

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково – методичною радою
Державного університету
«Житомирська Політехніка»

Протокол від «___» _____ 20__ р.
№ _____

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА КУРСОВИХ
РОБІТ З КУРСУ
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
денної та заочної форм навчання

спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
Освітньо-професійні програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
технології » та «Робототехніка»

факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
кафедра автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій імені
професора Б.Б. Самотокіна

Розглянуто та рекомендовано на засідання
кафедри автоматизації та комп'ютерно-
інтегрованих технологій імені професора
Б.Б. Самотокіна

протокол від «___» _____ 20__ р.
№ _____

Розробники:

к.т.н., доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій

Ткачук Андрій Геннадійович,

старший викладач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій

Богдановський Мартін Віталійович

Житомир

2021

ЗМІСТ

ВСТУП	2
ЧАСТИНА 1. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ НЕПЕРЕРВНОЇ ЛІНІЙНОЇ САК	3
ЧАСТИНА 2. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОЇ САК	10
ЧАСТИНА 3. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНОЇ САК	13
ЛІТЕРАТУРА	

Додатки

Додаток 1. ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ НЕПЕРЕРВНОЇ ЛІНІЙНОЇ САК	
Додаток 2. ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ДИСКРЕТНОЇ САК	
Додаток 3. ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНОЇ САК	

ВСТУП

Курс «Теорія автоматичного керування» є фундаментальною, складовою частиною інженерної підготовки спеціалістів за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» в частинні формування теоретичних знань та практичних навичок в задачах проектування та аналізу узагальнених характеристик і властивостей систем автоматичного регулювання.

Завдання на контрольні та курсову роботу передбачає розвинення розуміння та застосування теоретичного та прикладного базису у формі широковживаних підходів та методів аналізу та синтезу характеристик системи автоматичного керування (САК) визначеного типу згідно з індивідуальним варіантом.

В першому розділі роботи за визначеною функціональною схемою та математичним описом окремих елементів необхідно скласти математичну модель та провести аналіз загальних характеристик лінійної неперервної САК на відповідність кількісним та якісним показникам роботи.

В другому розділі роботи необхідно виконати структурний синтез дискретної САК із використанням квантування та екстраполяції нульового порядку при формування регулятора. Провести аналіз дискретної САК з використанням Z -перетворення та оцінити кількісно-якісні показники роботи.

В третьому розділі роботи на базі неперервної САК, виконати структурний синтез нелінійної САК. Застосовуючи фазовий аналіз та гармонійну лінеаризацію провести аналіз динамічних характеристик та оцінити якість роботи.

Для кожного з трьох розділів в методичних вказівках наведено приклад розв'язку типової задачі аналізу та синтезу відповідної САК.

Пояснювальна записка до курсової роботи повинна бути виконана з використанням текстового процесору із дотриманням вимог ЕСКД при оформленні. Вітається використання програмних засобів для моделювання відповідно до демонстраційних прикладів.

В результаті виконання роботи з курсу «Теорія автоматичного керування» студенти повинні здобути навички структурного та параметричного аналізу та синтезу САК, кількісної та якісної оцінки показників їх роботи, як основи для створення теоретично-прикладних розробок дипломного проектування зокрема.

ЧАСТИНА 1

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ НЕПЕРЕРВНОЇ ЛІНІЙНОЇ САК

Аналіз та синтез САК є одним з основних етапів проектування, який передбачає складання математичної моделі та дослідження кількісних та якісних властивостей об'єкту керування (ОК), виконавчих механізмів, регулюючих органів та пристроїв, що забезпечують автоматичну роботу системи. Вихідною інформацією на проектування є технічний опис ОК та пристроїв автоматики у вигляді функціональних та принципівих схем а також їх математичний опис, складений на основі відомих законів та формалізмів механіки, електротехніки, фізики та інших фундаментальних та прикладних наук. Найбільш простими і розвиненими з точки зору дослідження і проектування є лінійні САК, етапи аналізу яких наведено у наступних пунктах виконання курсового проектування.

1.1. За заданою функціональною схемою технічної системи та математичним описом процесів, які спостерігаються в її окремих елементах, представленим лінійними диференціальними рівняннями, одержати передатні функції елементів із використанням фундаментальних принципів перетворення Лапласа.

Розглянемо приклад визначення передатної функції ланки. Нехай диференціальне рівня ланки має вигляд 1.1

$$T1 \frac{d^2 y}{dt^2} + T2 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \quad (1.1)$$

де $T1, T2$ – сталі часу, K – коефіцієнт підсилення.

Замінюючи операцію похідної $\frac{d(*)}{dt}$ на оператор Лапласа s , враховуючи перенесення порядку похідної в ступінь оператора, рівняння 1.1 можна переписати в операторному вигляді 1.2.

$$T1 \cdot s^2 + T2 \cdot s + y = Kx. \quad (1.2)$$

За означенням переданої функції, добудемо з виразу 1.2 відношення вихідного сигналу ланки $Y(s)$ до вхідного сигналу $X(s)$:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T1 \cdot s^2 + T2 \cdot s + 1}. \quad (1.3)$$

Приклади застосування основних теорем перетворення Лапласа [7] для визначення передатних функцій елементів САК наведені в пункті 1 додатку 1 (вирази 1-5).

1.2. На основі отриманих передатних функцій елементів САК та аналізу функціональної схеми скласти структурну схему системи, приклад якої зображено на рисунку 1.1.

1.3. Визначити передатні функції розімкненої та замкненої $W_{роз}(s)$ та замкненої $\Phi(s)$ САК за входною дією $G(s)$, за похибкою $E(s)$ та за збуренням $F(s)$:

$$W_{роз}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_{OK}(s);$$

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W_{роз}(s)}{1 + W_{роз}(s)} = \frac{B_1(s)}{A(s)}.$$
(1.4)

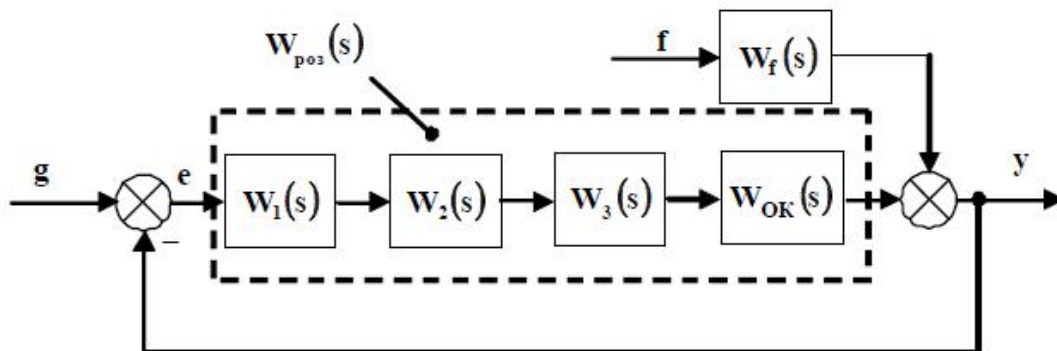


Рис. 1.1. Структурна схема САК:

g – вхідний сигнал; y – вихідний сигнал; e – сигнал похибки;
 f – сигнал збурення.

Для визначення передатної функції за похибкою $\Phi_e(s)$ від $G(s)$ перетворимо структурну схему (рис. 1.1) до вигляду, зображеному на рисунку 1.2.

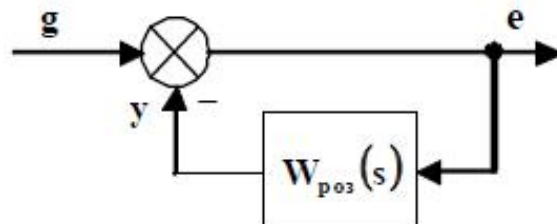


Рис. 1.2. Передатна функція замкненої САК за похибкою.

Тоді:

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W_{роз}(s)} = \frac{B_2(s)}{A(s)},$$
(1.5)

Для визначення передатної функції замкненої САК за збуренням $\Phi_f(s)$, перетворимо структурну схему (рис. 1.1) до вигляду, зображеному на рисунку 1.3.

Тоді одержимо:

$$\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{-W_f(s)}{1 + W_{\text{роз}}(s)} = \frac{B_3(s)}{A(s)}, \quad (1.6)$$

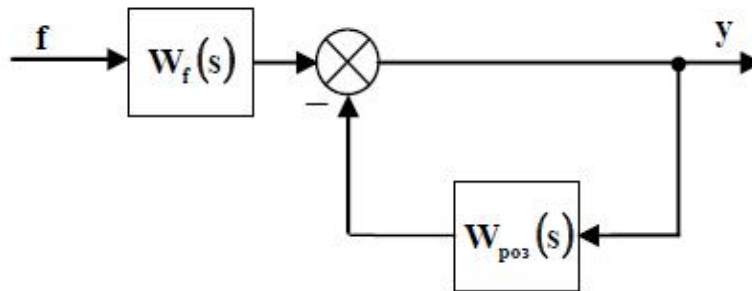


Рис. 1.3. Передатна функція замкненої САК за збуренням.

Аналогічні перетворення для конкретного прикладу наведені у виразах 1 – 13 додатку 1.

1.4. Визначити стійкість замкненої САК.

Для визначення стійкості застосовуються алгебраїчні критерії Рауса (парний варіант) чи Гурвіца (непарний варіант). Для вирішення задачі використовується характеристичне рівняння замкненої САК $A(s) = 0$. Коефіцієнти рівняння формують матриці Рауса та Гурвіца до яких застосовується відповідний критерій. У випадку критерію Гурвіца усі визначники діагональних мінорів мають бути додатними. У випадку критерію Рауса усі елементи першого стовпця матриці Рауса мають бути додатними. У додатку 1 (вирази 14 – 15) наведено застосування критерію Гурвіца.

1.5. Визначити запаси стійкості заданої САК за варіантом.

Для даної задачі використовується критерій Найквіста та логарифмічні частотні характеристики.

В пункті 6 додатку 1 наведено використання критерію Найквіста для конкретного прикладу з детальним поясненням кожного етапу розрахунку та одержаних результатів.

Критерій Найквіста дозволяє графічно оцінити стійкість системи за амплітудно-фазочастотною характеристикою (АФЧХ), яка ілюструє зміну коефіцієнту передачі та різниці фаз між сигналами на вході та виході досліджуваної САК від їх спільної частоти. При цьому положенню АФЧХ на комплексній площині по відношенню до особливої точки $(-1, j0)$, яке оцінюється в критерії, можна поставити у відповідність фізичну аналогію на рівні сигналів. Вона полягає у тому, що у випадку відставання за фазою сигналу на виході

системи по відношенню до сигналу на вході при певній частоті більше ніж на 180 градусів (протифазний сигнал), його повернення каналом зворотного зв'язку на вхід системи призведе до сумування із вхідним сигналом та у випадку загального коефіцієнту передачі системи більшого за одиницю (АФЧХ охоплює особливу точку) амплітуда вихідного сигналу буде весь час збільшуватись, що свідчить про нестійкість системи. І навпаки, проходженню АФЧХ справа від особливої точки відповідатиме значення коефіцієнта передачі, менше за одиницю, що призведе до зменшення амплітуди вихідного сигналу і відповідно перебування системи у стійкому стані.

В пункті 7 додатку 1 для визначення запасів стійкості САК використані логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК.

Основна ідея ґрунтується на наступному математичному правилі складання логарифмів. Якщо передатну функцію можна представити у вигляді дробово-раціональної функції:

$$f(x) = A \prod (x + c^n)^{a_n}, \quad (1.7)$$

тоді, логарифмуючи рівність справа та зліва отримаємо:

$$\log(f(x)) = \log(A) + \sum a_n \log(x + c_n). \quad (1.8)$$

Після розбиття передатної функції на елементарні ланки можна побудувати логарифмічну амплітудно-фазочастотну характеристику (ЛАФЧХ) кожної окремої ланки, а результуючу ЛАФЧХ отримати простим додаванням.

При побудові ЛАЧХ для осі ординат звичайно використовується масштаб $20\log(f(x))$, тобто значення АЧХ, що дорівнює 100 перетворюється на 40 децибел шкали ЛАЧХ. Якщо передатна функція має вигляд:

$$W(s) = k \prod \frac{(s + x_n)^{a_n}}{(s + y_n)^{b_n}}, \quad (1.9)$$

де s – комплексна змінна, яку можна пов'язати з частотою, використовуючи наступну формальну заміну: $s = j\omega$, x_n та y_n – константи. Тоді побудувати ЛАЧХ можна використовуючи наступні правила:

○ в кожному s , де $\omega = x_n$ (нуль), нахил лінії збільшується на $20a_n$ дБ/декаду.

○ в кожному s , де $w = y_n$ (плюс), нахил лінії зменшується на $20b_n$ дБ/декаду.

Початкове значення графіка можна знайти простою підстановкою значення кругової частоти w в передатну функцію.

Початковий нахил графіка залежить від числа і порядку нулів і полюсів, які менше початкового значення частоти. Він може бути знайдений за допомогою перших двох правил.

1.6. Корекція динамічних характеристик САК.

Якщо запаси стійкості заданої САК виявились меншими від загально прийнятих норм (на практиці, надійно працююча система повинна мати запас за амплітудою $\Delta L \geq 8-12$ дБ та за фазою $\Delta\varphi \geq 30^\circ$), або система виявилась нестійкою, необхідно виконати корекцію динамічних характеристик.

Корекція системи відноситься до етапу синтезу САК, тому що при її виконанні потрібно з'ясувати, які додаткові ланки повинні бути введені в систему для забезпечення заданих якісних та кількісних показників.

Зазвичай, необхідні запаси стійкості і показники перехідного процесу забезпечуються за рахунок включення відповідних коригувальних ланок послідовно з основними ланками або введення додаткових зворотних зв'язків. У деяких випадках система без коригувальних ланок взагалі не може працювати, так як вона є структурно нестійкою, тобто має таку структуру, при якій годограф амплітудно-фазової характеристики при будь-якому підсиленні в контурі регулювання охоплює точку $(-1, j0)$. Прикладом може служити система, яка містить дві інтегруючі ланки, з'єднані послідовно.

Коригувальні пристрої використовуються також для звуження смуги пропускання системи, що дозволяє зменшити вплив завад. Коригувальні ланки описуються спеціально підібраними передатними функціями. Вони можуть включатися або послідовно з основними ланками САК, або паралельно з ними.

Найбільше застосування отримали наступні послідовні коригувальні ланки: пропорційно-диференціюючі, пропорційно-інтегруючі, пропорційно-інтегро-диференціюючі.

Іншим видом коригувальних пристроїв є паралельні коригувальні пристрої, що реалізуються у вигляді місцевих зворотних зв'язків, що охоплюють одну або декілька ланок системи. Розрізняють два види зворотних зв'язків – жорсткий та гнучкий.

При жорсткому зворотному зв'язку, вихідний сигнал ланок, які охоплені цим зв'язком, подається на вхід системи. Жорсткий зворотній зв'язок впливає на систему як при перехідних процесах, так і в сталому стані.

При гнучкому зворотному зв'язку, на вхід системи передаються похідні від вихідного сигналу основної групи ланок. Гнучкий зворотній зв'язок впливає на систему тільки при перехідних процесах, тобто коли вихідний сигнал змінюється в часі.

В пунктах 8 та 9 додатку 1 наведено приклад використання послідовної корекції САК за допомогою пасивних коригувальних ланок. Використовуючи логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК, визначена структура та параметри коригувальної ланки. Послідовна корегуюча ланка включається в ту частину системи, де циркулюють слабкі за потужністю сигнали.

1.7. Побудувати перехідну характеристику скорегованої САК.

Для отримання перехідної характеристики на вхід замкненої САК необхідно подати ступеневий одиничний сигнал. З рисунку 1.1. видно, що $Y(s) = G(s) \cdot \Phi(s)$.

Тоді, якщо $G(s) = \frac{1}{s}$, то

$$h(t) = y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \Phi(s) \right] \quad (1.10)$$

В пункті 10 додатку 1 наведено приклад побудови перехідного процесу типової САК. З графіку кривої перехідного процесу визначені якісні показники скорегованої САК, такі як відносне перерегулювання та час регулювання.

