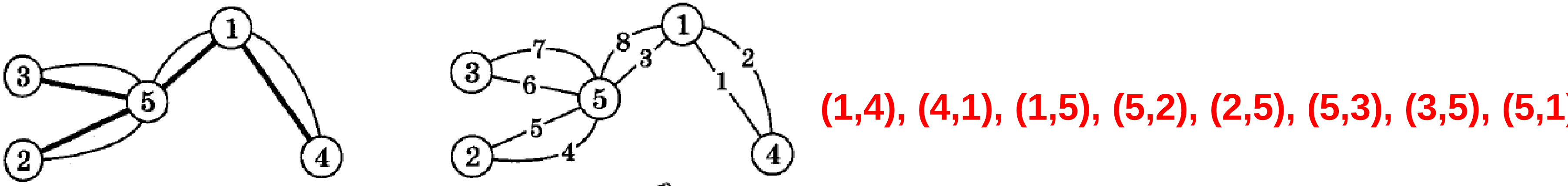
Алгоритм Ейлера для розв’язання задачі про комівояжера

- Штучно **утворимо ейлеровий граф із остовного дерева**, додавши до нього такі самі ребра.
- *Наприклад*, до ребра (3,5) додамо ребро (5,3) тощо (рис. а).
- Утворений граф є ейлеровим, оскільки <u>*степінь вершини, після множення на 2 стає парним.*</u>



- У новому графі, яким стало перетворене мінімальне остовне дерево, можна **визначити ейлеровий цикл.**
- Почнемо, *наприклад*, із вершини 1. **Застосувавши алгоритм визначення ейлерового циклу,** отримаємо таку послідовність ребер:

(1,4), (4,1), (1,5), (5,2), (2,5), (5,3), (3,5), (5,1).



а) б)

- До **ейлерового циклу** ввійшли всі ребра графа – реальні і фіктивні та двічі всі вершини.
- Такий цикл не є гамільтоновим. Спробуємо *одержати його з ейлерового циклу*.
- Запишемо послідовно всі вершини, які необхідно відвідати, обходячи граф ейлеровим циклом: **1441155225533551.**
- У цій послідовності одні й ті самі вершини входять більш як один раз, що *для гамільтонового циклу неприпустимо*.
- Виключимо з послідовності ті вершини, які вже в ній зустрічалися, але при цьому **збережемо порядок цих вершин**:

14~~411~~5~~5~~2~~255~~3~~355~~1.

- Залишено повторно тільки останню вершину 1 як ту, що завершує цикл обходу графа. У результаті отримано таку послідовність: **14 5 2 3 1.**

Алгоритм Ейлера для розв’язання задачі про комівояжера

14 5 2 3 1

- В останній послідовності вершини графа вказаний ***порядок його обходу***, при якому вони будуть відвідані лише по одному разу - це означає, що **визначено гамільтонів цикл.**
- **Відновимо** послідовність ребер, якими треба при цьому йти:

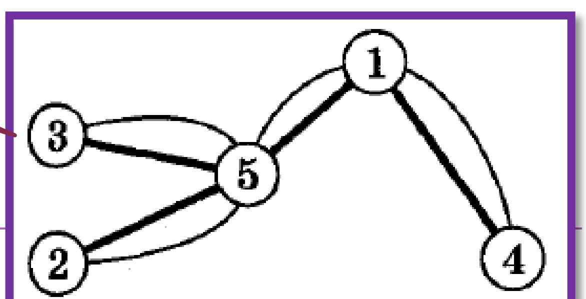
(1,4), (4,5), (5,2), (2,3), (3,1).

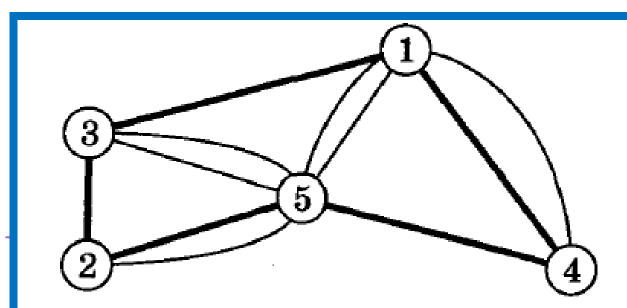
- Отриманий цикл *зображено півжирними лініями*.
- З’явилися нові ребра, які не брали участі в ейлеровому циклі:

(1,3), (2,3), (4,5).

