Лабораторна робота № 6
Динамічне програмування. Побудова моделі ДП.
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Методом динамічного програмування (ДП) вирішуються завдання математичного програмування, що задовольняють принципу послідовної оптимізації: рішення вихідної задачі оптимізації великої розмірності замінюється рішенням послідовності завдань оптимізації малої розмірності. В силу цього основною умовою застосовності методу ДП є можливість розбиття процесу прийняття рішень на ряд однотипних кроків, або етапів, кожен з яких планується окремо, але з урахуванням результатів, отриманих на інших кроках.

Розглянемо, як відбувається розбиття процесу прийняття рішень (який ми будемо представляти як процес функціонування деякої системи) на n кроків. позначимо через ξ_0 початковий стан всього процесу, в той же час ξ_0 буде початковим станом першого кроку. Тоді ξ_1 – стан системи після першого кроку (або початковий стан другого кроку), ξ_2 – стан системи після другого кроку (або початковий стан третього кроку) і т.д.

Перехід від початкового стану *k-го кроку* ξ_{k-1} до кінцевого стану k-го кроку ξ_k виконується так.

Є набір допустимих управлінь (способів дії на кроці k) $u_k^1,...,u_k^l$, кожне з яких дозволяє перейти зі стану ξ_{k-1} до одного з можливих кінцевих станів k-го кроку $\xi_k^1,...,\xi_k^l$. Выбране на k-му кроці управління, позначимо через $u_k \in \{u_k^1,...,u_k^l\}$, а стан, в який перейде процесс зі стану ξ_{k-1} під впливом управління u_k, позначимо $\xi_k \in \{\xi_k^1,...,\xi_k^l\}$. При цьому вважається, що стан ξ_k залежить від ξ_{k-1} і u_k, та не залежить від того, яким чином процес перейшов в стан ξ_{k-1} (*принцип відсутності післядії*). Це припущення записується у вигляді рівнянь станів

$$\xi_k = T_k(\xi_{k-1}, u_k),\ k = 1,...,n.$$

З урахуванням введених понять станів і управлінь запишемо показники ефективності для всього багатокрокового процесу і для кожного k-го кроку процесу. Припускаючи, що показник ефективності k-го кроку залежить від початкового стану на цьому кроці ξ_{k-1} і від управління на цьому кроці u_k, отримаємо цільову функцію на k-му кроці у вигляді $f_k(\xi_{k-1}, u_k)$ та цільову функцію всього багатокрокового процесу у вигляді

$$F = \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_{k-1}, u_k) = F(\xi_0, u_1, ..., u_n).$$

Сформулюємо тепер задачу ДП. Визначити сукупність допустимих управлінь $u_1,...,u_n$, що переводять процес з початкового стану ξ_0 в кінцевий стан ξ_n і максимізують або мінімізують показник ефективності $F = F(\xi_0, u_1, ..., u_n)$.

Управління, при якому досягається максимум (мінімум) цільової функції F, називається оптимальним керуванням $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$.

Основне правило ДП, сформульоване американським математиком Р. Беллманом, називається принципом оптимальності: оптимальне управління має таку властивість, що яким би не було початковий стан на будь-якому етапі і управління, вбрання на цьому кроці, наступні управління повинні вибиратися оптимальними щодо стану, до якого прийде процес в кінці цього етапу.

6.1 Побудова моделі ДП

Спільними рекомендаціями при побудові моделі ДП є наступні.

