Лабораторна робота № 2

Задачі лінійного програмування. Симплекс метод.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Прийняття рішень в умовах визначеності виробляється при наявності повної і достовірної інформації про проблемну ситуацію, цілі, обмеження та наслідки рішень. Для даного класу задач існує однозначна зв'язок альтернативного рішення з відповідним результатом, тому для вибору найкращого рішення досить мати правило для оцінки результатів, однозначно пов'язаних з цілями і засобами їх досягнення. При цьому вибір найкращого варіанту рішення зводиться до визначення керованих змінних (параметрів, прийомів, способів дій), що описують цілі і засоби системи, які призводять до найкращого в даних умовах результату. Цілі і обмеження формально визначаються у вигляді цільових функцій і функціональних нерівностей і рівностей, що обмежують засоби досягнення мети. Критерій вибору рішення визначається мінімумом або максимумом цільової функції. Наявність перерахованої інформації дозволяє побудувати формальну математичну модель задачі прийняття рішень і алгоритмічно знайти оптимальні рішення. Процес побудови моделі, що відбиває реальний зв'язок елементів системи управління, називають моделюванням.

Моделюванням задач прийняття рішень в умовах визначеності займається наукова дисципліна «Дослідження операцій».

Розглянемо конкретний приклад

Нехай меблева фабрика виготовляє два види продуктів: столи і шафи. Для їх виробництва використовується три види ресурсів (пиломатеріал, шурупи, фарба). Будемо вважати, що місячні запаси ресурсів обмежені: пиломатеріал – величиною

b_1 ($м^3$), шурупи – b_2 (кг), краска – b_3 (кг). Витрати відповідних ресурсів на виготовлення однієї одиниці відповідних продуктів відомі і задаються таблицею (матрицею) A. Прибуток (дохід) від випуску одиниці відповідної продукції задана: для столу вона дорівнює C_1 (руб./шт.), для шафи – C_2 (руб./шт.). Потрібно визначити план випуску продукції кожного виду, який максимізує дохід фабрики.

Змінні. Так як потрібно визначити обсяги виробництва кожного виду продукту, введемо змінні: x_1 – місячний обсяг виробництва столів (шт.);

x_2 – місячний обсяг виробництва шаф (шт.)

Цільова функція. Якщо дохід від реалізації одного столу дорівнює C_1 рублів, то від реалізації столів в обсязі x_1 штук місячний дохід складе C_1x_1 рублів. Аналогічно, місячний дохід від реалізації шаф складе C_2x_2 рублів. Позначивши загальний дохід (в руб.) через Z, можна дати наступну математичну формулювання цільової функції: визначити (допустимі) значення x_1 і x_2, максимізує величину загального доходу .

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 = \sum_{j=1}^{2} C_j\, x_j$$

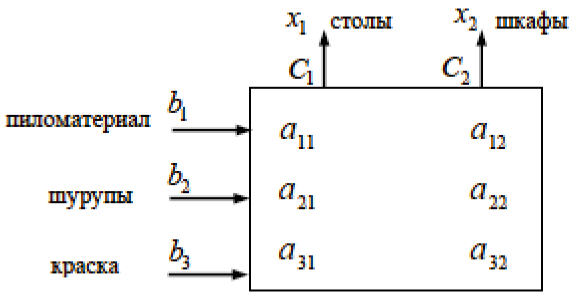

Рис. 3.1. Формализованное описание задачи

Обмеження:

на пиломатеріал $\sum_{j=1}^{2} a_{1j} x_j \le b_1$.

на шурупи $\sum_{j=1}^{2} a_{2j} x_j \le b_2$;

на краску $\sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j \le b_3$.

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$ x_1, x_2 – цілі.

Математична модель задачі.

$\max Z = \sum_{j=1}^{2} C_j x_j$ при $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,2,3$, где $x_j \ge 0$, x_j – цілі, $j = 1,2$.

Графічний спосіб розв'язання ЗЛП

Розглянемо приклад і вихідні дані:

Исходные данные задачи

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции		Запас ресурсов
	Стол	Шкаф	
Пиломатериалы ($м^3$)	0,06	0,07	42
Шурупы (кг)	0,04	0,085	34
Краска (кг)	0,035	0,12	42
Цена единицы продукции (руб.)	500	750	-