- Однак це не суперечить умові поставленої задачі, оскільки **розглядається повний граф і зазначені ребра у ньому реально існують**.
- Залишається відкритим питання щодо його мінімальної довжини ГЦ.

було





стало

Алгоритм Ейлера для розв’язання задачі про комівояжера

- Запишемо ці дії у вигляді **алгоритму і проаналізуємо, якою може бути довжина побудованого гамільтонового циклу.**

1. Будуємо остовне дерево мінімальної довжини, сума ребер якого L_{min}.

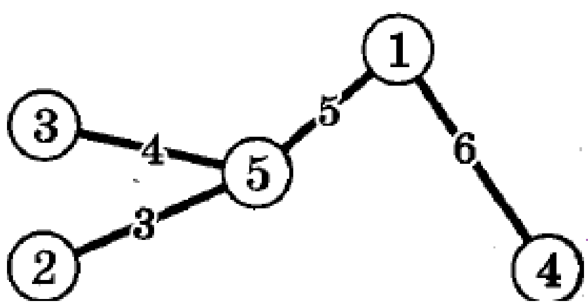
Коментар. Якби цей граф визначав і гамільтонів цикл, то задача була б одразу розв’язана. Однак **остовне дерево ніколи не є циклом!** Довжина мінімального остовного дерева $L_{min} = 18$.

2. Подвоюємо всі ребра.

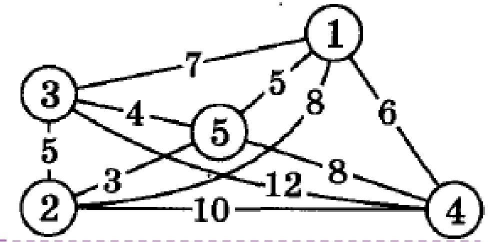
Коментар. **Довжина нового графа** стає вдвічі більшою від довжини мінімального остовного дерева $2L_{min} = 36$.

3. Будуємо ейлеровий цикл, у який входять усі ребра.

Коментар. При цьому довжина його становить також $2L_{min} = 36$.



Алгоритм Ейлера для розв’язання задачі про комівояжера



4. Виключаємо вершини, що повторюються при обході ейлерового циклу, і отримуємо гамільтонів цикл.

Коментар. Повернемося до послідовності вершин в ейлеровому циклі:

14~~411~~5~~5~~2~~255~~3~~355~~1.

Виключення ребер (4,1), (1,5) спричинило введення *нового ребра (4,5).*

Як при цьому змінилася довжина цієї частини циклу?

За умови виконання нерівності трикутника: $\mathbf{L_{45} < L_{41} + L_{15}}$.

У побудованого гамільтонового циклу його довжина, порівняно з ейлеровим циклом, **зменшилася**.

Аналогічна ситуація повториться і для **двох інших виключених** груп ребер:

$$\mathbf{L_{23} < L_{25} + L_{53},\ L_{31} < L_{35} + L_{51}.}$$

Додавши всі ці нерівності, отримаємо:

$$\mathbf{L_{45} + L_{23} + L_{31} < L_{41} + L_{15} + L_{25} + L_{53} + L_{35} + L_{51}.}$$

Заміна ребер тільки покращила підсумковий результат: $\mathbf{L_{rez} = 29.}$

(1,4), (4,5), (5,2), (2,3), (3,1)

Алгоритм Ейлера для розв'язання задачі про комівояжера

5. Завершення алгоритму.