1.8. Визначити точність скорегованої САК

Визначити точність скорегованої САК при постійному $g(t) = l(t)$, або при повільно змінному $g(t) = a + bt + ct^2$ вхідному сигналі.

Похибка системи в такому режимі роботи визначається за формулою

$$e_{уст}(t) = C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot g'(t) + \frac{C_2}{2!} \cdot g''(t) + \dots \quad (1.11)$$

де C_0, C_1, C_2 – коефіцієнти похибок. Останні визначаються з передатної функції скорегованої САК за похибкою

$$\Phi_{е скор}(s) = \frac{1}{1 + W_{роз скор}(s)} = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \quad (1.12)$$

за формулою

$$C_n = \left[\frac{d^n \Phi_{e \text{ скор}}(s)}{ds^n} \right]_{s=0}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1.13)$$

Якщо на вхід системи подається гармонійний сигнал виду $g(t) = A \sin(\omega_0 t)$, то похибку необхідно визначати за формулою:

$$e_{\text{вст}}(t) = A_x \sin(\omega_0 t + \varphi_x), \quad (1.14)$$

де

$$A_x = \left| \Phi_{e \text{ скор}}(j\omega) \right|_{\omega=\omega_0} \cdot A, \quad \varphi_x = \arctg \frac{\text{Im}(\Phi_{e \text{ скор}}(j\omega))}{\text{Re}(\Phi_{e \text{ скор}}(j\omega))} \Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Визначити якість скорегованої системи за допомогою моделювання в середовищі Simulink програмного пакету MATLAB. Для цього необхідно побудувати криву перехідного процесу при дії на її вхіді ступеневого сигналу $g(t) = I(t)$ та збурення $f(t)$ згідно варіанту завдання.

ЧАСТИНА 2**АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОЇ САК**

Для одержання дискретної (цифрової) САК необхідно розглянути структурну схему скорегованої неперервної системи (додаток 1, рис. 1.13), в яку включити імпульсний елемент та формувач імпульсів типу екстраполятор нульового порядку з передатною функцією:

$$W_{\phi}(s) = \frac{1 - e^{-sT_k}}{s} = \frac{1 - z^{-1}}{s} = \frac{z - 1}{z \cdot s}. \quad (2.1)$$

В загальному випадку структурна схема дискретної системи набуде наступного вигляду (рис. 2.1).

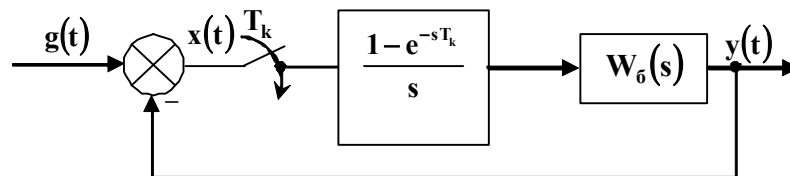


Рис. 2.1. Структурна схема цифрової САК.

Тут $W_0(s)$ – передатна функція неперервної скорегованої САК.

2.1. Визначити період дискретизації T_k .

Згідно теореми Котельникова

$$T_k \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}, \quad (2.2)$$

де ω_{\max} – максимальна частота в спектрі сигналу $g(t)$.

Оскільки наперед ми не можемо знати ω_{\max} , цей параметр сигналу визначається за використанням амплітудно-частотної характеристики розімкненої (в даному випадку скорегованої) САК за умови:

$$|W_0(j \cdot \omega_{\max})| \leq 0,1. \quad (2.3)$$

В **додатку 2 (пункт 1)** зазначені необхідні дії для визначення періоду дискретизації T_k та на конкретному прикладі показано порядок його розрахунку.

2.2. Визначити передатну Z-функцію розімкненої дискретної САК (ДСАК) за формулою:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[\frac{W_o(s)}{s} \right]. \quad (2.4)$$

В додатку 2 (пункт 2) наведена методика та послідовність одержання дискретних передатних функцій розімкненої $w(z)$ та замкненої $\Phi(z)$ системи:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{B(z)}{D(z)}, \quad (2.5)$$

а також передатна Z-функція замкнутої дискретної системи за похибкою:

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{1+W(z)}. \quad (2.6)$$

2.3. Визначити стійкість ДСАК.

Для цього використовується характеристичне рівняння ДСАК (2.5):

$$D(z) = 0. \quad (2.7)$$

Щоб використати критерій Рауса або Гурвіца, необхідно виконати білінійне перетворення шляхом заміни оператора z наступним чином:

$$z = \frac{1+v}{1-v}. \quad (2.8)$$

В додатку 2 (пункт 3) наведено порядок таких перетворень на конкретному прикладі.

2.4. Побудувати псевдочастотні логарифмічні характеристики ДСАК та визначити запаси стійкості.

Для цього необхідно над передатною функцією розімкненої ДСАК $W(z)$ виконати білінійне перетворення:

$$z = \frac{1 + j\lambda \cdot \frac{T_k}{2}}{1 - j\lambda \cdot \frac{T_k}{2}}, \quad (2.9)$$

де $\lambda = \frac{2}{T_k} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T_k}{2} \right)$ – псевдочастота сигналу (при $\frac{\omega T_k}{2} \leq 1$ $\operatorname{tg} \left(\frac{\omega T_k}{2} \right) = \frac{\omega T_k}{2}$, а при $\omega \leq \frac{2}{T_k}$ $\lambda = \omega$).

В додатку 2 (пункт 4) наведена необхідна інформація для побудови псевдочастотних логарифмічних характеристик з використанням конкретного

прикладу та використанням програмного пакету MATHCAD 11 для визначення запасів стійкості ДСАК.

2.5. Побудувати криву перехідного процесу ДСАК.

Для цього необхідно на вхід замкненої ДСАК подати одиничний ступеневий сигнал $\frac{z}{z-1}$ і одержати $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \Phi(z); y(nT_k) = Z^{-1}[Y(z)]. \quad (2.10)$$

В додатку 2 (пункт 5) наведена послідовність етапів побудови $y(t)$ на конкретному прикладі за допомогою програмного пакету MATLAB.

2.6. Визначити коефіцієнти похибок замкненої системи ДСАК та її похибку при повільному сигналі на вході.

В додатку 2 (пункт 6) наведено методику та порядок розрахунку коефіцієнтів похибок.

ЧАСТИНА 3

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНОЇ САК

Аналіз та синтез нелінійних САК (НСАК) потребує застосування інших методів дослідження, що перш за все зумовлено неможливістю застосування математичного апарату перетворень Лапласа та, відповідно, і віще розглянутих методів дослідження.

Розглянемо функціональну схему САК згідно варіанту завдання (додаток 1, рис. 1.1), та її структурну схему, одержану в частині 1 (рис.1.1).

Один з лінійних елементів в структурній схемі (частіше всього це може бути підсилювач або виконавчий механізм) замінюємо нелінійним елементом у відповідності до варіанту завдання.

Типові статичні нелінійні характеристики наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Основні види нелінійних статичних характеристик ланок

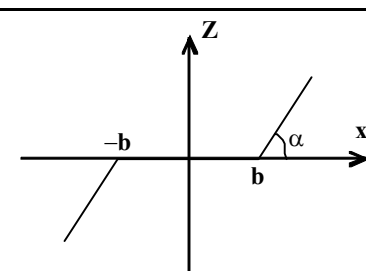
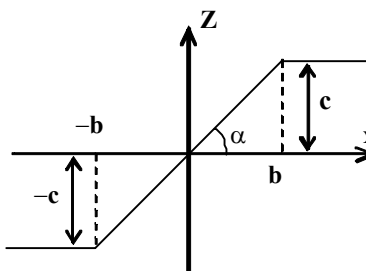
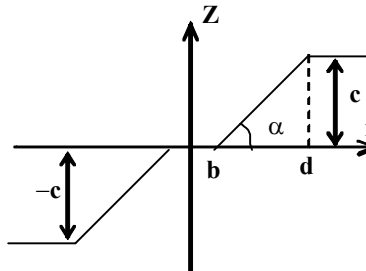
№ п/п	Вид нелінійності	Назва характеристики, коментар
1	2	3
1		Нелінійність із зоною нечутливості. Коефіцієнт підсилення $k = tg\alpha$.
2		Нелінійність з насиченням (обмеженням за рівнем). Коефіцієнт підсилення $k = tg\alpha = \frac{c}{b}$.
		Нелінійність з зоною нечутливості та насиченням. Коефіцієнт підсилення $k = tg\alpha = \frac{c}{d-b}$.

Табл. 3.1. Основні види нелінійних статичних характеристик ланок
(продовження)

1	2	3
4.		<p>Ідеальна (двопозиційна) релейна характеристика.</p> $Z = c \operatorname{sign} x = c \frac{x}{ x }.$
5		<p>Трипозиційна релейна характеристика (релейна характеристика з зоною нечутливості).</p>
6		<p>Ідеальна релейна характеристика із гістерезисом.</p>

Структурну схему НСАК необхідно привести до вигляду, представленому на рисунку 3.1., об'єднуючи всі лінійні елементи системи одним структурним блоком та визначаючи загальну передатну їх функцію $w_{\text{Л}}(s)$.

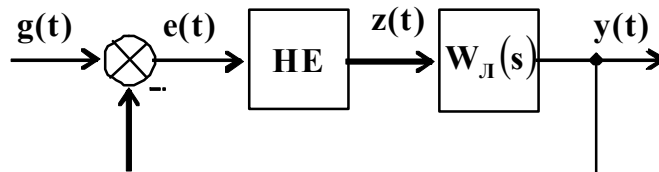


Рис. 3.1. Структурна схема НСАК.

Із теорії нелінійних систем автоматичного керування відомо, що НСАК мають декілька режимів стійкості [7, ст. 423-425].

Одним з основних режимів роботи НСАК є режим автоколиваль, що характеризується наявністю незатухаючих гармонійних сигналів на виході системи за відсутністю зовнішніх періодичних впливів.

3.1. Метод гармонійної лінеаризації.

Метод використовується для дослідження автоколиваль НСАК. За його використанням можливо лінеаризувати будь-який НЕ, одержати його передатну функцію, визначити стійкість НСАК, а також визначити амплітуду та частоту стійких автоколиваль в системі, якщо вони присутні.

Розглянемо структурну схему розімкнутої НСАК, зображену на рисунку 3.2.

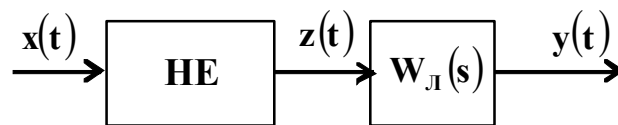


Рис. 3.2. Структурна схема розімкнутої НСАК.

Якщо на вхід НЕ подати гармонійний сигнал: $x(t) = A \sin \omega t$, то на виході НЕ з'явиться періодичний сигнал виду $z(t) = F(A \sin \omega t)$, що є результатом спотворення вхідного сигналу статичною характеристикою НЕ.

Оскільки сигнал $z(t)$ є періодичним, то його можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$z(t) = z_0 + z_{1\max} \sin(\omega t + \varphi_1) + z_{2\max} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (3.1)$$

Приймаємо гіпотезу про те, що лінійна частина $w_{\text{л}}(j\omega)$ є фільтром нижніх частот. Це дає можливість для аналізу розглядати у частотному спектрі сигналу $y(t)$ лише постійну складову та першу гармоніку. Таким чином, сигнал на вході НЕ можна представити у вигляді суми тільки двох членів ряду, оскільки інші гармоніки не проходять на вихід лінійної частини:

$$z(t) = z_0 + z_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.2)$$

При умові, що НЕ є симетричним, постійна складова ряду Фур'є $z_0 = 0$. Тоді $z(t) = z_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$.

Відомо, що $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi$, тоді

$$z(t) = z_{\max} \sin \omega t \cdot \cos \varphi + z_{\max} \cos \omega t \cdot \sin \varphi = A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t, \quad (3.3)$$

де:

$$A_{11} = z_{\max} \cos \varphi = \frac{2}{T} \int_0^T F(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t;$$

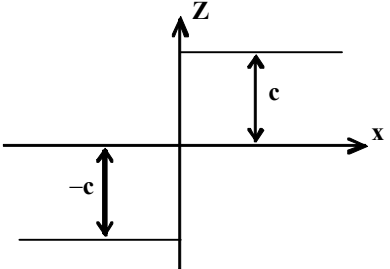
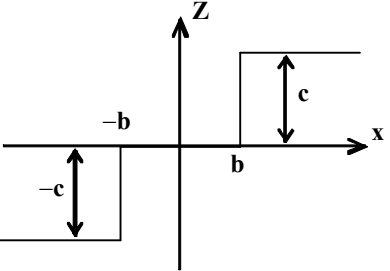
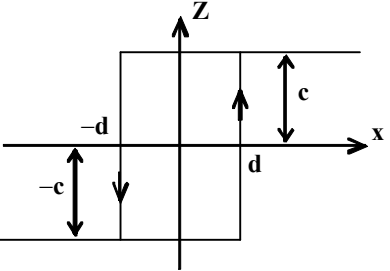
$$A_{12} = z_{\max} \sin \varphi = \frac{2}{T} \int_0^T F(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d\omega t.$$

З рівняння $x(t) = A \sin \omega t$ отримаємо наступні вирази $\sin \omega t = \frac{x(t)}{A}$; $\frac{dx(t)}{dt} = \omega A \cos \omega t$; $\cos \omega t = \frac{1}{\omega A} \frac{dx(t)}{dt}$. Тоді $z(t) = \frac{A_{11}}{A} x(t) + \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{\omega} \frac{dx(t)}{dt}$.

Після введення коефіцієнтів гармонійної лінеаризації $q(a) = \frac{A_{11}}{A}$, $q_1(a) = \frac{A_{12}}{A}$, отримаємо $z(t) = q(a) \cdot x(t) + q_1(a) \cdot \frac{1}{\omega} \frac{dx(t)}{dt}$.

В таблиці 3.2. наведені коефіцієнти гармонічної лінеаризації для різних типів НЕ.

Таблиця 3.2. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації нелінійностей

№	Вид нелінійності	Значення $q(a)$, $q_1(a)$
1.		$q(a) = \frac{4c}{\pi a}$; $q_1(a) = 0$.
2.		$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - b^2/a^2}$; $a \geq b$ $q_1(a) = 0$.
3.		$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - d^2/a^2}$, $a \geq d$; $q_1(a) = -\frac{4cd}{\pi a^2}$, $a \geq d$.

Таблиця 3.2. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації нелінійностей
(продовження)

№	Вид нелінійності	Значення $q(a)$, $q_1(a)$
4.		$q(a) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - b^2/a^2} \right),$ $a \geq b, k = \operatorname{tg} \alpha;$ $q_1(a) = 0.$
5.		$q(a) = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - b^2/a^2} \right),$ $a \geq b, k = \operatorname{tg} \alpha;$ $q_1(a) = 0.$
6.		$q(a) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - b_2^2/a^2} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - b_1^2/a^2} \right),$ $q_1(a) = 0.$

Перетворимо за Лапласом $Z(s) = L[z(t)] = \left[q(a) + q_1(a) \frac{s}{\omega} \right] \cdot X(s)$.

Звідси передатна функція гармонійно лінеаризованого НЕ має вигляд:

$$W_{HE}(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = q(a) + q_1(a) \frac{s}{\omega}. \quad (3.4)$$

В частотній формі (при заміні $s = j\omega$) передатна функція НЕ має вигляд:

$$W_{HE}(j\omega) = q(a) + jq_1(a). \quad (3.5)$$

Коефіцієнти гармонійної лінеаризації наведені у таблиці 3.2.

3.2. Використовуючи метод Гольдфарба визначити параметри автоколиваний в НСАК.

Враховуючи одержані результати, представимо структурну схему САК в наступному вигляді

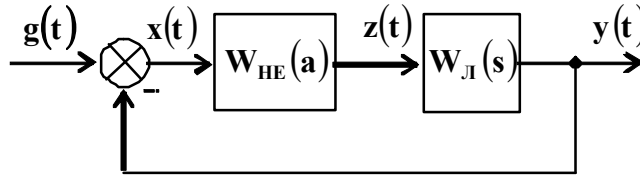


Рис. 3.3. Структурна схема лінеаризованої НСАК.

