

Лабораторна робота № 7
Рівняння Беллмана. Розподіл ресурсів.
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 2. Розв'яжемо задачу розподілу ресурсів за наступними даними:

- 1) $\xi_0 = 40$ млн грн.;
- 2) $n=3$;
- 3) кошти виділяються тільки в розмірах, кратних 10 млн грн.;
- 4) функції доходу задані в таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
10	4	3	4
20	5	3	4
30	7	4	5
40	8	6	6

Розв'язок.

Етап I. Умовна оптимізація.

Розрахунки почнемо з останнього кроку $k=3$. Таблиця цього кроку має вигляд

ξ_2	u_3	$\xi_3 = \xi_2 - u_3$	$f_3(u_3)$	$F_3^*(\xi_2)$	$u_3^*(\xi_2)$
10	0	10	0	4	10
	10	0	4		
20	0	20	0	4	10
	10	10	4		
	20	0	4		
30	0	30	0	5	30
	10	20	4		
	20	10	4		
	30	0	5		
40	0	40	0	6	40
	10	30	4		
	20	20	4		
	30	10	5		
	40	0	6		

Таблиця другого кроку

ξ_1	u_2	$\xi_2 = \xi_1 - u_2$	$f_2(u_2)$	$F_3^*(\xi_2)$	$F_2(u_2, \xi_1)$	$F_2^*(\xi_1)$	$u_2^*(\xi_1)$
10	0	10	0	4	$0+4=4$	4	0
	10	0	3	0	$3+0=3$		

ξ_1	u_2	$\xi_2 = \xi_1 - u_2$	$f_2(u_2)$	$F_3^*(\xi_2)$	$F_2(u_2, \xi_1)$	$F_2^*(\xi_1)$	$u_2^*(\xi_1)$
20	0	20	0	4	0+4=4	7	10
	10	10	3	4	3+4=7		
	20	0	3	0	3+0=3		
30	0	30	0	5	0+5=5	7	10
	10	20	3	4	3+4=7		
	20	10	3	4	3+4=7		
	30	0	4	0	4+0=4		
40	0	40	0	6	0+6=6	8	10
	10	30	3	5	3+5=8		
	20	20	3	4	3+4=7		
	30	10	4	4	4+4=8		
	40	0	6	0	6+0=6		

Таблиця першого кроку

ξ_0	u_1	$\xi_1 = \xi_0 - u_1$	$f_1(u_1)$	$F_2^*(\xi_1)$	$F_1(u_1, \xi_0)$	$F_1^*(\xi_0)$	$u_1^*(\xi_0)$
10	0	10	0	4	0+4=4	4	0
	10	0	4	0	4+0=4		
20	0	20	0	7	0+7=7	8	10
	10	10	4	4	4+4=8		
	20	0	5	0	5+0=5		
30	0	30	0	7	0+7=7	11	10
	10	20	4	7	4+7=11		
	20	10	5	4	5+4=9		
	30	0	7	0	7+0=7		
40	0	40	0	8	0+8=8	12	20
	10	30	4	7	4+7=11		
	20	20	5	7	5+7=12		
	30	10	7	4	7+4=11		
	40	0	8	0	8+0=8		

Пояснимо побудову таблиць і послідовність проведення розрахунків. Стівці (1), (2) і (3) для всіх таблиць однакові, тому їх можна було б зробити спільними. Стівпець (4) заповнюється на основі вихідних даних завдання про функції доходу, значення в стівці (5) беруться з шпальти (7) попередньої таблиці, стівпець (6) заповнюється сумою значень стівців (4) і (5) (в таблиці третього кроку стівці (5) і (6) відсутні). В (7) стівці записуються максимальне значення попереднього стівця для фіксованого початкового стану і в (8) стівці записується управління з (2) стівчика, на якому досягається максимум (7).

Етап II. Безумовна оптимізація.

З таблиці першого кроку маємо $F_1^*(40) = 12$, тобто максимальний дохід всієї системи при початковій кількості коштів $\xi_0^* = 40$ дорівнює 12 одиницям. З цієї ж таблиці отримуємо, що першому підприємству слід виділити $u_1^*(40) = 20$ млн грн. І залишок коштів $\xi_1^* = \xi_0^* - u_1^*$ складе 20 млн грн. Далі з таблиці другого кроку для початкового стану $\xi_1^* = 40$ знаходимо $u_2^*(20) = 10$ (кошти, які виділені другому підприємству) і залишок коштів $\xi_2^* = \xi_1^* - u_2^* = 20 - 10 = 10$. У таблиці третього кроку для початкового стану $\xi_2^* = 10$ отримаємо $u_3^*(10) = 10$.

