Лекція 3. Задачі прийняття рішень. Прийняття рішень в умовах невизначеності. Ланцюги Маркова.

Однокритеріальна задача прийняття рішень.

Нехай результат керованого заходу залежить від обраного рішення (стратегії управління) і деяких невипадкових фіксованих факторів, повністю відомих особі, що приймає рішення. Стратегії управління можуть бути представлені у вигляді значень n-мірного вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на компоненти якою накладено обмеження, обумовлених рядом природних причин і мають вигляд

$$g_i = g_i(A_i, X) \{\leq, =, \geq\} b_i \; ; \qquad (2.2)$$

$$i = \overline{1, m}; \quad m \{<, =, >\} n,$$

де A_i, - деякий масив фіксованих невипадкових параметрів.

Умови (2.2) визначають область Ω_x допустимих значень стратегій X.

Ефективність управління характеризується деяким чисельним критерієм оптимальності F:

$$F = F(X, C) \, , \qquad (2.3)$$

де С - масив фіксованих, невипадкових параметрів. Масиви A_i і С характеризують властивості об'єктів, що беруть участь в управлінні, і умови протікання управлінні. Перед особою, яка приймає рішення, стоїть завдання вибору такого значення $X = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ вектора управління з області його допустимих значень Ω_X, яке максимізує значення критерію оптимальності F, а також значення цього максимуму $\overline{F}$

$$F = F(X, C) = \max_{x \in \Omega_X} F(X, C), \quad (2.4)$$

де область представляється умовою (2.2).

В (2.4) символи F і X позначають максимально досяжне в умовах (2.2) значення критерію оптимальності F і відповідне йому оптимальне значення вектора управління X.

Сукупність співвідношень (2.2), (2.3) і (2.4) являє собою загальний вигляд математичної моделі однокритерійним статичної детермінованої ЗПР.

Завдання в такій постановці повністю збігається із загальною постановкою задачі математичного програмування. Тому весь арсенал методів, розроблених для вирішення завдань математичного програмування, може бути використаний для вирішення задач прийняття рішень даного класу.

Розглянемо приклад однокритерійним статичної детермінованої ЗПР.

Нехай необхідно відображати кілька інформаційних моделей (наприклад, картографічну інформацію). Для відображення будь-якої з моделей завжди потрібно вирішити n різних завдань $з_1, з_2, \ldots, з_n$ (відображення символів, відображення векторів, поворот і переміщення зображенні, масштабування і т.п.). Всі завдання взаємно незалежні. Для вирішення них завдань можуть бути використані m різних мікропроцесорів $м_1, м_2, \ldots, м_k$. Протягом часу T мікропроцесор $м_j$, може вирішити, a_{ij} завдань типу $з_i (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$, тобто вирішити задачу $з_i$, кілька разів з одного й того ж алгоритму, але для різних вихідних даних.

Інформаційну модель можна відображати тільки в тому випадку, якщо вона містить повний набір результатів вирішення всіх завдань $з_1, з_2, \ldots, з_n$.

Потрібно розподілити завдання по мікропроцесором так, щоб число інформаційних моделей, синтезовані за час T, було максимально. Інакше говори, необхідно вказати, яку частину часу T мікропроцесор $м_j$ повинен займати рішенням завдання, $з_i$.

Позначимо цю величину через x_{ij} (якщо це завдання не буде вирішуватися на даному процесорі, то $x_{ij} = 0$).

Очевидно, що загальний час цікавою кожного мікропроцесора вирішенням тих завдань не повинен перевищувати загального запасу часу T, «частка» - одиниці. Таким чином, маємо такі обмежувальні умови:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1; j = \overline{1,m}$$

Загальна кількість рішень задачі, отриманих усіма мікропроцесорами разом,

$$N_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}; \; i = \overline{1,n}.$$

Так як інформаційна модель може бути синтезована лише з повного набору результатів вирішення всіх завдань, то кількість інформаційних моделей F буде визначатися мінімальним з чисел N_i.

Отже, маємо таку математичну модель: потрібно знайти такі x_{ij}, щоб був максимум функції F

$$F = \min_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}; \; i = \overline{1,n}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1; \; j = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \ge 0.$$

Загальна постановка однокритеріальної статичної задачі прийняття рішень в умовах ризику.