Запишем модель задачи с приведенными данными:

$$\max Z = 500x_1 + 750x_2 \quad (3.0)$$

при ограничениях:

$$0{,}06x_1 + 0{,}07x_2 \le 42; \quad (3.1)$$

$$0{,}04x_1 + 0{,}085x_2 \le 34; \quad (3.2)$$

$$0{,}035x_1 + 0{,}12x_2 \le 42; \quad (3.3)$$

$$x_1, x_2 \ge 0; \quad (3.4)$$

$$x_1, x_2 \text{ — целые} \quad (3.5)$$

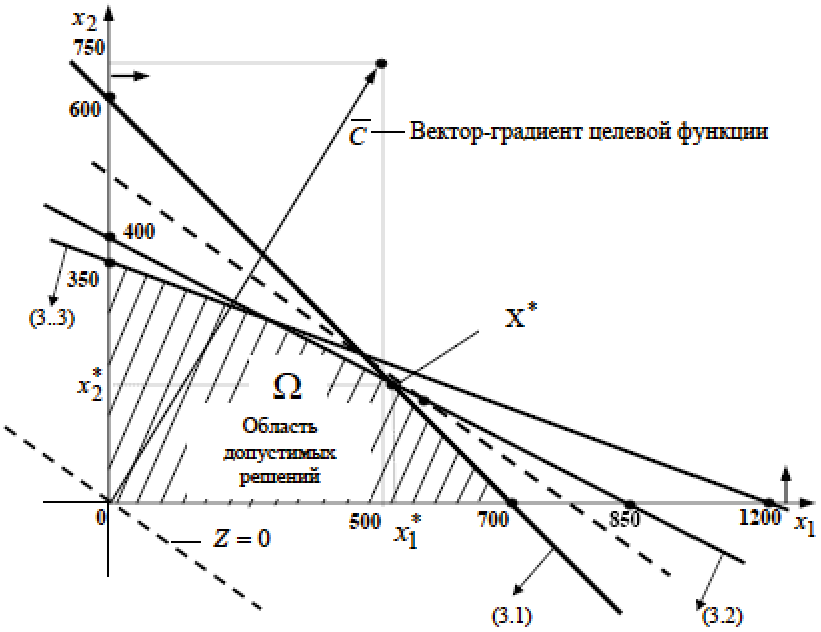

Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация ЗЛП

---

1. Побудуємо безліч допустимих рішень задачі. Дана безліч утворюється в результаті перетину напівплощин (обмежень) (3.1) - (3.4). На рис. 3.2 безліч допустимих рішень показано у вигляді п'ятикутника. Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, вказуються стрілками, спрямованими в бік допустимих значень змінних. отриманий багатогранник Ω називають симплексом. Звідси і назва методу пошуку оптимального рішення.

2. Побудуємо вектор-градієнт $\overline{C}$, складений з похідних цільової функції по змінним завдання, який вказує напрям зростання цільової функції по цим змінним. $\overline{C} = (C_1, C_2) = (500, 750).$ Початок цього вектора лежить в точці з координатами (0, 0), а кінець - в точці (500, 750). Ряд паралельних штрихових ліній, перпендикулярних вектору-градієнту, утворюють безліч цільових функцій при довільно обраних значеннях $Z.$ При $Z = 0$ пряма (цільова функція) проходить через точку (0, 0), а цільова функція Z приймає мінімальне значення.

3. Переміщаємо пряму, що характеризує дохід $Z,$ в направленні вектор-градієнта (для задачі $\max Z$) .до тих пір, поки вона не зміститься в область неприпустимих рішень. На рис. 3.2 видно, що оптимальному рішенню відповідає точка $X^* = (x_1^*, x_2^*)$. Так як точка X^* являється точкою перетину прямих (3.1) и (3.2), значення x_1^* и x_2^* визначається рішенням системи двох рівнянь:

$$0{,}06x_1^* + 0{,}07x_2^* = 42;$$

$$0{,}04x_1^* + 0{,}085x_2^* = 34.$$

Рішення зазначеної системи рівнянь дає результат $x_1^* = 517{,}4$ і $x_2^* = 156{,}5.$ Отримані рішення означає, що місячний обсяг виробництва столів повинен бути 517 шт., А шаф - 156 шт. Дохід, отриманий в цьому випадку, складе $Z = 517 \cdot 500 + 156 \cdot 750 = 375500$ гривен.

Даний приклад використання ресурсів має вельми просту постановку і структуру. У ній можуть з'явитися вимоги обліку випуску продуктів в певному співвідношенні, обліку їх можливого випуску за різними технологіями, обліку завантаження устаткування і інші. Всі ці ситуації досить добре описуються моделями лінійного програмування.

Геометрична інтерпретація. Застосування в матричних іграх.