Звідси передатна функція замкненої НСАК має вигляд:

$$\Phi_{НСАК}(s, a) = \frac{W_{HE}(a) \cdot W_L(s)}{1 + W_{HE}(a) \cdot W_L(s)}. \quad (3.6)$$

В замкнутій НСАК можливі автоколивання, якщо виконується умова гармонійного балансу $1 + W_{HE}(a) \cdot W_L(j\omega) = 0$.

Амплітуду і частоту автоколиваний визначають з умови:

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_{HE}(a)} = -\frac{1}{q(a) + jq_1(a)} = M_{HE}(a) + jN_{HE}(a), \quad (3.7)$$

або

$$U_L(\omega) + jV_L(\omega) = M_{HE}(a) + jN_{HE}(a), \quad (3.8)$$

Звідки

$$\begin{cases} U_L(\omega) = M_{HE}(a) \\ V_L(\omega) = N_{HE}(a) \end{cases} \quad (3.9)$$

Систему рівнянь (3.9) можна розв'язати графоаналітичним методом: якщо годограф $W_L(j\omega)$ має перетин з графіком функції $-\frac{1}{W_{HE}(a)}$, то в НСАК можливі автоколивання, з параметрами, що визначаються в точці перетину.

В додатку 3 (пункт 1) наведено приклад аналізу НСАК за допомогою методу Гольдфарба.

3.3. За критерієм В.М. Попова визначити абсолютну стійкість НСАК.

Абсолютна стійкість стану рівноваги – це стійкість в цілому для деякого класу нелінійностей, наприклад, для нелінійностей, що лежать у секторі $[0, k]$, – рисунок 3.4, – тобто між віссю x і прямою kx .

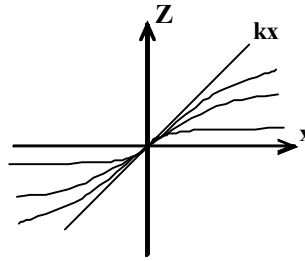


Рис. 3.4. Статичні характеристики нелінійностей.

Метод розроблений у 1959р. румунським математиком В.М. Поповим.

Нелінійна система має абсолютно стійкий стан рівноваги, якщо виконується наступна нерівність:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega h) \cdot W_{\text{л}}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0 \quad , \quad (3.10)$$

де $w_{\text{л}}(s)$ – передатна функція лінійної частини системи; h – довільне дійсне число, а нелінійна статична характеристика Z лежить в секторі $[0, k]$.

Умови, які накладаються на лінійну частину системи $W_{\text{л}}(s)$:

1. $W_{\text{л}}(s)$ повинна бути стійкою (всі корені характеристичного рівняння повинні лежати у лівій напівплощині).

2. Система повинна бути статичною та фізично реалізуватися. При цьому виключається з розгляду цілий клас астатичних систем.

Представимо частотну передаточну функцію лінійної частини системи у вигляді суми дійсної $U_{\text{л}}(\omega)$ та уявної $V_{\text{л}}(\omega)$ складових:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = U_{\text{л}}(\omega) + jV_{\text{л}}(\omega) \quad (3.11)$$

З умови абсолютної стійкості НСАК отримаємо:

$$U_{\text{л}}(\omega) - \omega h V_{\text{л}}(\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (3.12)$$

Вводимо модифіковану передаточну функція:

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = U_{\text{л}}^*(\omega) + jV_{\text{л}}^*(\omega), \quad (3.13)$$

де

$$U_{\text{л}}^*(\omega) = U_{\text{л}}(\omega); \quad V_{\text{л}}^*(\omega) = \omega V_{\text{л}}(\omega), \quad (3.14)$$

тоді

$$U_L^*(\omega) - hV_L^*(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (3.15)$$

Графічна інтерпретація теореми В.М. Попова (рис. 3.5): якщо можна провести в площині $W_L^*(j\omega)$ пряму через точку з координатами $(-1/k, j0)$, що не перетинає амплітудно-фазову характеристику модифікованої системи $W_L^*(j\omega)$, то система має абсолютно стійкий стан рівноваги.

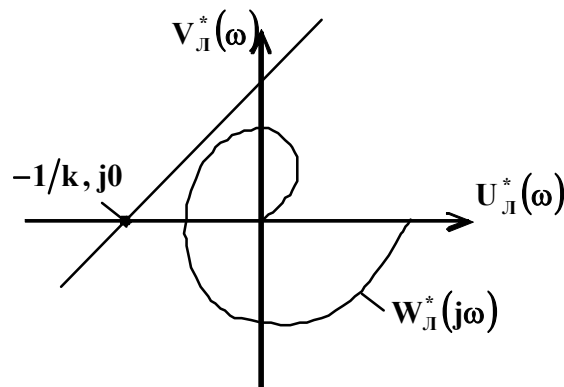


Рис. 3.5. Аналіз стійкості НСАК за методом Попова.

Критерій Геліга (розвиток методу В.М. Попова).

Вводяться наступні обмеження на нелінійності:

1. У нелінійності повинні бути наявні зони нечутливості та насичення (рис. 3.6).
2. Нелінійність не повинна прилягати до прямої kx .

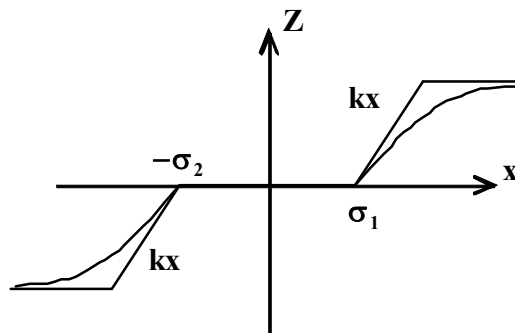


Рис. 3.6. Статичні характеристики нелінійностей.

На відміну від методу В.М. Попова за використанням критерію Геліга може досліджуватись більш широкий клас систем, зокрема з астатизмом першого порядку. Подальше формулювання критерію ідентичне методу В.М. Попова.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 768 с.
2. Бесекерский В.А., Иванов В.А., Самотокин Б.Б. Орбитальное гирокомпасирование / Под ред. Б.Б. Самотокина. – СПб: Политехника, 1993. – 256 с.
3. Задачник по теории автоматического управления / Под ред. А.С. Шаталова. – М.: Энергия, 1979. – 544 с.
4. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К.: Техніка, 1977. – 472 с.
5. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
6. Самотокин Б.Б. Вопросы анализа и синтеза линейных систем автоматического управления подвижными объектами: Учебное пособие. – К.: КПИ, 1974. – 68 с.
7. Самотокін Б.Б. Курс лекцій з теорії автоматичного керування: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 501 с.
8. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
9. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
10. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

Додаток 1. ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ НЕПЕРЕРВНОЇ ЛІНІЙНОЇ САК

Розглянемо аналіз та синтез неперервної лінійної САК на прикладі системи автоматичного регулювання температури у печі (рис. 1.4).

Дані для розрахунків наведені у таблиці 1.

Таблиця 1. Початкові дані

$k_M, B/^\circ C$	k_{II}	T_D, c	$k_D, cм/B$	T_{OK}, c	$k_{OK}, ^\circ C/cм$	$k_f, ^\circ C/c$	b	$\sigma, \%$	t_p, c
0,9	18	0,05	0,15	3,4	4,4	1,9	0,1	30	20

Надалі проведемо аналіз властивостей її дискретного аналогу.

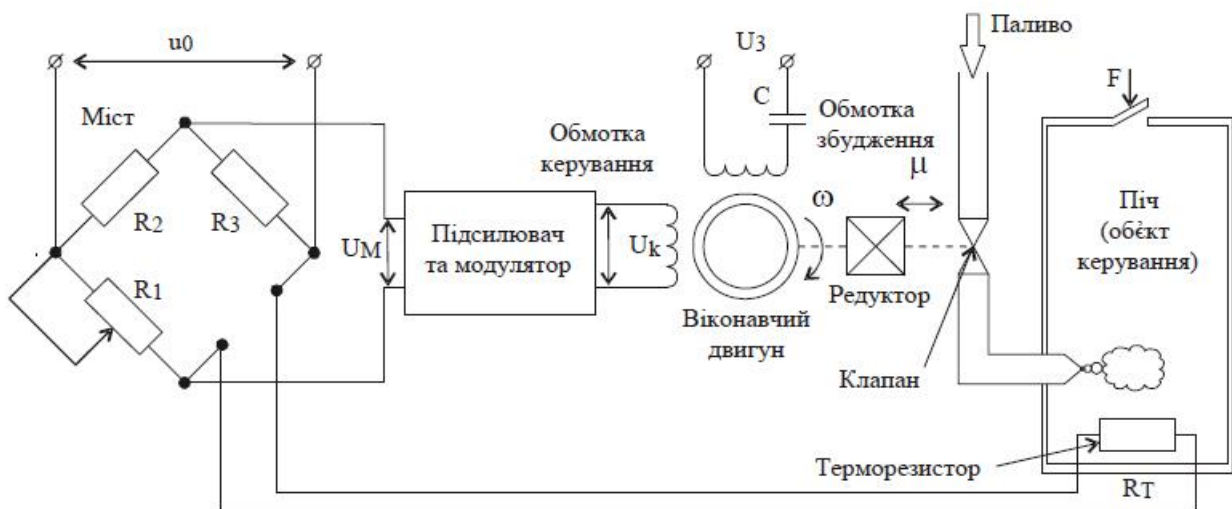


Рис. 1.4. Принципова схема САК.

Динамічні властивості кожного елементу системи описуються наступними лінійними диференційними та алгебраїчними рівняннями:

Вимірювальний міст

$$u_M = k_M \cdot \Delta\theta,$$

$$\Delta\theta = \theta_3 - \theta, \text{ де:}$$

u_M – вихідна напруга мосту;

θ_3 – задане значення температури у печі;

θ – температура у печі (величина, що регулюється);

$\Delta\theta$ – відхилення температури від заданого значення

(похибка регулювання);

 u_0 – напруга живлення мосту.

Підсилювач та модулятор	$u_K = k_{II} \cdot u_M$, де: u_K – напруга обмотки керування виконавчого двигуна; u_3 – напруга обмотки збудження виконавчого двигуна.
Трипозиційне реле з зоною нечутливості	при дослідженні нелінійної системи, замінити підсилювач нелінійним елементом (НЕ) вигляду: <div style="text-align: center;">  </div>
Виконавчий двигун з редуктором	$T_D \frac{d^2}{dt^2} \mu + \frac{d}{dt} \mu = k_D \cdot u_K$
Об'єкт керування (Піч)	$T_{OK} \frac{d}{dt} \theta + \theta = k_{OK} \cdot \mu - k_f \cdot f(t)$, де μ – переміщення клапана газопроводу; f – зовнішнє збурення, що діє на об'єкт регулювання ($f(t) = at$)
Отримана (синтезована) система повинна мати задані у завданні показники якості, такі як відносне перерегулювання σ та час регулювання (перехідного процесу) t_p .	

1. На основі рівнянь, що описують динамічні властивості кожного елемента системи, та підставляючи дані з таблиці 1, визначимо їх передатні функції:

– передатна функція мосту:

$$W_M(s) = \frac{u_M(s)}{\Delta\theta(s)} = 0,9; \quad (1)$$

– передатна функція підсилювача та модулятора:

$$W_{II}(s) = \frac{u_K(s)}{u_M(s)} = 18; \quad (2)$$

– передатна функція виконавчого двигуна з редуктором:

$$W_D(s) = \frac{\mu(s)}{u_K(s)} = \frac{0,15}{s(0,05s + 1)}; \quad (3)$$

– передатна функція об'єкту керування (печі) описується двома передатними функціями:

а) за вхідним сигналом (переміщенням клапану газопроводу):

$$W_{OK}(s) = \frac{\theta(s)}{\mu(s)} = \frac{4,4}{(3,4s + 1)}; \quad (4)$$

б) за зовнішнім збуренням:

$$W_f(s) = \frac{\theta(s)}{f(s)} = \frac{-1,9}{(3,4s + 1)}. \quad (5)$$

Структурно зв'язок між параметрами, які безпосередньо впливають на зміну вихідної координати (температури) відображено на рисунку 2.1., де:

$$\theta(s) = \frac{4,4}{(3,4s + 1)}\mu(s) - \frac{1,9}{(3,4s + 1)}f(s).$$

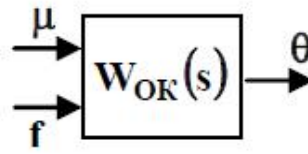


Рис. 1.5. Структурна схема об'єкту керування.

2. На основі отриманих передатних функцій елементів системи складаємо структурну схему системи (рис. 2.2.).

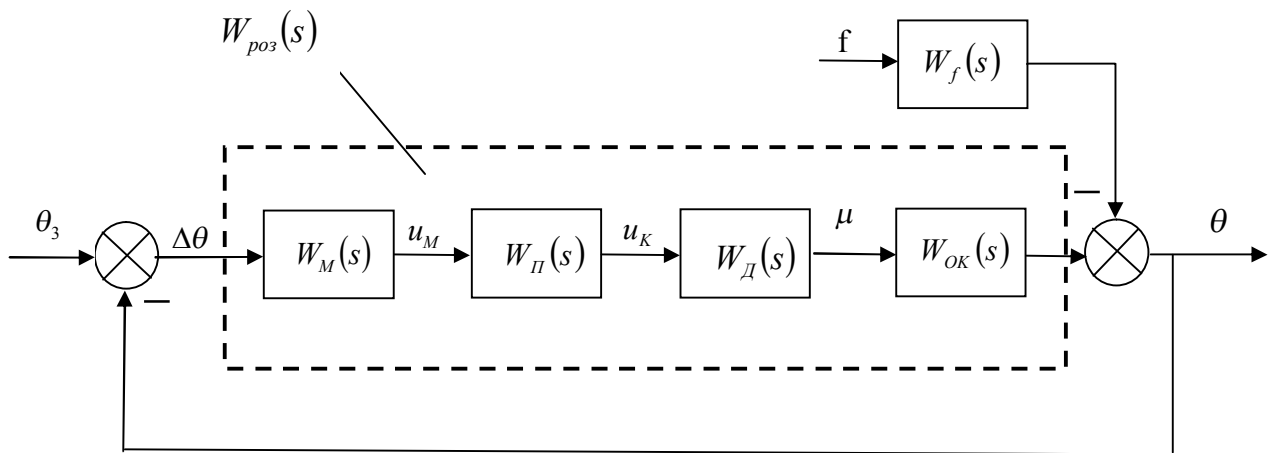


Рис. 1.6. Структурна схема САК.

3. На основі структурної схеми знайдемо передатні функції, які описують динамічні властивості системи.