1. Вибираємо спосіб поділу процесу на кроки.
2. Вводимо параметри стану ξ_k і змінні управління u_k на кожному кроці k.
3. Записуємо рівняння станів (залежність кінцевого стану k-го кроку ξ_k від початкового стану k-го кроку ξ_{k-1} і від управління на k-му кроці u_k)

$$\xi_k = T_k(\xi_{k-1}, u_k), k = 1, ..., n.$$

4. З обмежень завдання визначаємо для кожного k-го кроку безлічі допустимих управлінь D_k.
5. Вводимо показники ефективності кожного кроку $f_k(\xi_{k-1}, u_k)$ і сумарний показник $F = \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_{k-1}, u_k)$.
6. Вводимо умовні максимуми (мінімуми) показника ефективності на кроках від k-го кроку до кінця процесу $F_k^*(\xi_{k-1})$ і умовні оптимальні керування на k-му кроці $u_k^*(\xi_{k-1})$.
7. Записуємо рівняння Беллмана:

$$F_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{u_k \in D_k} \{f_k(\xi_{k-1}, u_k) + F_k^*(\xi_k)\},\ k = 1, ..., n-1, \tag{6.1}$$

$$F_n^*(\xi_{k-1}) = \max_{u_n \in D_n} \{f_n(\xi_{n-1}, u_n)\}, \tag{6.2}$$

де $F_k^* = (\xi_{k-1})$ – максимум показника ефективності на кроках від k-го кроку до кінця процесу за умови, що початковий стан k-го кроку ξ_{k-1}. Управління, на яких реалізуються максимуми в (6.1), (6.2), позначаємо $u_k^*(\xi_{k-1})$ і називаємо умовними оптимальними управліннями на кроках.

6.2 Побудова обчислювальної схеми ДП

Рівняння Беллмана (6.1), (6.2) лежать в основі алгоритму розв'язання задачі ДП, який складається з двох етапів .

Етап I. Умовна оптимізація (рух від кінця до початку).

Послідовно обчислюємо за рівнянням (6.1), (6.2) $F_n^*(\xi_{n-1}), u_n^*(\xi_{n-1})$; $F_{n-1}^*(\xi_{n-2}), u_{n-2}^*(\xi_{n-2}); \ldots; F_1^*(\xi_0), u_1^*(\xi_0)$ для всіх допустимих на відповідних кроках станів ξ_{k-1}. Причому при визначенні значень $F_k^*(\xi_{n-1})$ враховується знайдена з попередньої задачі (6.1), (6.2) функція $F_{k+1}^*(\xi_{n-1})$.

Етап II. Безумовна оптимізація (рух від початку до кінця).

Використовуючи рівняння станів $\xi_k = T_k(\xi_{k-1}, u_k)$ і те, що початковий стан ξ_0 фіксовано, знаходимо послідовно безумовні оптимальні управління на кожному кроці:

$$\xi_0 \to u_1^* = u_1^*(\xi_0) \to \xi_1^* = T_1(\xi_0, u_1^*) \to$$
$$\to u_2^* = u_2^*(\xi_1^*) \to \xi_2^* = T_2(\xi_1^*, u_2^*) \to \ldots \to u_n^* = u_n^*(\xi_{n-1}^*).$$

6.3 Зауваження до методу ДП

Великою перевагою методу ДП є можливість аналізу чутливості до зміни вихідних даних ξ_0 і n. При изменении этих данных задача не решается заново, а делаются лишь некоторые добавления.

Так, якщо число кроків n збільшується на одиницю, то добудовуємо схему, забезпечивши новий крок індексом 0, а початковий стан цього кроку буде ξ_{-1}. Сумарний максимум кроків $0,1,\ldots,n$ дорівнює $F_0^*(\xi_{-1})$.

Іноді обчислювальний процес умовної оптимізації зручно будувати від 1-го кроку до n-му. Це прямий хід обчислень, на відміну від розглянутого вище зворотного ходу. Рівняння станів і рівняння Беллмана для прямого ходу мають вигляд

$$\xi_{k-1} = T(\xi_k, u_k),$$
$$F_k(\xi_k) = \max_{u_k \in D_k} \{f_k(\xi_k, u_k) + F_{k-1}^*(\xi_{k-1})\},\ k = 1,\ldots,n,\ F_0^* \equiv 0.$$

Безумовне оптимальне керування визначається, починаючи з u_n^*.