Як зазначалося, кожна обрана стратегія управління в умовах ризику пов'язана з безліччю можливих результатів, причому кожен результат має певну ймовірність появи, відому заздалегідь людині, що приймає рішення.

При оптимізації рішення в подібній ситуації стохастическую ЗПР зводять до детермінованої. Широко використовують при цьому такі два принципи: штучне зведення до детермінованої схеми і оптимізація в середньому.

У першому випадку невизначена, імовірнісна картина явища наближено замінюється детермінованою. Для цього усі учасники задачі випадкові чинники наближено замінюються якимись невипадковими характеристиками цих факторів (як правило, їх математичними очікуваннями).

Цей прийом використовується в грубих, орієнтовних розрахунках, а також в тих випадках, коли діапазон можливих значень випадкових величин порівняно малий. У тих випадках, коли показник ефективності управління лінійно залежить від випадкових параметрів, цей прийом призводить до того ж результату, що і «оптимізація в середньому».

Прийом «оптимізація в середньому» полягає в переході від вихідного показника ефективності Q, що є випадковою величиною:

$$Q = Q(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q),$$

де X - вектор управління; A - масив детермінированих чинників; $y_1, y_2, \dots, y_q$ - конкретні реалізації випадкових фіксованих факторів $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ до його осередненої, статистичної характеристиці, наприклад до його математичного сподівання M [Q]:

$$F = M[Q] = \underbrace{\iint \dots \int}_{q} Q(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q) \times f(y_1, y_2, \dots, y_q) dy_1, dy_2, \dots, dy_q = F(X, A, B). \quad (2.5)$$

Тут B - масив відомих статистичних характеристик випадкових величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$; $f(y_1, y_2, \dots, y_q)$ - закон розподілу ймовірностей випадкових величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$.

При оптимізації в середньому за критерієм (2.5) в якості оптимальної стратегії $\overline{X}$ буде обрана така стратегія, яка, задовольняючи обмеженням на область допустимих значень Ω_x вектора X, максимізує значення математичного очікування F = M [Q] вихідного показника ефективності Q, тобто.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, A, B) = \max F(X, A, B) = \max_{X \in \Omega_X} M[Q(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q)]. \quad (2.6)$$

У тому випадку, якщо число можливих стратегій i скінченне $i = \overline{1,I}$ і число можливих результатів j скінченне ($j = \overline{1,J}$), то вираз (2.6) переписується у вигляді

$$F = F(\overline{X}) = \max_{1 \le i \le I}[F(X_i)] = \max_{1 \le i \le I}[\sum_{j=1}^{J} P_{ij} Q_{ij}], \quad (2.7)$$

де Q_{ij} - значення показника ефективності управління в разі появи j-го результату при виборі i стратегії управління; P_{ij} - ймовірність появи j-го результату при реалізації i-й стратегії.

З виразів (2.6) і (2.7) випливає, що оптимальна стратегія X призводить до гарантованого найкращого результату тільки при багаторазовому повторенні ситуацій в однакових умовах. Ефективність кожного окремого вибору пов'язана з ризиком і може відрізнятися від середньої величини як в кращу, так і в гірший бік.

Порівняння двох розглянутих принципів оптимізації в стохастичних ЗПР показує, що вони являють собою детермінізації вихідної задачі на різних рівнях впливу стохастичних чинників. «Штучне зведення до детермінованої схеми» являє собою детермінізації на рівні чинників, «оптимізація в середньому» - на рівні показника ефективності.

Після виконання детермінізації можуть бути використані всі методи, які застосовуються для вирішення однокритеріальних статичних детермінованих ЗПР.