Передатна функція розімкнutoї системи за вхідним сигналом знаходиться за формулою:

$$W_{роз}(s) = \frac{\theta(s)}{\theta_3(s)} = W_M(s)W_{II}(s)W_D(s)W_{OK}(s), \quad (6)$$

тобто

$$W_{роз}(s) = \frac{0,9 \cdot 18 \cdot 0,15 \cdot 4,4}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1)} = \frac{10,692}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1)}. \quad (7)$$

Передатна функція замкненої системи за вхідним сигналом буде мати вигляд:

$$\Phi(s) = \frac{\theta(s)}{\theta_3(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{k_3}{s(T_D s + 1)(T_{OK} s + 1) + k_3}, \quad (8)$$

де $k_3 = k_M \cdot k_{II} \cdot k_D \cdot k_{OK}$ – загальний коефіцієнт підсилення системи, тобто

$$\Phi(s) = \frac{10,692}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1) + 10,692}. \quad (9)$$

Передатна функція замкненої системи за сигналом похибки $\Phi_{\Delta\theta}(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\theta_3(s)}$, згідно виразу 1.2 (частини 1 даних методичних вказівок) буде мати вигляд:

$$\Phi_{\Delta\theta}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{роз}}(s)}, \quad (10)$$

або

$$\Phi_{\Delta\theta}(s) = \frac{s(0,05s + 1)(3,4s + 1)}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1) + 10,692}. \quad (11)$$

Передатна функція замкненої системи за збуренням $\Phi_f(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)}$, згідно виразу 1.3 (частини 1 даних методичних вказівок) буде мати вигляд:

$$\Phi_f(s) = \frac{-W_f(s)}{1 + W_{\text{роз}}(s)}, \quad (12)$$

тобто

$$\Phi_f(s) = \frac{-\frac{1,9}{(3,4s + 1)}}{1 + \frac{10,692}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1)}} = \frac{-950 \cdot s \cdot (0,05s + 1)}{(85s^3 + 1725s^2 + 500s + 5346)}. \quad (13)$$

4. Визначимо стійкість замкненої САК за критерієм Гурвіца. Для цього використаємо характеристичний поліном (знаменник передаточної функції) передаточної функції замкненої системи за вхідним сигналом (9):

$$D(s) = s(0,05s + 1)(3,4s + 1) + 10,692 = 0,17s^3 + 3,45s^2 + 1s + 10,692. \quad (14)$$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

На основі коефіцієнтів характеристичного поліному побудуємо визначник Гурвіца за наступною схемою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,45 & 10,692 & 0 \\ 0,17 & 1 & 0 \\ 0 & 3,45 & 10,692 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Згідно з критерієм Гурвіца, система буде стійкою, якщо при $a_0 > 0$ всі діагональні мінори визначника Гурвіца будуть додатними:

$$\Delta_1 = a_1 = 3,45 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \text{ тобто } 3,45 \cdot 1 - 0,17 \cdot 10,692 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_3 = 1,63236 \cdot 10,692 = 17,453.$$

Це означає, що система є стійкою. Однак даний критерій не дає відповіді, які запаси стійкості має система і чи потребує подальшого вдосконалення для досягнення заданих показників якості.

5. Метод D-розбиття за параметром k_3 . Визначимо критичний коефіцієнт підсилення системи, при якому система буде знаходитись на коливальній межі стійкості. Для цього скористаємось частотним методом D-розбиття, який дозволить нам визначити область допустимих значень загального коефіцієнту підсилення системи. Використаємо характеристичне рівняння передатної функції замкненої системи (8) та (9) зі заздалегідь невідомим загальним коефіцієнтом підсилення системи k_3 :

$$D(s) = s(0,05s + 1)(3,4s + 1) + k_3 = 0. \quad (16)$$

Перепишемо останнє рівняння, розкриваючи дужки, відносно параметру k_3 вважаючи його залежним від s :

$$k_3(s) = -0,17s^3 - 3,45s^2 - s. \quad (17)$$

Зробимо заміну $s = j \cdot \omega$, тоді вираз невідомого параметра в частотній формі буде мати вигляд:

$$k_3(j\omega) = -0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 - j\omega = 3,45\omega^2 + j(0,17\omega^3 - \omega). \quad (18)$$

З цього поліному визначимо дійсну $U(\omega)$ та уявну частину $V(\omega)$ виразу:

$$U(\omega) = 3,45\omega^2, \quad V(\omega) = 0,17\omega^3 - \omega. \quad (19)$$

Змінюючи частоту $-\infty < \omega < +\infty$ з деяким кроком зміни ω , знаходимо значення $U(\omega)$ та $V(\omega)$, і на комплексній площині будемо область допустимих параметрів k_3 (рис. 1.7). Так як коефіцієнт підсилення є дійсною величиною, то за умови стійкості системи, вона буде стійкою, якщо коефіцієнт підсилення буде знаходитись у межах $0 < k_3 < k_{кр}$.

Для більш точного визначення граничного коефіцієнта підсилення проведемо наступні дії – знайдемо точки перетину отриманого графіка з дійсною віссю комплексної площини. Для цього прирівняємо вираз уявної частини (19) до 0: $V(\omega) = 0$. Вирішимо отримане рівняння $0,17\omega^3 - \omega = 0$, з якого випливає, що графік перетинає дійсну вісь у двох випадках: $\omega = 0$ та $\omega^2 = 5,882$. Підставимо отримані значення у вираз для $U(\omega)$. Отримаємо $U(\omega) = 0$, а $U(\sqrt{5,882}) = 20,29$. Тобто критичний коефіцієнт підсилення системи $k_{кр} = 20,29$.

Цей результат також свідчить, що система є стійкою, так як коефіцієнт підсилення системи менший за його критичне значення. Однак питання щодо запасів стійкості системи все ще остається невирішеним.

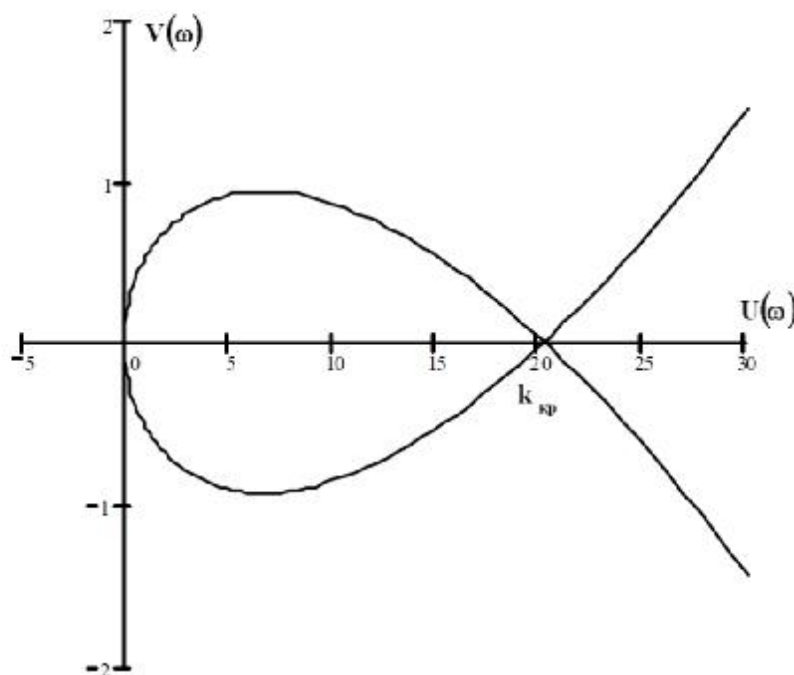


Рис. 1.7. Межа стійкості та критичний коефіцієнт підсилення $k_{кр}$ САК.

6. Визначення запасів стійкості. Для визначення запасів стійкості системи застосуємо критерій Найквіста, в якому використовується передатна функція розімкненої системи за вхідним сигналом (7):

$$W_{роз}(s) = \frac{10,692}{s(0,05s+1)(3,4s+1)}.$$

Зробимо заміну $s = j \cdot \omega$, тоді передатна функція в частотній формі буде мати вигляд:

$$W_{роз}(j\omega) = \frac{10,692}{-0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 + j\omega}. \quad (20)$$

Для визначення дійсної $U(\omega)$ та уявної частини $V(\omega)$ частотної передатної функції необхідно помножити її чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику відносно уявної частини, з ціллю позбавлення від уявної частини знаменника отриманих виразів:

$$W_{роз}(j\omega) = \frac{10,692 \cdot (0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 - j\omega)}{(-0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 + j\omega)(0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 - j\omega)}. \quad (21)$$

Спростивши вираз, отримаємо:

$$W_{роз}(j\omega) = \frac{1,82j\omega^3 - 36,9\omega^2 - 10,692j\omega}{0,0289\omega^6 + 11,5625\omega^4 + \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (22)$$

Звідси випливає:

$$U(\omega) = \frac{-36,9}{0,0289\omega^4 + 11,5625\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = \frac{1,82\omega^2 - 10,692}{0,0289\omega^5 + 11,5625\omega^3 + \omega^1}. \quad (23)$$

Змінюючи частоту $0 < \omega < +\infty$ з деяким кроком зміни ω , знаходимо значення $U(\omega)$ та $V(\omega)$, і на комплексній площині будуємо годограф Найквіста (шлях руху вектору, що описує амплітудно-фазочастотні властивості системи з ростом частоти) (рис. 1.8.).

Для більш точного визначення точки перетину годографа з дійсною віссю комплексної площини, прирівняємо вираз уявної частини (23) до 0: $V(\omega)=0$. Вирішимо отримане рівняння $1,82\omega^2 - 10,692 = 0$, з якого випливає, що годограф перетинає дійсну вісь тільки при значенні: $\omega^2 = 5,875$. Підставимо отримане значення у вираз для $U(\omega)$. Отримаємо $U(\sqrt{5,875}) = -0,528$.

Запас стійкості за амплітудою характеризує віддаленість точки АФЧХ від межі стійкості, тобто від точки з координатами $-1, j0$ (це частота, при якій фаза становить значення $\varphi(\omega) = -\pi$, тобто вісь, на якій знаходиться ця точка, характеризує границю стійкості системи за фазою). Тоді запас стійкості системи у відносних одиницях дорівнює $\Delta h = 1 - 0,528 = 0,472$.

Використовуючи отримане значення, можливо отримати запас стійкості системи за амплітудою, виражений в децибелах:

$$\Delta L = 20 \cdot \log \left| \frac{1}{1 - 0,472} \right| = 5,55 \text{ дБ}.$$

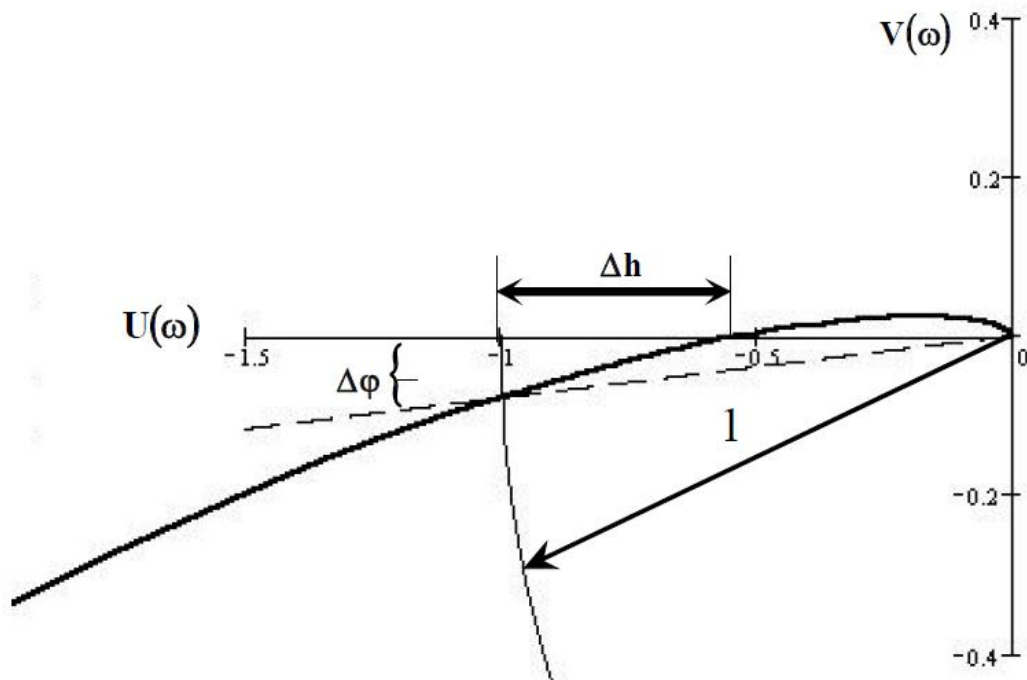


Рис. 1.8. Визначення запасів стійкості САК за критерієм Найквіста.

Таким чином, запас по амплітуді являє собою запас за коефіцієнтом передачі розімкнутого ланцюга по відношенню до його граничного за стійкістю значення.

Вираз, за яким змінюється фаза системи визначається за формулою:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{1,82\omega^3 - 10,692\omega}{-36,9\omega^2}\right). \quad (24)$$

Для знаходження запасу стійкості системи за фазою, необхідно вирішити наступне рівняння:

$$|W(j\omega)| = 1. \quad (25)$$

З виразу (25) ми отримуємо так звану частоту зрізу ω_{zp} . Запас стійкості за фазою визначається величиною, на яку має зрости запізнення по фазі в системі при визначеній частоті зрізу, щоб система опинилася на межі стійкості.

Аналітичне вирішення рівняння (25) пов'язано з великими труднощами, тому значення частоти зрізу знаходимо за допомогою програмного пакету MATHCAD 11:

$$|W(j\omega)| - 1 \text{ solve, } \omega \rightarrow \begin{bmatrix} -20.00j \\ +20.00j \\ -1.789j \\ +1.789j \\ -1.758 \\ +1.758 \end{bmatrix}.$$

З отриманих результатів знаходження коренів рівняння (25) за частоту зрізу, обираємо дійсне додатне значення $\omega_{zp} = 1,758 \text{ c}^{-1}$.

Підставивши в вираз для визначення фази (24) отриману частоту ω_{zp} , знайдемо запас стійкості системи за фазою: $\Delta\varphi = \pi - |\varphi(1,758)| = 4,5^\circ$.

Виходячи з отриманих результатів, робимо висновок, що система є стійкою, але має малі запаси стійкості по фазі та амплітуді (на практиці, надійно працююча система повинна мати запас за амплітудою $\Delta L \geq 8 - 12 \text{ дБ}$ та за фазою $\Delta\varphi \geq 30^\circ$), тому вона потребує подальшої корекції.

7. Для проведення корекції системи спочатку нам необхідно побудувати логарифмічні амплітудно-фазочастотні характеристики вихідної системи з використанням передатної функції (7) розімкненої системи за вхідним сигналом:

$$W_{\text{роз}}(s) = \frac{10,692}{s(0,05s+1)(3,4s+1)} = \frac{k_3}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Спочатку знаходимо контрольну точку L_0 , через яку буде проходити ЛАЧХ. Згідно виразів (1.5) та (1.6) частини 1 даних методичних вказівок має вигляд:

$$L_0 = 20 \cdot \log(k_3) = 20 \cdot \log(10,692) = 20,58 \text{ дБ} \quad (26)$$

Далі знаходимо частоти спряження, як обернені значення постійних часу:

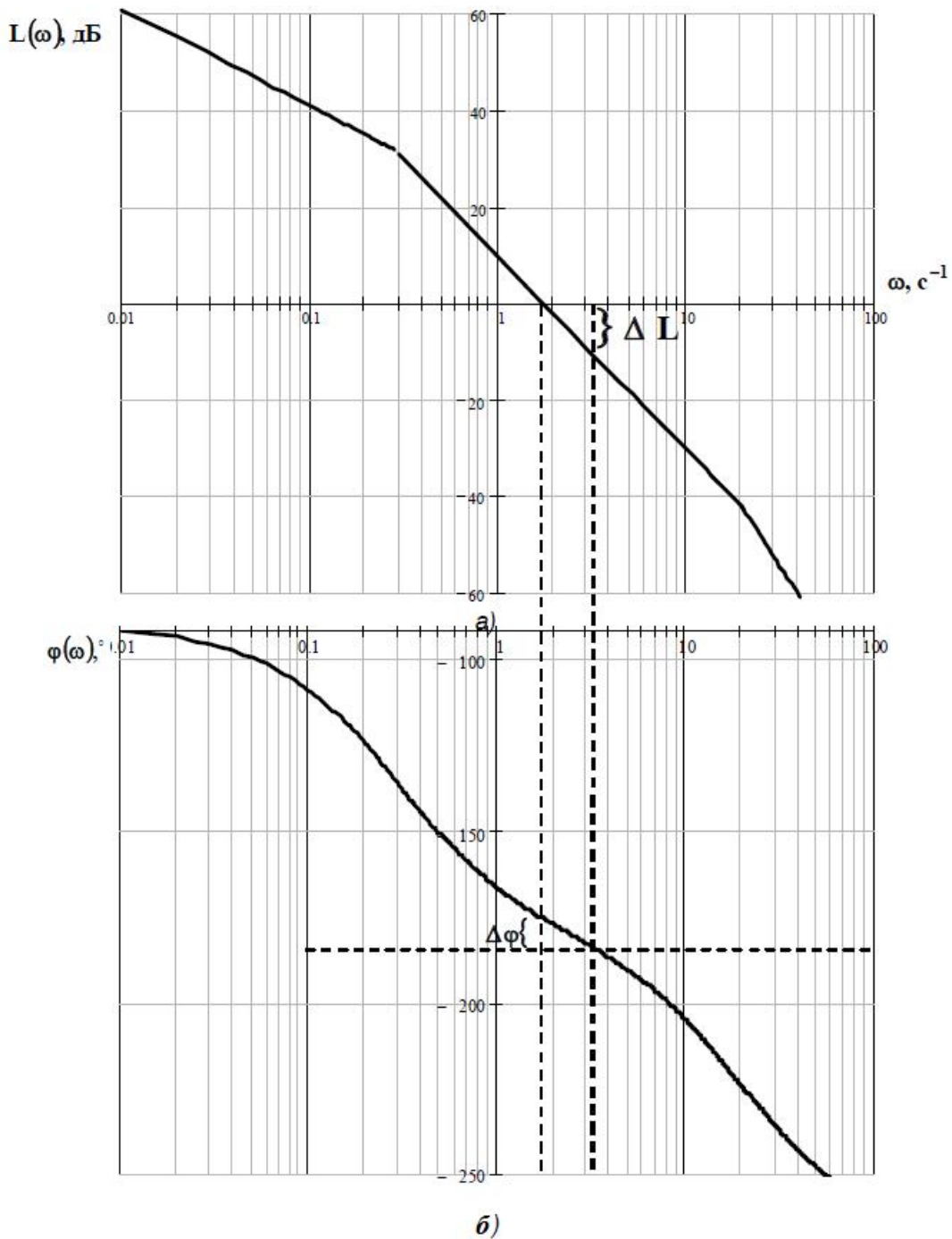


Рис. 1.9. Частотні характеристики САК та запаси стійкості:
а) ЛАЧХ; б) ЛФЧХ.