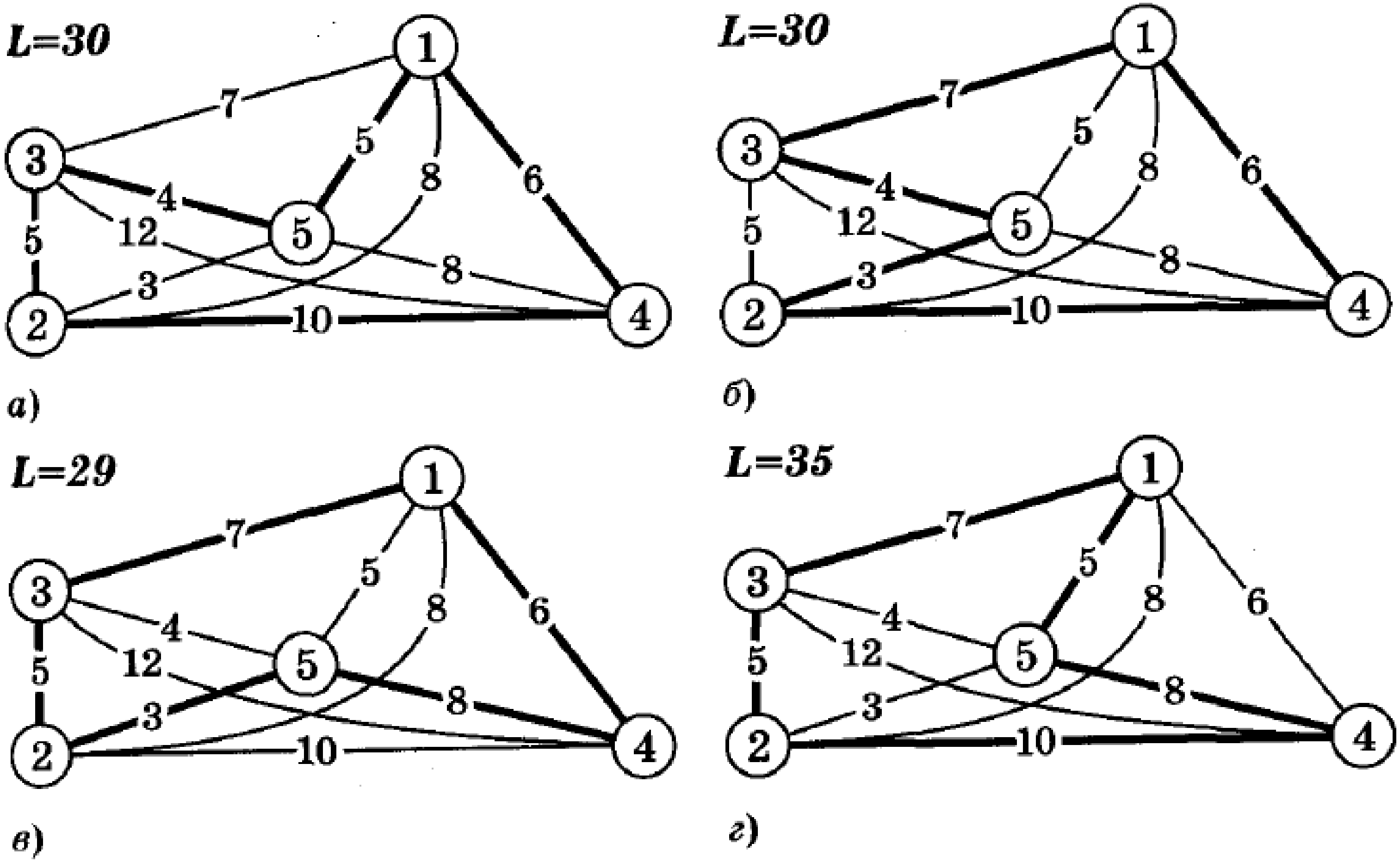
Коментар. У **побудовано гамільтонів цикл**, довжину якого можна оцінити так:

$$L_{rez} < 2L_{min},$$

тобто ***довжина гамільтонового циклу не перевищує подвоєну довжину мінімального остовного дерева.***

- Визначена *оцінка результату зверху*.
- *Оцінка знизу* - довжина невідомого мінімального гамільтонового циклу.
- ***Висновок***: у більшості задач про комівояжера буде отримано лише *приблизний розв'язок, більший за мінімальний, але точно менший за подвоєну довжину мінімального остовного дерева.*

Гамільтонові цикли у заданому повному графі



Гамільтонів цикл найменшої довжини становить **29**.

У результаті виконання алгоритму Ейлера отримано такий самий результат.

Вимоги до звітності

- **Звіт містить:**
  1. Приклад наближеного розв’язку задачі про комівояжера **алгоритмом Ейлера.**
  2. Лістинг програми.