Розглянемо приклад однокритеріальної статичної задачі прийняття рішень в умовах ризику. Для створення картографічної бази даних необхідно кодувати картографічну інформацію. Використання поелементного кодування призводить до необхідності використання надзвичайно великих обсягів пам'яті. Відомий ряд методів кодування, дозволяющих істотно скоротити необхідний обсяг пам'яті [наприклад, лінійна інтерполяції, інтерполяція класичними многочленами, кубічні сплайни і.т.д]. Основним показником ефективності методу кодування є коефіцієнт стиснення інформації. Однак значення цього коефіцієнта залежить від виду кодіруемої картографічної інформації (гідрографія, межі адміністративних районів, дорожня мережа і т.д). позначимо через $Q_{ij}(i=1,n,\ j=1,m)$ значення коефіцієнта стиснення i-го методу кодування для j-го виду інформації. Конкретний району, який підлягає кодуванню, заздалегідь невідомий. Однак попередній аналіз картографічної інформації всього регіону і досвід попередніх розробок дозволяють обчислити ймовірність появи кожного з видів інформації. Позначимо через P_i, ймовірність появи j-го виду,

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1.$$

Тоді, використовуючи метод оптимізації в середньому, слід вибрати такий метод кодування, для якого

$$F = \max_i \sum_{i=1}^{m} P_i Q_{ij};\quad i=1,n.$$

Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Перш за все відзначимо принципову відмінність між стохастичними чинниками, що призводять до прийняття рішення в умовах нишпорячи, і невизначеними факторами, що приводять до прийняття рішення в умовах невизначеності. І ті, і інші призводять до розкиду можливих результатів результатів управління. Але стохастичні чинники повністю описуються відомої стохастичною інформацією, ця інформація і дозволяє вибрати луч–шее в середньому рішення. Стосовно до невизначеним факторів подібна інформація відсутня.

У загальному випадку невизначеність може бути викликана або протидією розумного противника, або недостатньою обізнаністю про умови, в яких осу–ществляется вибір рішення.

Прийняття рішень в умовах розумного протидії є об'єктом дослідження теорії ігор.

Розглянемо принципи вибору рішень при наявності недостатньої поінформованості щодо умов, в яких здійснюється вибір. Такі ситуації прийнято називати «іграми з природою».

У термінах «ігор з природою» завдання прийняття рішень може бути сформульована таким чином. Нехай особа, яка приймає рішення, може вибрати один з m можливих варіантів своїх рішень: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ і нехай щодо умов, в яких будуть реалізовані можливі варіанти, можна зробити n припущень: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Оцінки кожного варіанта рішення в кожних умовах (x_i, y_j) відомі і задані у вигляді матриці виграшів особи, що приймає рішення: $A = |a_{ij}|$.

Припустимо спочатку, що апріорна інформація про можливості виникнення тієї чи іншої ситуації y_j відсутня.

Теорія статистичних рішень пропонує кілька критеріїв оптимальності вибору рішень. Вибір того чи іншого критерію неформалізуем, він здійснюється людиною, яка приймає рішення, суб'єктивно, виходячи з його досвіду, інтуїції і. т. д. Розглянемо ці критерії.

Критерій Лапласа. Оскільки ймовірності виникнення тієї чи іншої ситуації невідомі, будемо їх все вважати рівноімовірними. Тоді для кожного рядка матриці виграшів підраховується середнє арифметичне значення оцінок. Оптимальному рішенню буде відповідати таке рішення, якому відповідає максимальне значення цього середнього арифметичного, тобто:

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1 \le i \le m} (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Критерій Вальда. У кожному рядку матриці вибираємо мінімальну оцінку. Оптимальному рішенню відповідає таке рішення, якому відповідав би максимум цього мінімуму, тобто.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

Цей критерій дуже обережний. Він орієнтований на найгірші умови, тільки серед яких і відшукується найкращий і тепер уже гарантований результат.

Критерій Севіджа. У кожному стовпці матриці знаходиться максимальна оцінка $\max_{1 \le i \le m} a_{ij}$ і складається нова матриця, елементи якої визначаються співвідношенням $r_{ij} = \max_{1 \le i \le m} a_{i} - a_{ij}$.

Величину r_{ij} називають ризиком, під яким розуміють різницю між максимальним виграшем, який мав би місце, якби було достовірно відомо, що настане ситуація, і виграшем при виборі рішення x_i в умовах y_j. Ця нова матриця називається матрицею ризиків. Далі з матриці ризиків вибирають таке рішення, при якому величина ризику приймає найменше значення в самій несприятливій ситуації, тобто

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij} = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} a_{ij} - a_{ij} \right).$$

Сутність цього критерію полягає в мінімізації ризику. Як і критерій Вальда, критерій Севіджа дуже обережний. Вони розрізняються різним розумінням гіршій ситуації: в першому випадку - це мінімальний виграш, у другому - максимальна втрата виграшу в порівнянні з тим, чого можна було б досягти в даних умовах.