Повернемося до випадку платіжної матриці a_{ij} і припустимо, що обидва гравці обрали змішану стратегію, так, що гравець А називає номер i з ймовірністю p_i, а гравець В називає номер j з ймовірністю q_j. При цьому звичайно:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1; \quad \text{всі } p_i \ge 0, \ \ q_j \ge 0.$$

При таких стратегіях середнє значення виграшу гравця А за одну гру, обчислене за простими означеннями теорії ймовірностей складає:

$$v = v(p,q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j, \ \text{ де } p = p(p_1, p_2, ...p_n), \ q = q(q_1, q_2, ...q_n).$$

Припустимо, що А намагається збільшити це значення за рахунок підбору стратегії, а В цьому протидіє, причому для спрощення будемо вважати, що стратегії обох гравців відомі. Тоді при довільній стратегії «p» гравець В вибере стратегію q, для якої $v = \min\limits_q v(p,q)$, і тому найбільший середній виграш гравця А буде $v' = \max\limits_p(\min\limits_q v(p,q))$. (1)

Навпаки, якщо В намагається мінімізувати свій середній програш, а А цьому перешкоджає, то отримаємо значення:

$$v'' = \min_q(\max_p v(p,q)). \qquad (2)$$

Основна теорема Дж. Неймана полягає в тому, що ці значення дорівнюють

$v' = v''$; це загальне значення називається ціною гри. При цьому існує пара стратегій (не обов’язково єдина) $p = \tilde{p}$ і $q = \tilde{q}$, для якої

$$v' = v(\tilde{p}, \tilde{q}) = \max_p v(p, \tilde{q}) = \min_q v(\tilde{p}, q).$$

Звідси випливає, що при застосуванні змішаних стратегій, ці стратегії $\tilde{p}$ і $\tilde{q}$, являються оптимальними одночасно для обох сторін: якщо А обере стратегію відмінну від $\tilde{p}$ то В зможе зменшити свій програш (у всякому разі не збільшити його); а якщо В обере стратегію відмінну від $\tilde{q}$, то А при цьому лише виграє.

Не слід вважати, що рівність (1) і (2) досягається просто перестановкою дій $\max\limits_p$ та $\min\limits_q$. Насправді така перестановка **неможлива**. Перевірте наприклад таку ситуацію:

$$\max_{0\le x\le 1}[\min_{0\le y\le 1}(x+y-1)^2] = 0, \quad \min_{0\le y\le 1}[\max_{0\le y\le 1}(x+y-1)^2] = 1/4.$$

Насправді доведення теореми Неймана доволі складне і в даному курсі не наводиться.

Щоб визначити ціну гри і оптимальні стратегії, припустимо, що всі $a_{ij} \ge 0$.

Цього завжди можна досягнути, добавляючи до вихідних a_{ij} одне й теж саме достатньо велике число «a», тобто від отриманої ціни доведеться відняти «a». А на оптимальних стратегіях така дія не скажеться. Замітимо , що для довільних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ $\min\limits_q(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + ...\alpha_n q_n)$ дорівнює найменшому з чисел $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$. Значить при заданих $p_1, p_2, ...p_n$ $\min\limits_q v(p,q) = \min\limits_q \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} p_i) q_j$, дорівнює найменшому з чисел $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$ для $j = 1,2,......m$. Якщо позначити цей мінімум через v_p, то зрозуміло, що $v_p > 0$ і

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \ge v_p, \quad (j = 1,2,......m) \qquad (3),$$

Причому хоча б для одного j ця нерівність перетворюється в рівність.

Позначимо $p_i / v_p = x_i$, отримаємо, що $x_i \ge 0 \ (i = 1,2......n)$ (4),

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge 1, \quad (j = 1,2,......m) \qquad (5),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{v_p}. \qquad (6).$$

Так як $v_{\tilde{p}} = v'$, то для значень $x_i = \tilde{x}_i = \tilde{p}_i / v'$ задовольняються умови (4), (5), а ліва частина (6) дорівнює $1/v'$. З іншого боку, нехай x_i' - розв'язок задачі про мінімум суми (6) при умовах (4), (5). Обчислимо відповідне значення v_p' по формулі (6) і покладемо $p_i' = x_i' v_p'$. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i' = 1$. І оскільки хоча б одна з нерівностей (5) при $x_i = x_i'$ повинна перетворитись на рівність, то з (5) і (3) отримаємо, що формально введене v_p' як раз дорівнює v_p і тому менше або дорівнює v', звідки $\frac{1}{v_p'} \ge \frac{1}{v'}$. Значить, по змісту задачі на мінімум $v' = v_p'$, тобто **ціна** гри отримується за допомогою задачі на **мінімум**, що являється однією з задач лінійного програмування; ймовірності $\tilde{p}_i$ для оптимальної стратегії пропорційні компонентам $\tilde{x}_i$ оптимального плану . Оптимальну стратегію $\tilde{q}$ можна знайти аналогічно.