$$\omega_1 = 1/T_1 = 20 \text{ c}^{-1}, \omega_2 = 1/T_2 = 0,294 \text{ c}^{-1}.$$

Вихідна САК (7) є системою третього порядку з астатизмом першого порядку, до складу якої входить загальний коефіцієнт підсилення системи, інтегруюча ланка (редуктор), інерційна ланка першого порядку, що описує динаміку виконавчого двигуна та інерційна ланка першого порядку, що описує динаміку об'єкта керування (печі). Кожна з цих ланок дає нахил ЛАЧХ у -20 дБ/дек , тобто останній відрізок ЛАЧХ буде мати нахил у -60 дБ/дек (рис. 1.9).

Фазову характеристику згідно з [7] будемо за формулою:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T_2\omega) - \text{arctg}(T_1\omega). \quad (27)$$

Як бачимо з рисунку 1.9, запаси стійкості співпадають зі значеннями, які були розраховані за критерієм Найквіста. Хоча система є стійкою, запаси стійкості малі, що впливає на якість динамічних процесів у системі (велика кількість коливань вихідної координати).

8. Так як система має малі запаси стійкості за фазою та амплітудою, необхідно провести її корекцію. Корекція системи повинна забезпечити необхідні характеристики системи, тобто задані у технічному завданні запаси стійкості і показники якості перехідного процесу.

Так як САК працює за використанням постійного струму, проведемо корекцію системи за допомогою введення у її склад послідовного коригувальний фільтру у вигляді пасивної RC-ланки.

Побудуємо ЛАЧХ бажаної системи, виходячи з заданих параметрів якості:

- відносне перерегулювання $\sigma \leq 30\%$;
- час регулювання $t_p = 20 \text{ c}$.

Для цього за першою номограмою Солодовнікова (рис. 1.10) визначаємо, що для значення перерегулювання $\sigma = 30\%$, залежність між часом регулювання та частотою зрізу ЛАЧХ бажаної системи має співвідношення: $t_p = \frac{4,1\pi}{\omega_{зр_0}}$. З цього

виразу отримуємо, що $\omega_{зр_0} = \frac{4,1\pi}{t_p} = 0,67 \text{ c}^{-1}$.

Для того, щоб бажана система була стійкою, необхідно, щоб ЛАЧХ перетинала вісь частот під нахилом -20 дБ/дек , при цьому мінімальний запас

стійкості за амплітудою для заданого значення перегулювання повинен бути $L_M \geq 13$ дБ (за другою номограмою Солодовнікова).

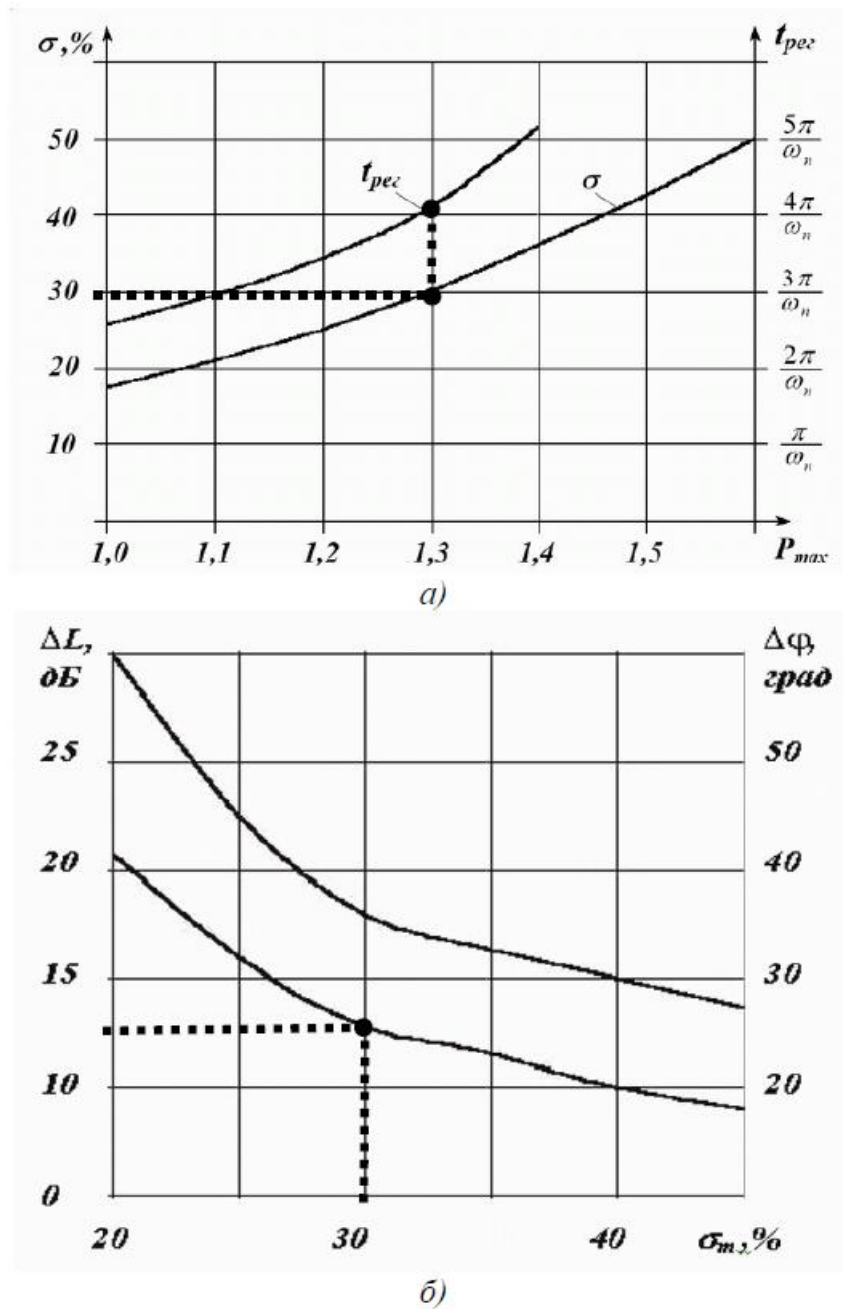


Рис. 1.10. Номограми Солодовнікова:

а) для побудови середньочастотної асимптоти; б) для визначення запасів стійкості.

За вказаних умов побудуємо ЛАЧХ в області середніх частот у діапазоні $0,10 \leq \omega \leq 4,25$ під нахилом $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ (рис. 1.11).

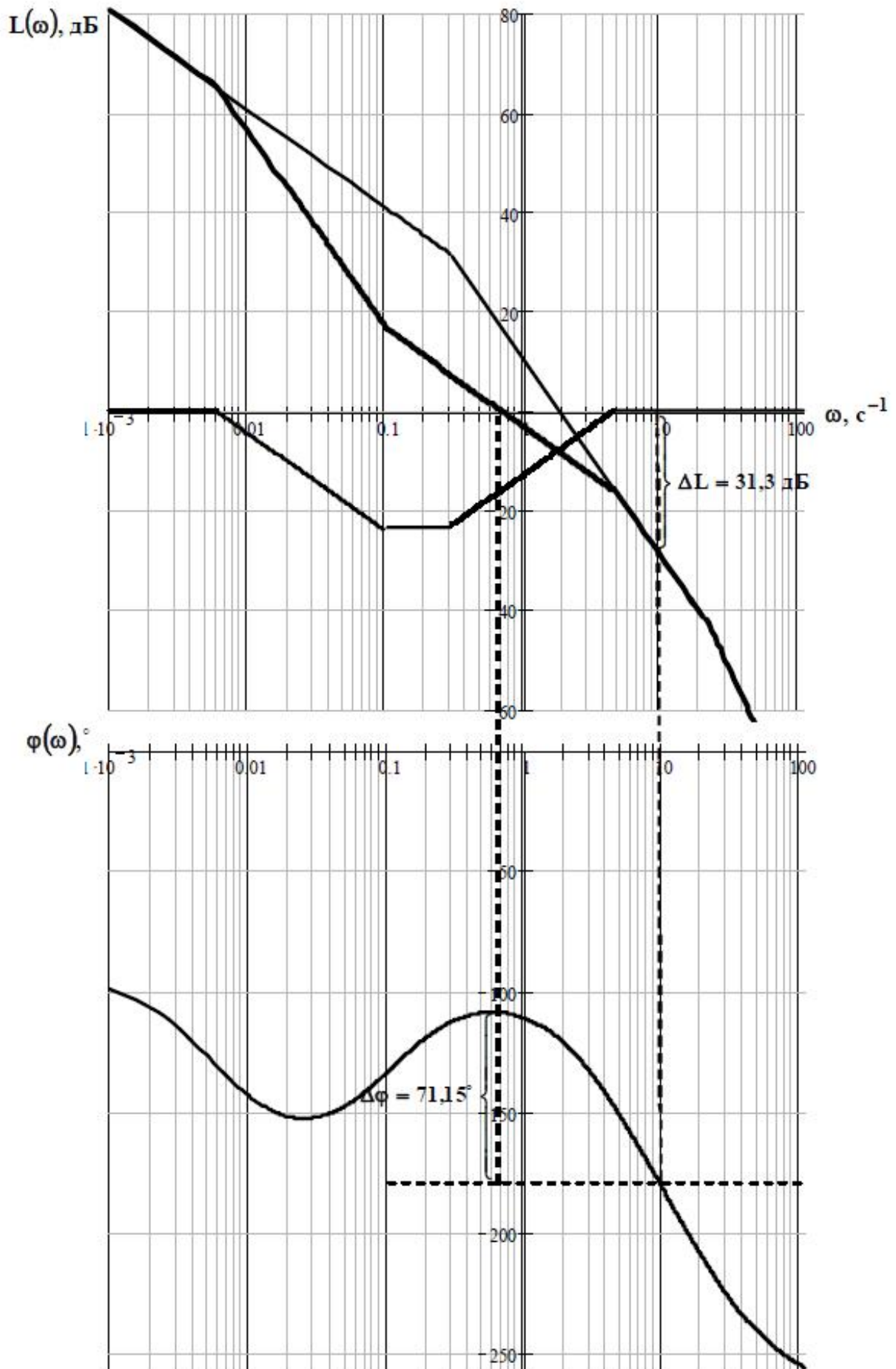


Рис. 1.11. Синтез бажаної ЛАЧХ та ЛФЧХ САК

Починаючи з частоти $\omega = 4,25 \text{ c}^{-1}$ ЛАЧХ бажаної системи співпадає з ЛАЧХ вихідної системи, та при цьому забезпечується необхідний мінімальний запас стійкості за амплітудою.

Для спряження ЛАЧХ бажаної системи з ЛАЧХ вихідної системи в області низьких частот, з частоти $\omega = 0,10 \text{ c}^{-1}$ будуюмо ЛАЧХ під нахилом $-40 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ до збігу його с ЛАЧХ вихідної системи. Цей збіг проходить на частоті $\omega = 0,006 \text{ c}^{-1}$, тобто у діапазоні $0 \leq \omega \leq 0,006$, ЛАЧХ бажаної (рис. 1.11) та вихідної (рис. 1.9) систем співпадають, та проходять під нахилом $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$.

За виглядом ЛАЧХ бажаної (скорегованої) системи визначаємо її передану функцію:

$$W_{\sigma}(s) = \frac{10,692(T_{\sigma 2}s + 1)}{s(T_{\sigma 1}s + 1)(T_{\sigma 3}s + 1)(0,05s + 1)}, \quad (28)$$

де

$$T_{\sigma 1} = \frac{1}{0,006} = 166,667 \text{ c}^{-1}, T_{\sigma 2} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ c}^{-1}, T_{\sigma 3} = \frac{1}{4,25} = 0,235 \text{ c}^{-1}, \text{ тобто:}$$

$$W_{\sigma}(s) = \frac{10,692(10s + 1)}{s(166,667s + 1)(0,235s + 1)(0,05s + 1)}, \quad (29)$$

Згідно з [7], ЛФЧХ бажаної системи будуюмо за формулою:

$$\varphi_{\sigma}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(166,667\omega) + \text{arctg}(10\omega) - \text{arctg}(0,235\omega) - \text{arctg}(0,05\omega).$$

Визначимо запаси стійкості бажаної системи за амплітудою та фазою. На частоті зрізу $\omega_{зр_{\sigma}} = 0,67 \text{ c}^{-1}$ фаза має значення $\varphi(0,67) = -108,85^{\circ}$, звідси запас стійкості по фазі дорівнює $\Delta\varphi_{\sigma} = \pi - |\varphi(0,67)| = 71,15^{\circ}$.

Для того, щоб знайти запас стійкості за амплітудою скорегованої САК, необхідно спочатку вирішити наступне рівняння:

$$-\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(166,667\omega) + \text{arctg}(10\omega) - \text{arctg}(0,235\omega) - \text{arctg}(0,05\omega) = -\pi. \quad (30)$$

Знайти аналітично рішення рівняння (30) складно, тому використаємо програмний пакет MATHCAD 11 для знаходження його коренів:

$$-\frac{\pi}{2} - \arctg(166,667\omega) + \arctg(10\omega) - \arctg(0,235\omega) - \arctg(0,05\omega) + \pi$$

$$\text{solve, } \omega \rightarrow \begin{bmatrix} 3,8 \cdot 10^{-5} - 0,025j \\ 3,8 \cdot 10^{-5} + 0,025j \\ 9,09 \end{bmatrix}$$

З отриманих результатів обираємо дійсне додатне значення частоти $\omega_{\pi} = 9,09 \text{ c}^{-1}$ та підставляємо його у вираз $L(\omega) = 20 \cdot \log|W_{\sigma}(j\omega_{\pi})|$.

Отримуємо, що запас стійкості бажаної системи за амплітудою дорівнює $\Delta L_{\sigma} = 31,3 \text{ дБ}$.

Віднімаючи від ЛАЧХ бажаної системи ЛАЧХ вихідної системи, отримуємо ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою (рис. 1.11).

На основі ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою (рис. 1.11) визначаємо його передатну функцію:

$$W_{\kappa}(s) = \frac{(T_{\sigma 2}s + 1)(T_2s + 1)}{(T_{\sigma 1}s + 1)(T_{\sigma 3}s + 1)} = \frac{(10s + 1)(3,4s + 1)}{(166,667s + 1)(0,235s + 1)}. \quad (31)$$

9. За формою ЛАЧХ коригувального пристрою з [9] обираємо схемну (апаратну) реалізацію послідовного коригувального пристрою (рис. 1.12) та використовуємо розрахункові формули.