З точки зору обсягу обчислень обидві схеми рівноправні, але при деяких додаткових дослідженнях краще стає та чи інша. Так, додавання нових кроків зручніше проводити при прямому ході. Для дослідження чутливості завдання до початкового стану ξ_0 зручніше зворотний хід, а для дослідження чутливості до кінцевого стану ξ_n зручніше прямий хід.

6.4 Задача про розподіл ресурсів

У загальному вигляді завдання розподілу ресурсів мають наступну змістовне формулювання.

Є деяка кількість ресурсів (кошти, сировину, трудові ресурси, різні види обладнання і т.п.). Ці ресурси необхідно розподілити між різними об'єктами їх використання по окремих проміжків планового періоду так, щоб отримати максимальну сумарну ефективність від обраного способу розподілу. Показником ефективності може служити прибуток, товарна продукція, фондовіддача для задач максимізації або сумарні витрати, собівартість, час виконання для задач мінімізації.

Розглянемо наступну задачу розподілу ресурсів.

Планується розподіл початкової суми коштів ξ_0 між n підприємствами $\Pi_1,...,\Pi_n$. Надання k-му підприємству коштів u_k приносить дохід $f_k(u_k)$, $k=1,...,n$. Визначити скільки коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб забезпечити максимальний сумарний дохід.

Математична модель задачі має вигляд $F(u_1,...,u_n)=\sum_{k=1}^{n} f_k(u_k) \to \max$,

$u_1+...+u_n=\xi_0$, $k=1,...,n$.

$u_k \geq 0$, $k=1,...,n$.

Побудуємо модель ДП.

Розподіл коштів між n підприємствами можна розглядати як n-кроковий процес. Тому за номер k-го кроку процесу приймемо номер підприємства, яким виділяються кошти u_k. Очевидно, що змінні u_k, $k=1,....,n$, можна розглядати як керуючі змінні. Початковий стан системи характеризується початковою величиною коштів ξ_0. В кінці першого кроку стан системи $\xi_1=\xi_0-u_1$ характеризується залишком коштів після виділення 1-му підприємству коштів u_1. Величини $\xi_1,...,\xi_n$, характеризують залишок коштів після розподілу на відповідних кроках, розглядаємо як стану системи. Рівняння станів в даному випадку мають вигляд

$\xi_k=\xi_{k-1}-u_k$, $k=1,...,n-1$.

Кінцевий стан $\xi_n=0$, т.е. всі кошти ξ_{n-1}, які зосталися до n-го кроку, виділяються n-му підприємству: $u_n=\xi_{n-1}$.

Знайдемо допустимі управління на k-му кроці. Підприємству k можна виділити будь-яку кількість з наявних на початок кроку засобів ξ_{k-1}. тому допустиме управління u_k удовлетворяет неравенствам $0 \leq u_k \leq \xi_{k-1}$.

Показником ефективності кожного кроку є дохід $f_k(u_k)$, сумарним показником - сумарний дохід $F=\sum_{k=1}^{n} f_k(u_k)$. Тоді умовним максимумом $F_k^*(\xi_{k-1})$ буде максимальний сумарний дохід на кроках $k,k+1,...,n$ при початковому стані k-го кроку ξ_{k-1}. Умовне оптимальне управління $u_k^*(\xi_{k-1})$ буде визначати оптимальну кількість коштів, що виділяються k-му підприємству, якщо залишок коштів для розподілу підприємствам $k,k+1,...,n$ дорівнює ξ_{k-1}.

Запишемо тепер рівняння Беллмана:

$$F_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \le u_k \le \xi_{k-1}} \{f_k(u_k) + F_{k+1}^*(\xi_k)\},\ k = 1,...,n-1, \tag{6.3}$$

$$F_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 \le u_k \le \xi_{n-1}} \{f_n(u_n)\} = f_n(\xi_{n-1}),\ \text{(так как } u_n = \xi_{n-1}\text{)}. \tag{6.4}$$

Задача 1. Розв'язати задачу розподілу ресурсів за наступними даними:
1) ξ_0 = 200 млн грн.;
2) n= 4;
3) кошти виділяються тільки в розмірах, кратних 40 млн грн.;
4) функції доходу задані в таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	8	6	3	4
80	10	9	4	6
120	11	11	7	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Розв'язок.
Етап І. Умовна оптимізація.