Критерий Гурвіца. Вводиться деякий коефіцієнт a, званий «коефіцієнтом оптимізму», $0 \le \alpha \le 1$. У кожному рядку матриці виграшів знаходиться найбільша оцінка $\max_{1 \le j \le n} a_{ij}$ і сама маленька $\min_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Вони множаться відповідно на α і $(1-\alpha)$ і потім обчислюється їх сума. Оптимального рішення буде відповідати таке рішення, якому відповідає максимум цієї суми, тобто.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1 \le i \le m}\left[\alpha \max_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \min_{1 \le j \le n} a_{ij}\right].$$

При $\alpha = 0$ критерій Гурвіца трансформується в критерій Вальда. Це випадок крайнього «песимізму». При $\alpha = 1$ (випадок крайнього «оптимізму») людина, що приймає рішення, розраховує на те, що йому буде супроводжувати найсприятливіша ситуація. «Коефіцієнт оптимізму» a призначається суб'єктивно, виходячи з досвіду, інтуїції і. т. д. Чим більше небезпечна ситуація, тим більш обережним повинен бути підхід до вибору рішення і тим менше значення присвоюється коефіцієнту α.

Прикладом прийняття рішень в умовах невизначеності може служити розглянута вище завдання вибору методу кодування картографічної інформації, коли ймовірності появи того чи іншого виду цієї інформації невідомі.

Ланцюги Маркова.

Поняття Марківка ланцюга належить російському математику А.А. Маркову. Саме поняття «Ланцюг Маркова» було запропоновано російським математиком А.Я. Хінчіним.

Нехай маємо деяку систему S, яка може перебувати в одному з кінцевого або рахункового безлічі несумісних станів C_i, $i \in N$. Перехід системи від стану до стану, взагалі кажучи, випадковий і можливий тільки в фіксовані моменти часу t_n, $n = 0,1,2,\ldots$. Опишемо функціонування системи в термінах випадкових процесів. Нехай в момент часу t_n, система S перейшла зі стану C_j в стан C_i. Для її описання задамо дискретний випадковий процес функцією $\xi(t_n) = \varphi(\omega_i, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$. Елементарна подія ω_i демонструє знаходження системи S в стані C_i. Крім цього, нам необхідно задати початковий розподіл ймовірностей для моменту часу $t = t_0$ і, в загальному випадку, задати всі стани процесу і можливість його реалізації.

Отримати таку інформацію про випадковий процес завдання важке, та й в ряді випадків не потрібно, якщо використовувати поняття ланцюгів Маркова.

Справді, нехай маємо послідовність (ланцюг) залежних цілочисельних випадкових величин $\xi_n = \xi(t_n)$, $n = 0,1,\ldots$. Якщо в момент t_n система прийшла в стан C_i, то будемо вважати, що $\xi_n = i$.

Визначення. Последовність випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n=0,1,\ldots$ утворює **ланцюг Маркова**, якщо

$$P\{\xi_n = i / \xi_0 = i_0,\ \xi_1 = i_1,\ \ldots,\ \xi_{n-2} = i_{n-2},\ \xi_{n-1} = j\} = P\{\xi_n = i / \xi_{n-1} = j\} = p_{ij}^{(n)}, \quad (66)$$

з початковими умовами

$$P\{\xi_0 = i\} = p_i^{(0)},\ \sum_i p_i^{(0)} = 1. \quad (67)$$

Ймовірності $p_{ij}^{(n)}$ - називаются ймовірностями переходу. Властивість (66), ланцюга Маркова, называется **властивістю відсутності післядії**, яке інтерпретується так: **поведінка процесу в майбутньому залежить тільки від фіксованого сьогодення і не залежить від його минулого.**

Визначення. Ланцюг Маркова $\{\xi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, називається **однорідним**, якщо ймовірності переходу $p_{ij}^{(n)}$ не залежать від часу, тобто

$$\forall n,\ p_{ij}^{(n)} = p_{ij}. \quad (68)$$

Визначення. Ланцюг Маркова називається **неприводимим**, якщо кожен його стан може бути досягнуто з будь-якого іншого, тобто для будь-яких двох станів системи S C_i, C_j, існує ціле число κ, таке, що $p_{ij}^{(\kappa)} > 0$.