Де $R1 \cdot C1 = 3,4 \text{ с}$, $R2 \cdot C2 = 10 \text{ с}$. Приймаючи $C1 = C2 = 200 \text{ мкФ}$, отримуємо: $R1 = 17 \text{ кОм}$, $R2 = 50 \text{ кОм}$.

Так як коригувальний пристрій живиться від джерела постійного струму, то необхідно його включити до схеми після моста перед підсилювачем-модулятором (рис. 1.12).

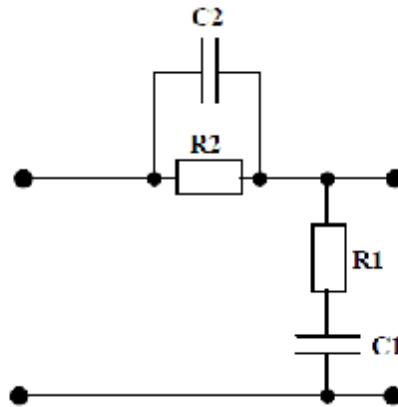


Рис. 1.12. Схема коригувального пристрою.

10. Використовуючи передатну функцію $\Phi_o(s)$ (32) замкненої скоректованої системи за вхідним сигналом, знайдемо перехідну функцію скорегованої системи для визначення показників якості її динамічних характеристик. Зображення перехідної функції знаходимо за виразом: $H_o(s) = \Phi_o(s) \cdot G(s)$, де:

$$\Phi_o(s) = \frac{10,692(10s + 1)}{s(166,667s + 1)(0,235s + 1)(0,05s + 1) + 10,692(10s + 1)}, \quad (32)$$

$G(s)$ – зображення за Лапласом вхідного сигналу. Для отримання перехідної функції необхідно на вхід системи подати одиничний ступінчастий сигнал, зображення якого має вигляд $G(s) = \frac{1}{s}$. Вираз для зображення перехідної функції буде мати наступний вигляд:

$$H_o(s) = \frac{10,692(10s + 1)}{s(166,667s + 1)(0,235s + 1)(0,05s + 1) + 10,692(10s + 1)} \cdot \frac{1}{s}. \quad (33)$$

За допомогою програмного пакету MATHCAD 11, розкладемо отримане зображення (33) вихідного сигналу на часткові дроби для подальшого знаходження оригіналів елементарних ланок:

$$H_o(s) \text{ convert, parfrac, } s \rightarrow \frac{1}{s} - \frac{0.00824}{(s + 20.2)} + \frac{0.379}{(s + 3.29)} - \frac{1.64}{(s + 0.68)} + \frac{0.266}{(s + 0.121)}.$$

За таблицею перетворення Лапласа [7] визначаємо оригінал функції (перехідну функцію) скоректованої системи:

$$h_o(t) = 1(t) - 0.00824 \cdot e^{-20,2t} + 0.379 \cdot e^{-3,29t} - 1.64 \cdot e^{-0,68t} + 0.266 \cdot e^{-0,121t} \quad (34)$$

На основі отриманої перехідної функції (34), будемо перехідну характеристику скорегованої системи (рис. 1.13).

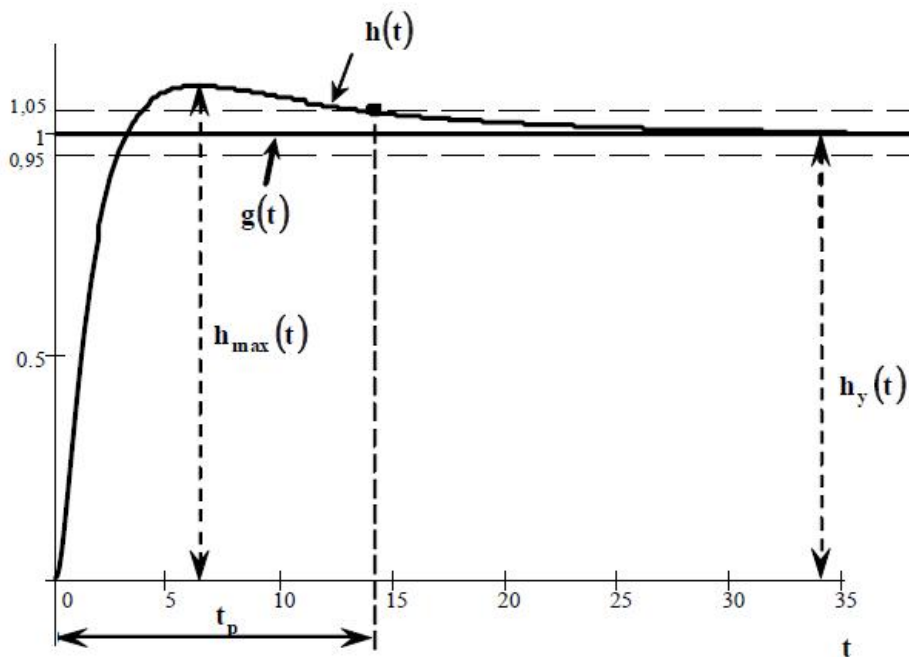


Рис. 1.13. Перехідна характеристика скоригованої САК.

З рисунку 1.13 знаходимо, що час регулювання вихідної координати дорівнює $t_p = 14,6$ с, що відповідає технічному завданню (табл. 1).

Перерегулювання знаходимо за формулою:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_y}{h_y} \cdot 100\% = \frac{1,11 - 1,00}{1,00} \cdot 100\% = 11\%, \text{ що також відповідає технічному}$$

завданню (табл. 1).

11. Останнім кроком аналізу системи є знаходження усталеної похибки в системі, яка з одного боку залежить від динамічних властивостей системи, з іншого – від виду вхідного сигналу.

Так як в системі регулювання температури в печі вхідним сигналом є сигнал, що повільно змінюється з часом (в більш конкретному випадку це ступінчастий сигнал $g(t) = 1(t)$), то усталену похибку системи слід шукати з використанням так званих коефіцієнтів похибки:

$$x_{ycm}(t) = C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot g'(t) + \frac{C_2}{2!} \cdot g''(t) + \dots \quad (35)$$

Одним з варіантів знаходження коефіцієнтів похибки є використання похідних від передатної функції (11) замкненої системи за похибкою, яка в даному прикладі дорівнює $\Phi_{\Delta\theta}(s) = \frac{s(0,05s+1)(3,4s+1)}{s(0,05s+1)(3,4s+1)+10,692}$.

В цьому разі коефіцієнти похибки визначається за виразом:

$$C_n = \left[\frac{d^n \Phi_{\Delta\theta}(s)}{ds^n} \right]_{s=0} \quad (36)$$

Використовуючи програмний пакет MATHCAD 11 знайдемо дві перші похідні від передатної функції за похибкою, що дозволить нам знайти три перших коефіцієнта похибки:

$$C_0 = \Phi_{\Delta\theta}(s) \Big|_{s=0} = 0;$$

$$C_1 = \left[\frac{d\Phi_{\Delta\theta}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \frac{27405 \cdot (51 \cdot s^2 + 690 \cdot s + 100)}{(85 \cdot s^3 + 1725 \cdot s^2 + 500 \cdot s + 5481)^2} \Big|_{s=0} = 0,0912;$$

$$C_2 = \left[\frac{d^2 \Phi_{\Delta\theta}(s)}{ds^2} \right]_{s=0}, \text{ тобто}$$

$$C_2 = \frac{-54810 \cdot (8670 \cdot s^4 + 234600 \cdot s^3 + 1810875 \cdot s^2 + 237969 \cdot s - 1840945)}{(85 \cdot s^3 + 1725 \cdot s^2 + 500 \cdot s + 5481)^2} \Big|_{s=0} = 0,6128$$

Приймаючи, що задана температура у печі повинна дорівнювати $\theta_3 = 100^\circ$, отримуємо усталену похибку у системі:

$$x_{ycm}(t) = 0 \cdot 100 + 0,0912 \cdot 0 + \frac{0,6128}{2!} \cdot 0 = 0.$$

Розрахунки підтвердили, що якщо в систему з астатизмом першого порядку подати сигнал постійної величини, то похибка на виході системи в усталеному режимі буде дорівнювати нулю, тобто усталений вихідний сигнал буде дорівнювати вхідному.

12. Для дослідження впливу вхідних сигналів іншого виду на роботу системи, а також аналізу її поведінки на вплив зовнішнього збурення, заданого у завданні до курсової роботи, проведемо моделювання отриманої системи у

середовищі Simulink програмного пакету MATLAB. Структурна схема вихідної системи з урахуванням послідовного коригувального пристрою наведена на рисунку 1.14.

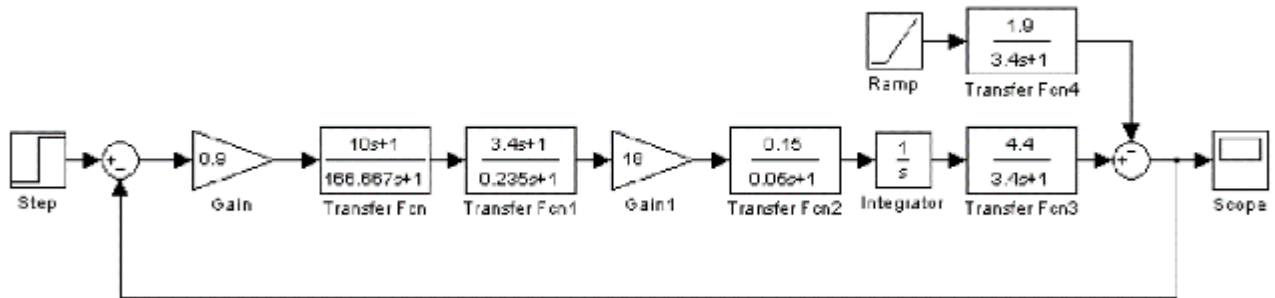


Рис.1.14. Структурна схема САК, побудована у MATLAB Simulink.

При подачі на вхід системи одиничного ступінчастого сигналу, вихідний сигнал буде мати вигляд, наведений на рисунку 1.15. Цей графік співпадає з результатами обчислень перехідної функції (п. 10).

Якщо на вході системи сформувавши значення температури $\theta_3 = 100^\circ$ (при початковому значенні $\theta_0 = 20^\circ$), то зміна вихідної величини набуває вигляду, який наведений на рисунку 1.16.

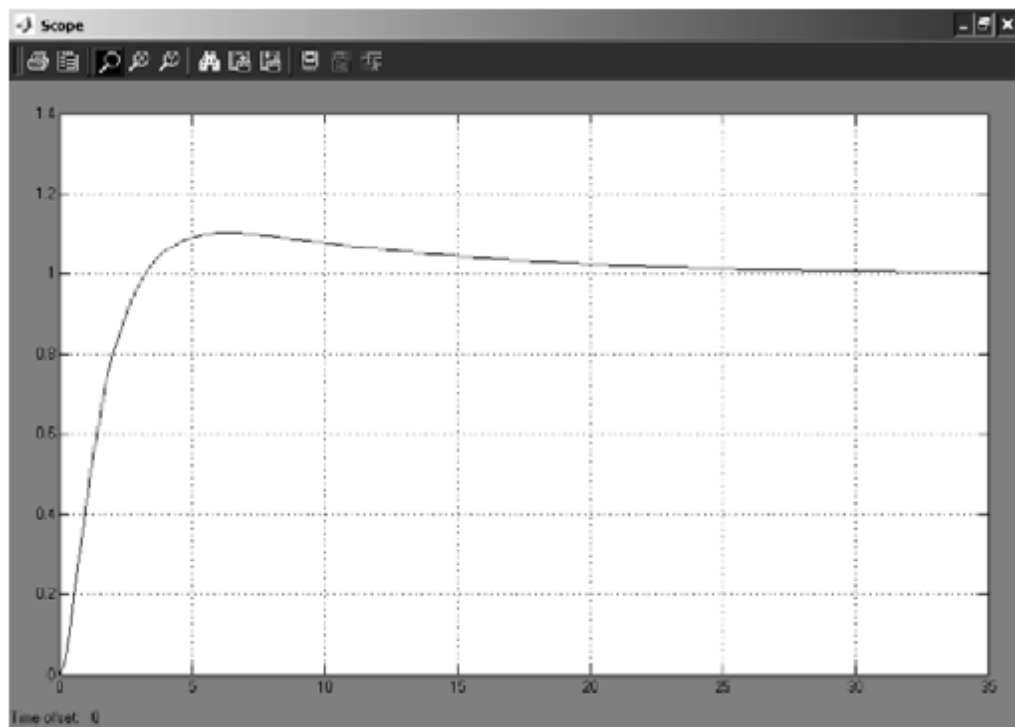


Рис. 1.15. Перехідна характеристика скоригованої САК, отримана в MATLAB.

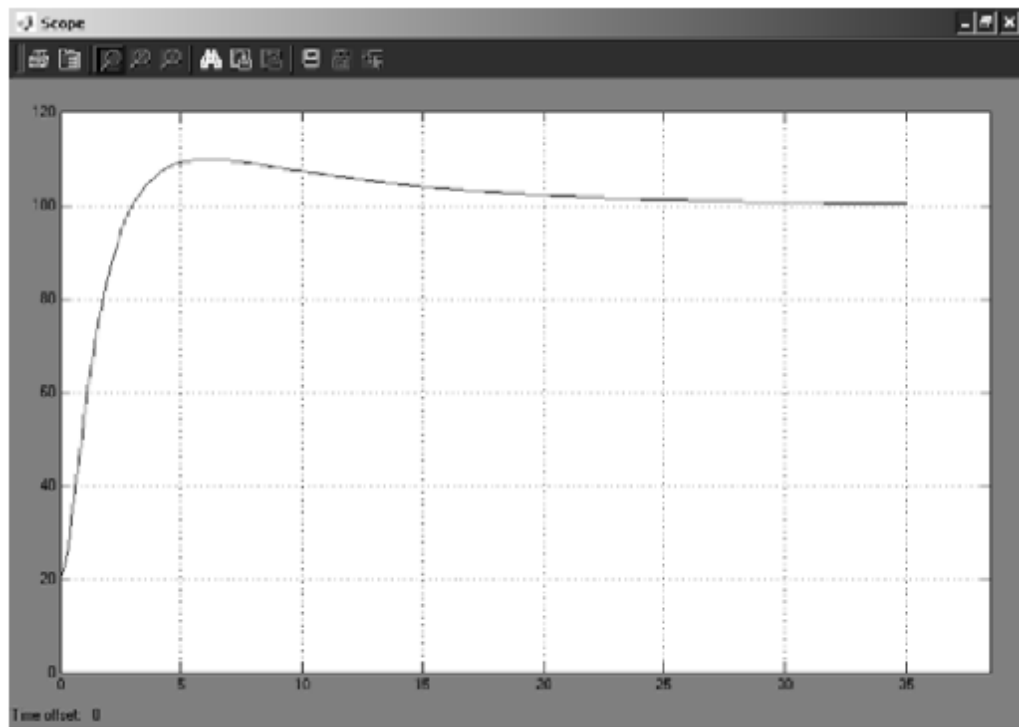


Рис. 1.16. Розгінна характеристика скоригованої САК при $\theta_3 = 100^\circ$.

При впливі на систему лінійно зростаючого збурення $f(t)=1,4t$, яке виникає на 20-й секунді роботи системи, при деяких відхиленнях система все-таки справляється з дією збурення з невеликими змінами у загальному часі регулювання (рис. 1.17).