Отже, максимальний дохід в кількості 12 одиниць буде отримано, якщо першому підприємству виділити 20 млн грн., Другому підприємству виділити 10 млн руб., Третьому підприємству виділити 10 млн грн.

Слід зауважити, що таблицю першого кроку достатньо було заповнити для початкового стану $\xi_0^* = 40$ млн.грн. Повна таблиця першого кроку дає рішення не однієї задачі, а безлічі завдань з будь-якими значеннями ξ_0^* от 10 до 40. Так, якщо початкова сума $\xi_0^* = 30$ млн грн., то, проводячи безумовну оптимізацію за трьома таблицями, отримаємо оптимальний розподіл $u^* = (10,10,10)$. При збільшенні початкових коштів до 50 необхідно в кожній таблиці додати ще одну секцію, відповідну початкового стану $\xi_{k-1} = 50$.

Завдання для самостійної роботи

- 1) $\xi_0 = 40$ млн грн.;
- 2) $n = 3$;
- 3) средства виділяються тільки в розмірі, кратних 10 млн грн.;
- 4) функції доходу задани таблично:

		10	20	30	40	F^*
1	f_1	4	5	7	8	12
	f_2	3	3	4	6	
	f_3	4	4	5	6	
3	f_1	3	5	6	7	12
	f_2	3	3	4	7	
	f_3	4	4	5	5	
5	f_1	3	5	7	9	12

		10	20	30	40	F^*
2	f_1	4	6	8	10	13
	f_2	3	3	5	8	
	f_3	4	4	5	6	
4	f_1	5	7	9	10	14
	f_2	3	3	6	9	
	f_3	4	4	5	7	
6	f_1	4	7	10	10	14

		10	20	30	40	F^*
	f_2	3	3	4	8	
	f_3	4	4	5	7	
7	f_1	5	5	6	9	12
	f_2	3	3	5	5	
	f_3	4	4	5	5	
9	f_1	6	6	8	9	13
	f_2	3	3	6	7	
	f_3	4	4	5	5	
11	f_1	4	4	5	6	13
	f_2	3	6	9	9	
	f_3	3	3	5	7	
13	f_1	4	4	5	6	13
	f_2	3	6	9	10	
	f_3	3	2	5	7	
15	f_1	4	4	5	2	15
	f_2	6	8	9	10	
	f_3	3	2	5	7	
17	f_1	4	4	5	2	13
	f_2	6	4	1	10	
	f_3	3	2	5	7	
19	f_1	4	5	5	2	14
	f_2	6	4	3	10	
	f_3	3	2	5	7	
21	f_1	1	5	5	2	14
	f_2	6	1	3	10	

		10	20	30	40	F^*
	f_2	3	3	7	11	
	f_3	4	4	5	6	
8	f_1	5	8	11	11	15
	f_2	2	3	8	9	
	f_3	4	4	5	8	
10	f_1	6	7	11	12	15
	f_2	3	3	8	12	
	f_3	4	4	5	5	
12	f_1	3	4	5	6	11
	f_2	3	3	6	10	
	f_3	4	4	5	6	
14	f_1	4	4	5	6	17
	f_2	4	6	9	9	
	f_3	3	9	5	7	
16	f_1	4	9	5	6	19
	f_2	7	6	9	10	
	f_3	3	2	1	7	
18	f_1	4	5	5	2	15
	f_2	2	8	9	10	
	f_3	3	2	2	7	
20	f_1	4	2	5	2	13
	f_2	6	4	1	10	
	f_3	3	2	5	1	
22	f_1	1	5	5	2	14
	f_2	6	4	3	6	

		10	20	30	40	F^*
	f_3	3	2	5	7	
23	f_1	1	5	5	2	14
	f_2	6	4	1	10	
	f_3	3	2	5	7	
25	f_1	1	5	5	2	17
	f_2	6	1	3	10	
	f_3	3	2	5	7	
27	f_1	1	5	3	2	10
	f_2	2	1	7	10	
	f_3	3	2	5	7	
29	f_1	3	5	9	2	15
	f_2	6	2	6	10	
	f_3	3	1	5	7	

		10	20	30	40	F^*
	f_3	3	2	5	7	
24	f_1	1	5	5	2	14
	f_2	6	1	3	10	
	f_3	3	2	5	7	
26	f_1	1	5	5	2	17
	f_2	6	1	7	10	
	f_3	6	2	5	7	
28	f_1	7	5	5	2	19
	f_2	9	1	3	10	
	f_3	3	2	5	6	
30	f_1	1	5	5	2	15
	f_2	6	9	3	10	
	f_3	3	6	5	7	