Для однорідного ланцюга маємо $p_{ij} > 0$.

Нехай $\pi_j^{(n)} = P\{\xi_n = j\}$ - ймовірність того, що в момент часу t_n система знаходиться в стані C_j. Інтерес представляє існування межі

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)},\ j \in N. \quad (69)$$

Знаходження розподілу $\{\pi_j\}$ є основним завданням ланцюгів Маркова. Якщо межа існує, то говорять, що система S має **стаціонарний** режим функціонування, якщо $\forall j \quad \pi_j > 0$. Фінальні ймовірності $\{\pi_j\}$ не залежать від початкових умов, $\forall j$, π_j, означає долю часу, протягом якого система знаходиться в стані C_j, $j \in N$, і однозначно визначається рівностями:

$$\sum_i \pi_i = 1, \tag{70}$$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i \cdot p_{ij}, \ \forall j. \tag{71}$$

Формула (70) називається умовою нормування.

Система алгебраїчних рівнянь (71) є однорідною, і для її однозначного рішення необхідно використовувати (70), при цьому, будь одне рівняння з системи (71) можна виключити. Матриця Π, складена зз елементів p_{ij}, називається матрицею ймовірностей переходу.

$$\Pi = \left(p_{ij} \right). \tag{72}$$

Зададим вектор вероятностей состояний системы

$$\overline{\pi} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \right).$$

тоді система (71) записується у вигляді

$$\overline{\pi} = \overline{\pi} \cdot \Pi. \tag{73}$$

Часто представляють інтерес переходи системи зі стану в стан в довільний момент часу (перехідний режим).

Для цього потрібно визначити розподіл ймовірностей $\left\{\pi_j^{(n)}\right\}$ знаходження системи в стані C_j в момент t_n. Задамо вектор ймовірностей $\overline{\pi}^{(n)}$ в момент t_n рівністю

$$\overline{\pi}^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}, \ldots \right).$$

Використовуючи (71) і визначення ймовірностей переходів (66), отримаємо

$$\overline{\pi}^{(1)}=\overline{\pi}^{(0)}\cdot \Pi ,$$

де $\overline{\pi}^{0}=\left(p_1^0, p_2^0,...\right)$ - початковий стан системи (67). Звідси для любого n, по рекурентній залежності, отримаємо

$$\overline{\pi}^{(n)}=\overline{\pi}^{(n-1)}\cdot \Pi=\overline{\pi}^{0}\cdot \Pi^{n},\ \ n\in N. \qquad (74)$$

Рівняння (74) дає загальний метод обчислення ймовірностей на n-му кроці процесу по заданій матриці переходів Π і початковому розподілі $\overline{\pi}^{0}$.

Якщо стаціонарний розподіл існує, то

$$\overline{\pi}=\lim_{n\to\infty}\overline{\pi}^{(n)}. \qquad (75)$$

Приклад 1. Розглянемо систему S, яка знаходиться, в довільний момент часу t, в одному з трьох станів C_1, C_2, C_3. Переход системи від стану до стану виконується миттєво в фіксовані моменти часу $t_\kappa=\kappa$, $\kappa\in N$, у відповідності з розміченим графом станів рисунка 1.

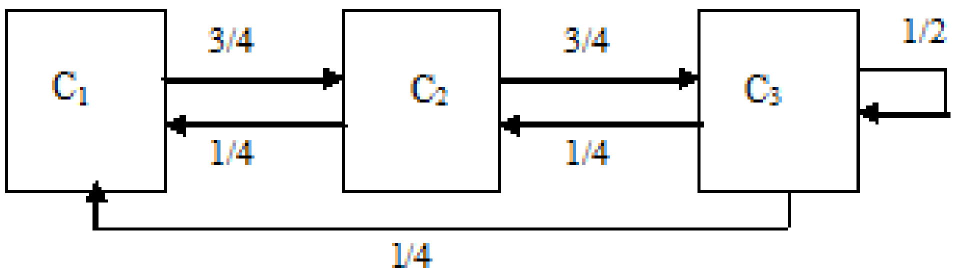

Рис.1

Необхідно оцінити швидкість збіжності до стаціонарного режиму і розрахувати стаціонарний розподіл ймовірностей.