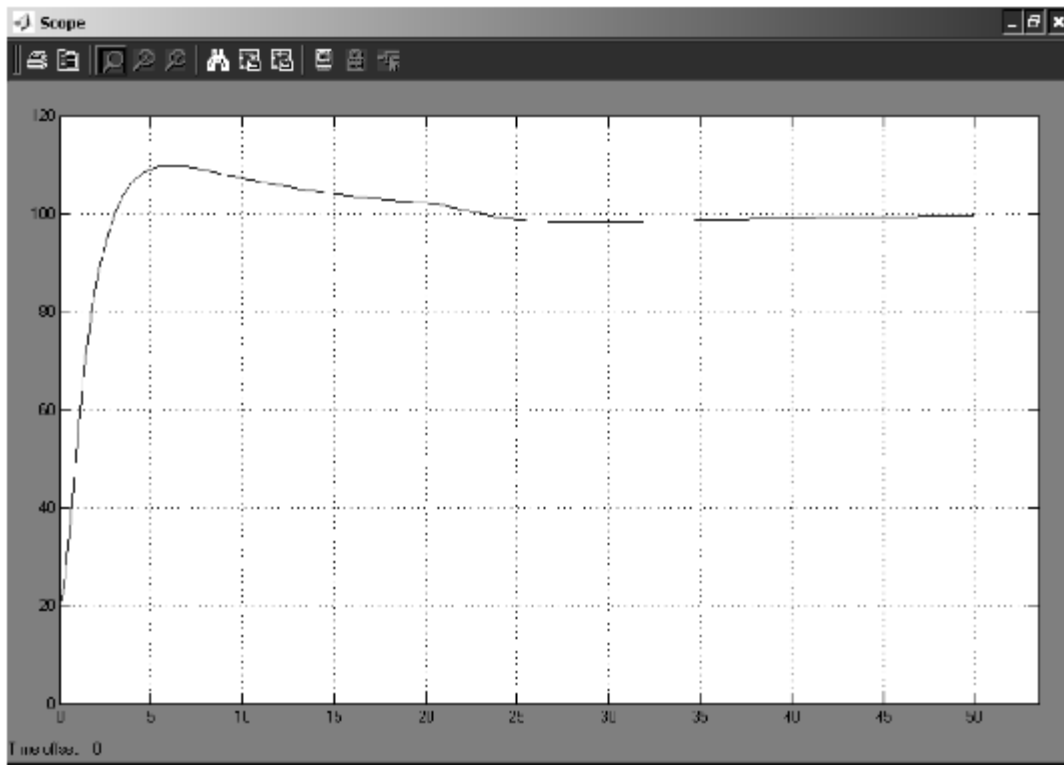


Рис. 1.17. Розгінна характеристика скоригованої САК
при $\theta_3 = 100^\circ$ та збуренні $f(t) = 1,4t$

Додаток 2 ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ДИСКРЕТНОЇ САК

Проведемо аналіз дискретного аналога отриманої скорегованої лінійної САК, використовуючи її передатну функцію (29, додаток 1):

$$W_o(s) = \frac{10,692(10s+1)}{s(166,667s+1)(0,235s+1)(0,05s+1)}.$$

1. Визначимо період дискретизації імпульсного елемента T_k з умови теореми Котельникова: $T_k \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, де ω_{\max} – частота, на якій рівень коефіцієнта підсилення розімкнутої системи на порядок нижчий, ніж на частоті зрізу, з якою сигнал проходить через систему без змін (із коефіцієнтом підсилення 1). На цій частоті можна вважати, що вихідний сигнал майже відсутній, тому вибір періоду дискретизації за таких умов не повинен значно впливати на роботу дискретного аналогу системи. Для визначення частоти ω_{\max} скористаємось наступним рівнянням: $20 \cdot \log |W_o(j \cdot \omega_{\max})| = -20$ дБ, або $|W_o(j \cdot \omega_{\max})| = 0,1$. Аналітичний розв'язок даного рівняння трудомісткий, тому використаємо програмний пакет MATHCAD 11 для розрахунку:

$$|W_o(j \cdot \omega_{\max})| = 0.1 \text{ solve, } \omega_{\max} \rightarrow \omega_{\max} = 4.372 \text{ c}^{-1}. \quad (37)$$

Тоді період дискретизації повинен бути $T_k \leq \frac{\pi}{4,372} \leq 0,719 \text{ c}$.

На вибір періоду дискретизації накладають ще одне обмеження – він повинен бути рівним або меншим за найменшу сталу часу, яка визначає швидкість зміни сигналу при проходженні неперервної частини ДСАК, для збереження достатньої для керування інформації про рівень сигналу у довільний момент часу. В наведеному прикладі період дискретизації повинен бути $T_k \leq 0,05 \text{ c}$. Обираємо значення $T_k = 0,05 \text{ c}$.

2. Знайдемо передатну функцію розімкненої дискретної системи за формулою:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[\frac{W_o(s)}{s} \right]. \quad (38)$$

Для виконання Z-перетворення необхідно вираз у дужках розкласти на елементарні дроби. Ми зробимо це за допомогою програмного пакету MATHCAD 11:

$$\frac{W_o(s)}{s} \Bigg|_{\substack{\text{convert, parfrac, s} \\ \text{float, 4}}} \rightarrow \frac{10.692}{s^2} - \frac{1678.13}{s} - \frac{0.009}{s+20} + \frac{0.187}{s+4.255} + \frac{1677.952}{s+0.006}.$$

За допомогою таблиць перетворення [7, ст. 252] перейдемо від s-форми до z-форми:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{10,692 \cdot T_k \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1678,13 \cdot z}{(z-1)} - \frac{0,009 \cdot z}{z - e^{-\alpha_1 T_k}} + \frac{0,187 \cdot z}{z - e^{-\alpha_2 T_k}} + \frac{1677,95 \cdot z}{z - e^{-\alpha_3 T_k}} \right] =$$

$$= \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{10,692 \cdot 0,05 \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1678,13 \cdot z}{(z-1)} - \frac{0,009 \cdot z}{z - e^{-20 \cdot 0,05}} + \frac{0,187 \cdot z}{z - e^{-4,255 \cdot 0,05}} + \frac{1677,95 \cdot z}{z - e^{-0,006 \cdot 0,05}} \right]$$

Спростимо отриманий вираз, виконавши наступну послідовність дій:

- розкриваємо дужки, помножуючи усі доданки у дужках на $\frac{(z-1)}{z}$;
- зводимо до спільного знаменника кожний дріб аналітично (вручну), не розкриваючи дужок;
- записуємо алгебраїчну суму з чисельників у MATHCAD 11 та застосовуємо функцію **expand**.

$$W(z) = \frac{0,507 \cdot (z-0,375)(z-0,792)}{(z-1)(z-0,368)(z-0,808)} \quad (39)$$

Тоді передатна функція замкненої дискретної системи буде мати вигляд:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{0,507 \cdot (z-0,375)(z-0,792)}{z^3 - 1,669z^2 + 0,882z - 0,147} \quad (40)$$

а передатна функція замкнутої дискретної системи за похибкою виглядає так:

$$\Phi_x(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{z^3 - 2,176z^2 + 1,473z - 0,297}{z^3 - 1,669z^2 + 0,882z - 0,147} \quad (41)$$

3. Визначимо стійкість дискретної системи за критерієм Гурвіца. Для цього використаємо характеристичне рівняння передатної функції дискретної замкненої системи:

$$D(z) = z^3 - 1,669z^2 + 0,882z - 0,147 = 0 \quad (42)$$

Для використання критерію Гурвіца необхідно провести білінійне перетворення виду: $z = \frac{1+v}{1-v}$.

Для цього за допомогою засобів програмного пакету MATHCAD 11 проведемо заміну, та спрощення виразу:

$$D\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \Bigg|_{\substack{\text{simplify} \\ \text{float, 4}}} \rightarrow \frac{-(3.698v^3 + 3.346v^2 + 0.89v + 0.066)}{(-1+v)^3},$$

або

$$D(v) = \underset{a_0}{3,698}v^3 + \underset{a_1}{3,346}v^2 + \underset{a_2}{0,89}v + \underset{a_3}{0,066} = 0. \quad (43)$$

На основі коефіцієнтів характеристичного рівняння побудуємо визначник Гурвіца за наступною схемою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_0} & \mathbf{a_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{3,346} & \mathbf{0,066} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3,698} & \mathbf{0,890} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3,346} & \mathbf{0,066} \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Згідно з критерієм Гурвіца, система буде стійкою, якщо при $a_0 > 0$ всі діагональні мінори визначника Гурвіца будуть додатними (для дискретної системи вірно також доповнення, що знак визначників діагональних мінорів повинен співпадати зі знаком коефіцієнта a_0 , так як в деяких випадках дискретних систем a_0 може буди від'ємним):

$$\Delta_1 = a_1 = 3,346 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \text{ тобто}$$

$$\Delta_2 = 3,346 \cdot 0,890 - 3,698 \cdot 0,066 = 2,734 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_3 = 2,734 \cdot 0,066 = 0,1804 > 0.$$

Звідси випливає, що система є стійкою. Це означає, що період квантування вибрано вірно, так як тільки він впливає на стійкість дискретної системи за умови стійкості її лінійної частини.

4. Для визначення запасів стійкості дискретної системи, побудуємо псевдо-частотні ЛАХ та ЛФХ на основі використання переданої функції розімкненої системи (39):

$$W(z) = \frac{0,507 \cdot (z - 0,375)(z - 0,792)}{(z - 1)(z - 0,368)(z - 0,808)}.$$

Для виконання необхідно провести білінійне перетворення виду:

$$z = \frac{1 + j\lambda \cdot \frac{T_k}{2}}{1 - j\lambda \cdot \frac{T_k}{2}}, \text{ де } \lambda \text{ – псевдо-частота.}$$

Для цього за допомогою засобів програмного пакету MATHCAD 11 проведемо заміну, та спрощення виразу:

$$W \left(\frac{1 + j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}}{1 - j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}} \right) \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 4} \end{array} \rightarrow \frac{10.84 \cdot (1 + j\lambda \cdot 0.055)(1 + j\lambda \cdot 0.215)(1 - j\lambda \cdot 0.025)}{j\lambda \cdot (1 + j\lambda \cdot 0.235)(1 + j\lambda \cdot 0.054)}$$

Коефіцієнт підсилення псевдочастотної передатної функції дискретної системи майже не відрізняється від коефіцієнту підсилення вихідної лінійної системи, що свідчить про те, що вибір періоду дискретизації імпульсного елемента зроблено коректно. Оскільки деякі форсуючі та інерційні ланки мають близькі сталі часу, допустимо виконати їх скорочення через те, що це не призведе до суттєвого дрейфу $\omega_{\text{зр}}$, а відповідно и запасів стійкості ДСАК:

$$W(j\lambda) = \frac{10,84 \cdot \left(1 - j\lambda \cdot 0,025\right)}{j\lambda} \quad (45)$$

побудуємо її ЛАХ та ЛФХ (рис. 2.1).

Спочатку знаходимо контрольну точку L_0 , з якої буде починатися побудова ЛАХ, за формулою:

$$L_0 = 20 \cdot \lg(k) = 20 \cdot \lg(10,84) = 20,7 \text{ дБ}.$$

Далі знаходимо спряжену частоту, як зворотне значення постійної часу:

$$\lambda_1 = \frac{1}{T_1} = 40 \text{ с}^{-1}.$$

Фазова характеристика, згідно з [7, ст. 106] визначається наступним виразом:

$$\varphi(\lambda) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(0,025\lambda).$$

Так як фазова характеристика не перетинає рівень $-\pi$, то запас стійкості за амплітудою визначається постійним рівнем вихідного сигналу в області високих частот, тобто $\Delta L = 11,34 \text{ дБ}$.

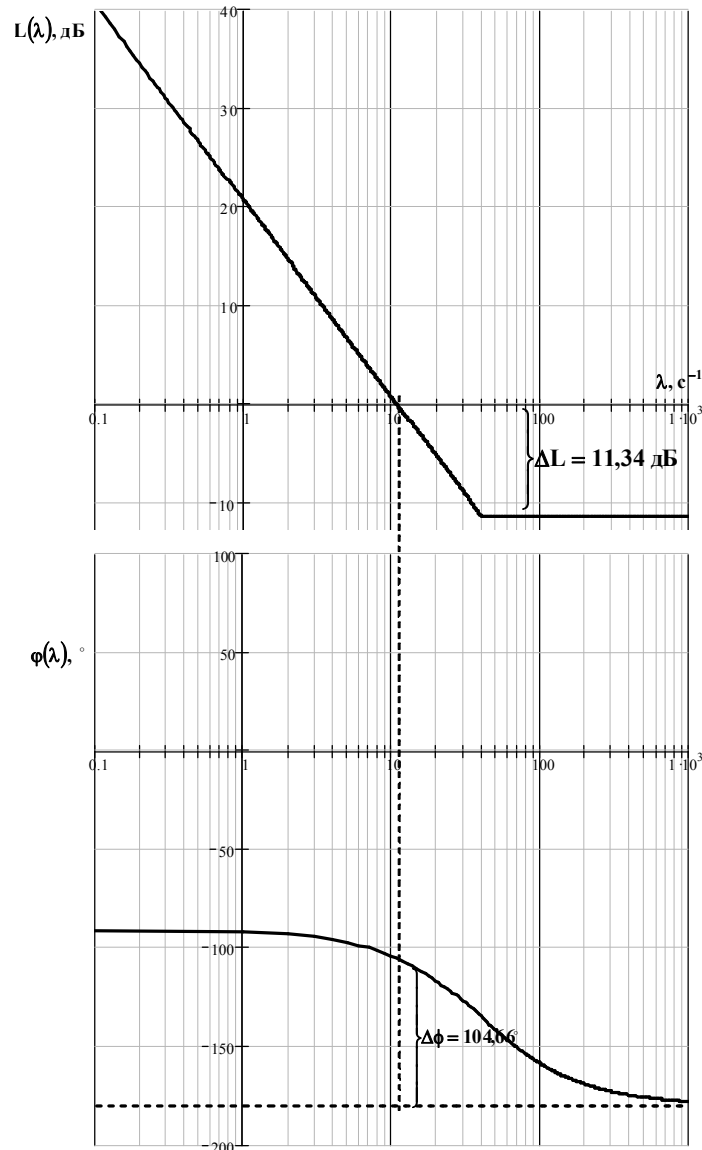


Рис. 2.1. Логарифмічні амплітудна та фазова псевдочастотні характеристики ДСАК.

Для визначення запасу стійкості системи за фазою, необхідно визначити частоту зрізу, тобто частоту на якій ЛАХ перетинає вісь частот. Частота зрізу знаходиться при розв'язанні рівняння:

$$\left| W \left(\frac{1 + j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}}{1 - j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}} \right) \right| = 1 \text{ за допомогою програмного пакету MATHCAD 11:}$$

$$\left| W \left(\frac{1 + j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}}{1 - j\lambda \cdot \frac{0.05}{2}} \right) \right| - 1 \text{ solve, } \lambda \rightarrow 10.455 \text{ c}^{-1}. \quad (46)$$

На частоті зрізу $\lambda_{zp} = 10,455 \text{ c}^{-1}$ фаза має значення $\varphi(10,455) = -75,34^\circ$, звідси запас стійкості по фазі дорівнює $\Delta\varphi = \pi - |\varphi(10,455)| = 104,66^\circ$.

5. Для визначення показників якості динамічних властивостей ДСАК побудуємо її перехідну характеристику (рис. 2.2), використовуючи передатну функцію бажаної системи (29, додаток 1)

$$W_o(s) = \frac{106,92s + 10,692}{1,958s^4 + 47,512s^3 + 166,952s^2 + s}$$

за допомогою функцій програмного пакету MATLAB, вводячи наступні вирази для наведеного прикладу:

```
>> num=[106.920 10.692]
```

Результат виконання:

```
num =
```

```
106.920 10.692
```

```
>> den=[1.958 47.512 166.952 1 0]
```

Результат виконання:

```
den =
```

```
1.958 47.512 166.952 1.000 0
```

```
>> W=tf(num,den)
```

Результат виконання:

Transfer function:

```
106.9 s + 10.69
```

```
-----
```

```
1.958 s^4 + 47.51 s^3 + 167 s^2 + s
```

```
>> Wz=c2d(W,0.05)
```

Результат виконання:

Transfer function:

```
0.0008547 z^3 + 0.001722 z^2 - 0.002092
```

```
z - 0.0004656
```

```
-----
```

```
z^4 - 3.176 z^3 + 3.649 z^2 - 1.771 z +
```

```
0.2973
```

Введення коефіцієнтів поліному чисельника передатної функції розімкнутої скорегованої системи

Введення коефіцієнтів поліному знаменника передатної функції розімкнутої скорегованої системи

Знаходження передатної функції розімкнутої лінійної системи за допомогою функції “tf”

Знаходження передатної функції розімкнутої дискретної системи за допомогою функції “c2d” та періодом дискретизації 0,05 с.