Приклад 1:

Нехай платіжна матриця a_{ij} має вигляд

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $n = 2$, $m = 3$. Добавляючи до всіх елементів число «3», ми приходимо до задачі на мінімум суми $x_1 + x_2$ при умовах $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ 4x_1 + x_2 \ge 1, 3x_1 + 6x_2 \ge 1, \ 2x_1 + 4x_2 \ge 1$. Переходячи до стандартного вигляду, шляхом введення x_3, x_4, x_5 :

$4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \ 3x_1 + 6x_2 - x_4 = 1, \ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 1, \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$ $x_4 \ge 0, \ x_5 \ge 0$, згідно методу послідовного покращення введемо вектори (див. лекцію №2 по симплекс методу стосовно вибору базиса)

$a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$a_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$ Введемо допоміжний базис $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Замінимо функцію-ціль z на $z = x_1 + x_2 + \omega x_6 + \omega x_7 + \omega x_8$. Складемо розклади векторів по вибраному базису:

$b = a_6 + a_7 + a_8;$

$a_1 = 4a_6 + 3a_7 + 2a_8,\ d_1 - c_1 = 4\omega + 3\omega + 2\omega - 1 = 9\omega - 1 > 0;$

$a_2 = a_6 + 6a_7 + 4a_8,\ d_2 - c_2 = \omega + 6\omega + 4\omega - 1 = 11\omega - 1 > 0;$

$a_3 = -a_6,\ d_3 - c_3 = -\omega < 0;$

$a_4 = -a_7,\ d_4 - c_4 = -\omega < 0;$

$a_5 = -a_8,\ d_5 - c_5 = -\omega < 0.$

Помічаємо, що найбільше значення різниці $d_i - c_i$, досягається при i=2, значить введемо в опорний базис вектор a_2; оскільки найменше значення θ (див. лекцію №2) досягається при i=7 (чому?), то з базиса виключаємо a_7. Оскільки $a_7 = (1/6)a_2 + (-1/6)a_6 + (-2/3)a_8$, то отримаємо:

$b = (1/6)a_2 + (5/6)a_6 + (1/3)a_8;$

Продовжуючи ітерації, до тих пір поки різниці $d_i - c_i$ не стануть від'ємними, отримаємо ціну гри -1/5; при цьому $\tilde{p}_1 = 3/5,\ \tilde{p}_2 = 2/5.$

Завдання для самостійного виконання:

I). В **прикладі 1**, отримати розраховану ціну гри, знайти оптимальну стратегію другого гравця і виконати недостаючі ітерації алгоритму аналогічно до розрахованої ітерації.

II). Розрахувати графічно задачу ЛП (лінійне програмування):

1).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали (м^3)	0,04	0,08	41
Дріт (кг)	0,05	0,076	43
Краска (кг)	0,038	0,2	42
Ціна одиниці продукції (грн)	600	740	

2).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали (м^3)	0,02	0,07	37
Дріт (кг)	0,04	0,065	44
Краска (кг)	0,031	0,25	48
Ціна одиниці продукції (грн)	620	710	

3).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,37	0,05	33
Дріт (кг)	0,05	0,076	34
Краска (кг)	0,055	0,22	40
Ціна одиниці продукції (грн)	600	740	

4).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,03	0,04	40
Дріт (кг)	0,025	0,057	43
Краска (кг)	0,028	0,24	44
Ціна одиниці продукції (грн)	500	840	

5).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,044	0,074	35
Дріт (кг)	0,05	0,076	34
Краска (кг)	0,022	0,37	40
Ціна одиниці продукції (грн)	700	640	

6).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,064	0,072	37
Дріт (кг)	0,054	0,045	43
Краска (кг)	0,041	0,23	47
Ціна одиниці продукції (грн)	600	740	

7).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,034	0,081	51
Дріт (кг)	0,05	0,076	33
Краска (кг)	0,038	0,2	42
Ціна одиниці продукції (грн)	700	840	

8).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,031	0,075	44
Дріт (кг)	0,05	0,076	45
Краска (кг)	0,034	0,25	46
Ціна одиниці продукції (грн)	400	740	

9).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,04	0,077	41
Дріт (кг)	0,058	0,086	43
Краска (кг)	0,048	0,29	44
Ціна одиниці продукції (грн)	490	640	

10).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,03	0,08	48
Дріт (кг)	0,048	0,072	42
Краска (кг)	0,038	0,2	40
Ціна одиниці продукції (грн)	500	800	

11).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,03	0,04	37
Дріт (кг)	0,04	0,096	49
Краска (кг)	0,037	0,21	42
Ціна одиниці продукції (грн)	400	540	

12).

Ресурси	Витрата ресурсів на одиницю продукції		Запас ресурсів
	Комп'ютери	Принтери	
Пластматеріали ($м^3$)	0,023	0,09	44
Дріт (кг)	0,062	0,076	47
Краска (кг)	0,088	0,32	42
Ціна одиниці продукції (грн)	500	780	