Розв'язок. Обчислимо стаціонарний розподіл вірогідності, тобто знайдемо власний вектор $\pi = (p_1, p_2, p_3)$, где $p_i = P\{C_i\}$, i=1, 2, 3.

Маємо $\pi = \pi \cdot \Pi$, де

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням умови нормування $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ маємо систему

$$\begin{cases} p_1 = 0 \cdot p_1 + (1/4) \cdot p_2 + (1/4) \cdot p_3, \\ p_2 = (3/4) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + (1/4) \cdot p_3, \\ p_3 = (1/4) \cdot p_1 + (3/4) \cdot p_2 + (1/2) \cdot p_3, \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3. \end{cases} \qquad (*)$$

Вирішуючи її (наприклад, без рівняння позначеного (*)), отримуємо стаціонарний розподіл вірогідності: $\bar{\pi} = (0,2;\ 0,28;\ 0,52)$.

Оцінимо швидкість збіжності. Для цього обчислимо ймовірності переходу $p_{ij}^{(n)}$ по формулі (74) при різних початкових умовах:

а) $p^{(0)} = (1,0,0)$,

результати представлено в табл. 7.

Таблиця 7

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	1	0	0,250	0,178	0,203	…	0,2
$p_2^{(n)}$	0	0,75	0,062	0,359	0,254	…	0,28
$p_3^{(n)}$	0	0,25	0,688	0,454	0,543	…	0,52

б) $p^{(0)} = (0,1,0)$,
відповідні результати відображені в табл. 8.

Таблиця 8

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0	0	0,187	0,203	0,199	…	0,2
$p_2^{(n)}$	1	0,75	0,375	0,250	0,289	…	0,28
$p_3^{(n)}$	0	0,25	0,438	0,547	0,512	…	0,52

в) $p^{(0)} = (0,0,1)$,

в результаті отримаємо з табл. 9:

Таблиця 9

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0	0	0,187	0,203	0,199	…	0,2
$p_2^{(n)}$	0	0,75	0,313	0,266	0,285	…	0,28
$p_3^{(n)}$	1	0,25	0,500	0,531	0,516	…	0,52

З таблиць видно, що входження системи в стаціонарний режим відбувається досить швидко, так як, вже після чотирьох кроків, ймовірно мало відрізняються від граничних, незалежно від початкових умов.

Як приклад розглянемо формування матриці ймовірностей переходу з ланцюга станів
$S_0\ S_0\ S_1\ S_2\ S_3\ S_0\ S_1\ S_0\ S_1\ S_2\ S_0\ S_0$
Відповідно матриця переходів матиме вигляд:

$$P = \left\| \begin{matrix} w_0 & p_0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & p_1 & 0 \\ w_2 & 0 & 0 & p_2 \\ w_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

(за n кроків відповідно P^n).
Граф станів переходу зображено на рис.2

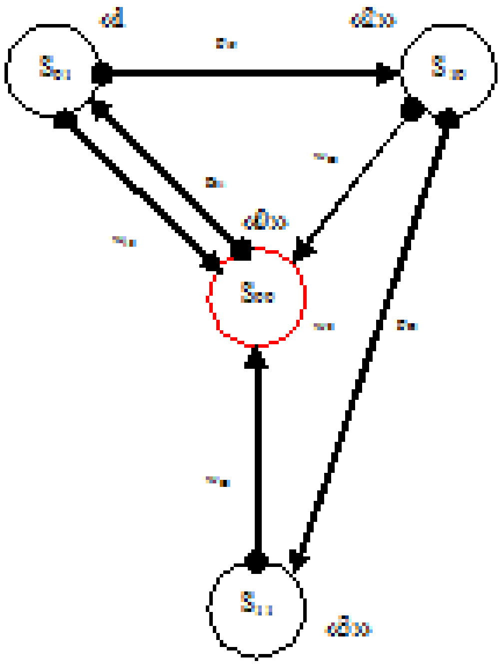

Рис. 2