Sampling time: 0.05

>> **Fz=feedback(Wz,1,-1)**

Знаходження передатної функції замкнутої дискретної системи із одиничним від'ємним зворотнім зв'язком

Результат виконання:

Transfer function:

$$\frac{0.0008548 z^3 + 0.001722 z^2 - 0.002092 z - 0.0004656}{z^4 - 3.175 z^3 + 3.651 z^2 - 1.772 z + 0.2968}$$

$$z^4 - 3.175 z^3 + 3.651 z^2 - 1.772 z + 0.2968$$

>> **step(Fz,35)**

Побудова перехідного процесу в дискретній системі тривалістю 35 с за

Результат у вигляді графіку, допомогою функції “step” представлений на рисунку 2.2.

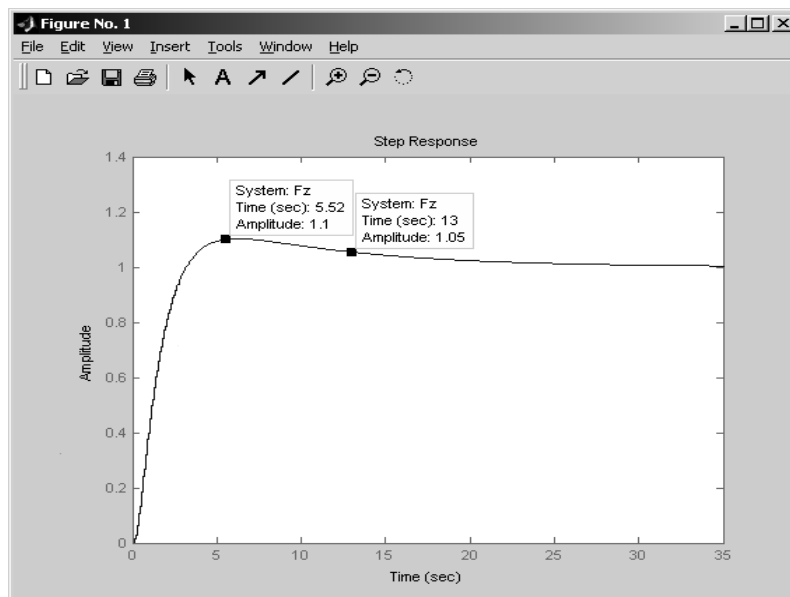


Рис. 2.2. Перехідна характеристика ДСАК.

За рисунком 2.2 знаходимо, що час регулювання вихідного параметра (температури в печі) дорівнює $t_p = 13$ с, що відповідає технічному завданню.

Відносне перерегулювання знаходимо за формулою:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_y}{h_y} \cdot 100\% = \frac{1,1 - 1,00}{1,00} \cdot 100\% = 10\%,$$

що також відповідає технічному завданню.

6. Останнім кроком аналізу системи є знаходження усталеної похибки ДСАК, яка з одного боку залежить від динамічних властивостей системи, з іншого – від виду вхідного сигналу.

Так як в системі регулювання температури в печі вхідним сигналом є ступінчастий сигнал, то усталену похибку системи слід шукати за використанням так званих коефіцієнтів похибки:

$$x_{уст}(nT_k) = C_0 \cdot g(nT_k) + C_1 \cdot g'(nT_k) + \frac{C_2}{2!} \cdot g''(nT_k) + \dots \quad (47)$$

Одним з варіантів знаходження коефіцієнтів помилки є використання похідних від передатної функції замкненої системи за похибкою (41), яка в нашому випадку дорівнює:

$$\Phi_X(z) = \frac{z^3 - 2,176z^2 + 1,473z - 0,297}{z^3 - 1,669z^2 + 0,882z - 0,147}.$$

Попередньо зробивши заміну $z = e^{sT_k}$, коефіцієнти помилки визначається за виразом:

$$C_n = \left[\frac{d^n \Phi_X(e^{sT_k})}{ds^n} \right]_{s=0} \quad (48)$$

Використовуючи програмний пакет MATHCAD 11 знайдемо дві перші похідні від передатної функції за похибкою, що дозволить нам знайти три перших коефіцієнта помилки:

$$\begin{aligned} C_0 &= \Phi_X(e^{0,05s}) \Big|_{s=0} = 0; \\ C_1 &= \left[\frac{d\Phi_X(e^{0,05s})}{ds} \right]_{s=0} = 0,0917; \\ C_2 &= \left[\frac{d^2\Phi_X(e^{0,05s})}{ds^2} \right]_{s=0} = -0,009. \end{aligned}$$

Приймаючи, що задана температуру у печі дорівнює $\theta_s = 100^\circ$, за використанням формули (47) отримуємо усталену помилку у системі:

$$\begin{aligned} g(nT_k) &= 100, \quad g'(nT_k) = 0, \quad g''(nT_k) = 0; \\ x_{уст}(nT_k) &= 0 \cdot 100 + 0,0917 \cdot 0 - \frac{0,009}{2!} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Додаток 3 ПРИКЛАД АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНОЇ САК

В функціональній схемі (додаток 1, рис. 1.1) підсилювач сигналу з виходу вимірювального мосту може мати нелінійну залежність $u_k = f(u_M)$.

В якості нелінійного елемента (НЕ) може бути один із стандартних типів (частина 3, таблиця 3.1.), де позначено вхідну величину u_M через x , а вихідну u_k через z для спрощення запису.

Згідно з завданням (додаток 1), НЕ має трипозиційну релейну характеристику з зоною нечутливості (рис. 3.1).

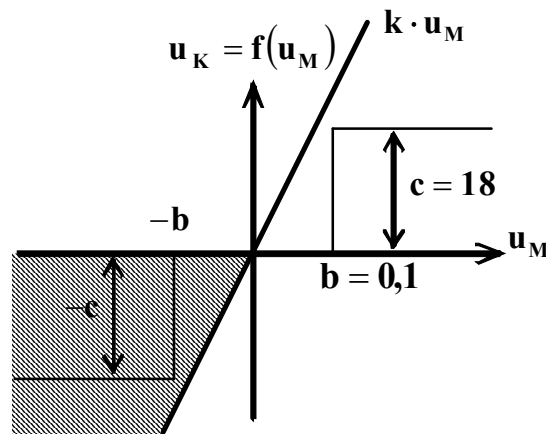


Рис. 3.1. Трипозиційна релейна характеристика із зоною нечутливості.

Тоді структурну схему НСАК можна представити у вигляді:

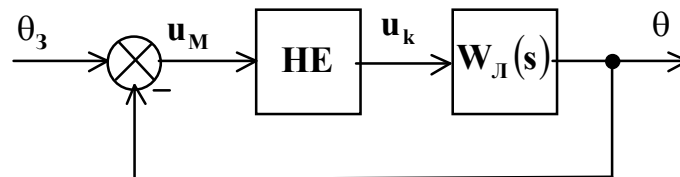


Рис. 3.2. Структурна схема НСАК.

де у якості передатної функції лінійної частини системи використовуємо передатну функцію лінійної системи до корекції

$$(7, \text{додаток 1}): W(s) = \frac{10,692}{s(0,05s + 1)(3,4s + 1)}.$$

1. Вихідною інформацією для визначення параметрів автоколивачів за методом Гольдфарба є передатна функція лінійної системи до корекції (7, додаток 1) з урахуванням коефіцієнта підсилення, що приходить на долю нелінійного елемента (рис. 3.1), тобто:

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{W(s)}{18} = \frac{0,594}{s(0,05s+1)(3,4s+1)}, \quad (49)$$

та НЕ, зображений на рисунку 3.1., для якого згідно з даними таблиці 3.2. (частина 3) визначимо коефіцієнти гармонічної лінеаризації:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - b^2/a^2} = \frac{4 \cdot 18}{\pi a} \sqrt{1 - 0,01/a^2}; \quad q_1(a) = 0. \quad (50)$$

Роблячи заміну $s \rightarrow j\omega$, знайдемо дійсну та уявну частини частотної передатної функції лінійної частини системи $W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{0,594}{-0,17j\omega^3 - 3,45\omega^2 + j\omega}$:

$$U(\omega) = \frac{-2,0493\omega^2}{(-3,45\omega^2)^2 + (\omega - 0,17\omega^3)^2}; \quad (51)$$

$$V(\omega) = \frac{0,101\omega^3 - 0,594\omega}{(-3,45\omega^2)^2 + (\omega - 0,17\omega^3)^2}. \quad (52)$$

Змінюючи частоту від нуля до нескінченності, будемо АФЧХ лінійної частини системи (рис. 3.3). Наступним кроком є побудова у тій же системі координат годографа функції $-\frac{1}{q(a)}$ (при зміні $b \leq a \leq \infty$). Результат побудови наведений на рисунку 3.3. Так як ці годографи перетинаються, то в НСАК можливі автоколивання, з частотою, що визначається з АФЧХ лінійної частини системи, та амплітудою, що визначається з функції $-\frac{1}{q(a)}$ у точці перетину годографів.

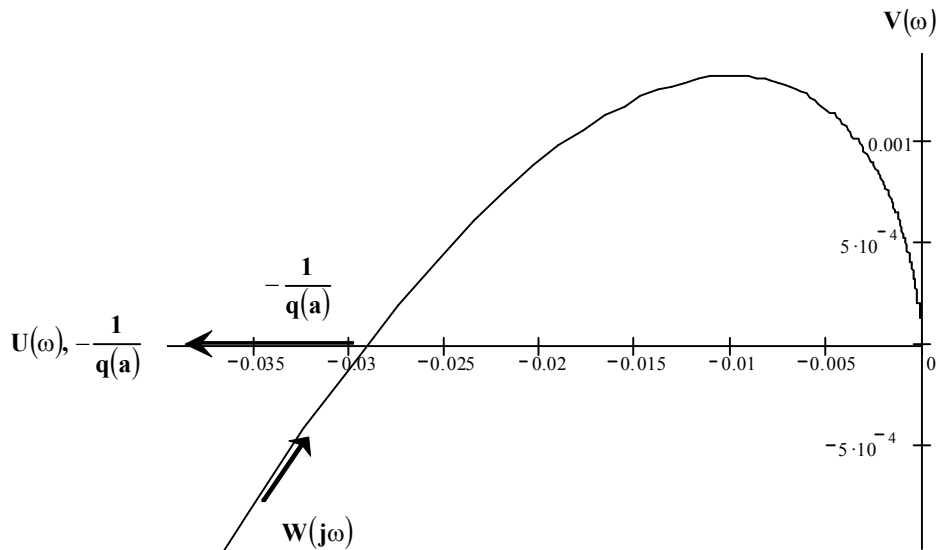


Рис. 3.3. Аналіз можливості автоколивань за методом Гольдфарба.

Знайдемо параметри цих автоколивань. За умови $V(\omega) = 0$, знаходимо частоту автоколивань з рівняння (52): $0,101\omega^3 - 0,594\omega = 0$. Вона дорівнює $\omega = 2,43 \text{ c}^{-1}$.

Підставимо значення цієї частоти у вираз дійсної частини передатної функції лінійної частини системи (51): $U(2,43) = -0,0293$. Підставимо це значення у функцію $-\frac{1}{q(a)}$, та знайдемо амплітуду можливих автоколивань: $a = 0,1$.

Для багатозначних нелінійностей можлива наявність двох точок перетину годографів (рис. 3.4).

Якщо годограф НЕ виходить з охопту АФЧХ лінійної частини, то точка 2 визначає амплітуду та частоту стійких автоколивань в системі. Якщо годограф НЕ входить в охоп (точка 1), то НСАК нестійка.

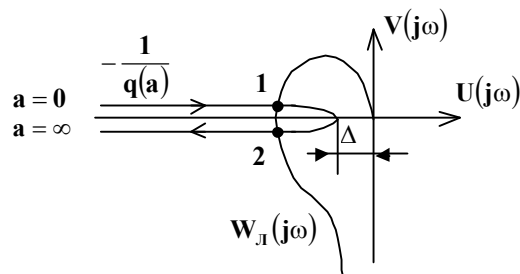


Рис. 3.4. Аналіз наявності перетину АФЧХ та кривої гармонійного коефіцієнту передачі

2. Вихідною інформацією для визначення абсолютної стійкості НСАК за критерієм В.М. Попова приймаємо передатну функцію лінійної системи до

корекції (7, додаток 1) з урахуванням коефіцієнта підсилення, що приходиться на долю нелінійного елемента (рис. 3.1), тобто:

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{W(s)}{18} = \frac{0,594}{s(0,05s+1)(3,4s+1)}.$$

Так як НЕ має зону нечутливості та насичення, ми маємо змогу досліджувати астатичну систему.

Для початку знайдемо модифіковані дійсну та уявну частини частотної передатної функції лінійної частини системи використовуючи вирази (51) та (52):

$$U_{\text{л}}^*(\omega) = \frac{-2,0493\omega^2}{(-3,45\omega^2)^2 + (\omega - 0,17\omega^3)^2}; \quad (53)$$

$$V_{\text{л}}^*(\omega) = \frac{(0,101\omega^3 - 0,594\omega) \cdot \omega}{(-3,45\omega^2)^2 + (\omega - 0,17\omega^3)^2}. \quad (54)$$

Змінюючи частоту від нуля до нескінченності, будемо АФЧХ модифікованої лінійної частини системи (рис. 3.5).

Згідно з критерієм Попова (Гелига) коефіцієнт нахилу прямої $k \cdot u_{\text{м}}$ (рис. 3.1)

повинен бути $k > \frac{c}{b}$, тобто $k > \frac{18}{0,1} > 180$. Обираємо $k = 200$.

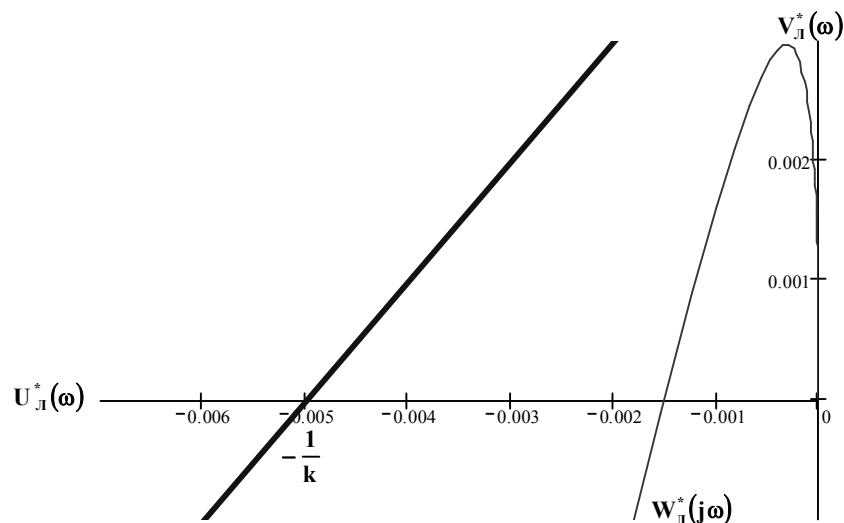


Рис. 3.5. Аналіз стійкості НСАК за критерієм Попова.

Так як пряма, що проходить через точку $-\frac{1}{k}$ не перетинає годограф модифікованої лінійної частини системи, то НСАК знаходиться в стані абсолютної стійкості.

ПРИКІНЦЕВІ ПОЛОЖЕННЯ

Успішне виконання усіх розділів курсового проектування, що розкривають типову послідовність задач аналізу та синтезу загальних характеристик систем автоматичного управління, є теоретичною основою для оцінювання здобутих знань. Методи та інструменти математичного аналізу із використанням комп'ютерних систем дозволяють розвинути базові інженерні навички залучення інформаційних технологій для вирішення як типових так і дотичних задач, що виникають в процесі проектування. Обсяг та склад задач курсового проектування з наведеного переліку регламентується робочою програмою із урахуванням усіх видів робіт в рамках дисципліни «Теорія автоматичного управління»