Последовно вичисляємо $F_4^*(\xi_3), u_4^*$; $F_3^*(\xi_2), u_3^*$; $F_2^*(\xi_1), u_2^*$; $F_1^*(\xi_0), u_1^*$. Розрахунок починаємо з останнього кроку. Рівняння Беллмана для цього кроку має вигляд (6.3)

$$F_4^*(\xi_3) = f_4(\xi_3),$$

де ξ_3 – кількість коштів, які залишаються після виділення коштів для підприємств Π_1, Π_2, Π_3. Обчислення оформляємо в таблиці:

ξ_3	$F_4^*(\xi_3)$	$u_4^*(\xi_3)$
0	0	0
40	4	40
80	6	80
120	8	120
160	13	160

200	16	200

Обчислення на наступних кроках ускладнюються тим, що необхідно враховувати знайдену з попереднього кроку функцію $F_{k+1}^{*}(\xi_k)$.

Розглянемо докладно обчислення для кроку k = 3. Рівняння Беллмана для цього кроку має вигляд:

$$F_3^*(\xi_2) = \max_{0 \le u_3 \le \xi_2} \{f_3(u_3) + F_4^*(\xi_2 - u_3)\}.$$

Запишемо обчислення $F_3^*(\xi_2)$ для всіх допустимих значень ξ_2.

$$F_3^*(0) = f_3(0) + F_4^*(0) = 0,\ u_3^*(0) = 0;$$

$$F_3^*(40) = \max_{0 \le u_3 \le 40} \{f_3(u_3) + F_4^*(40 - u_3)\} = \max\begin{cases} f_3(0) + F_4^*(40) \\ f_3(40) + F_4^*(0) \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 0+4 \\ 3+0 \end{cases} = 4,\ u_3^*(40) = 0.$$

$$F_3^*(80) = \max_{0 \le u_3 \le 80} [f_3(u_3) + F_4^*(80 - u_3)] = \max\begin{cases} f_3(0) + F_4^*(80) \\ f_3(40) + F_4^*(40) \\ f_3(80) + F_4^*(0) \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 0+6 \\ 3+4 \\ 4+0 \end{cases} = 7,\ u_3^*(80) = 40.$$

$$F_3^*(120) = \max\begin{cases} f_3(0) + F_4^*(120) \\ f_3(40) + F_4^*(80) \\ f_3(80) + F_4^*(40) \\ f_3(120) + F_4^*(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0+8 \\ 3+6 \\ 4+4 \\ 7+0 \end{cases} = 9,\ u_3^*(120) = 40.$$

$$F_3^*(160) = \max\begin{cases} f_3(0) + F_4^*(160) \\ f_3(40) + F_4^*(120) \\ f_3(80) + F_4^*(80) \\ f_3(120) + F_4^*(40) \\ f_3(160) + F_4^*(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0+13 \\ 3+6 \\ 4+6 \\ 7+4 \\ 11+0 \end{cases} = 13,\ u_3^*(160) = 0.$$

$$F_3^*(200)=\max\begin{cases} f_3(0)+F_4^*(200) \\ f_3(40)+F_4^*(160) \\ f_3(80)+F_4^*(120) \\ f_3(120)+F_4^*(80) \\ f_3(160)+F_4^*(40) \\ f_3(200)+F_4^*(0) \end{cases}=\max\begin{cases} 0+16 \\ 3+13 \\ 4+8 \\ 7+6 \\ 11+4 \\ 18+0 \end{cases}=18,\ u_3^*(200)=200.$$

Ці обчислення оформляємо в таблицю для кроку *k*=3:

ξ_2	$F_3^*(\xi_2)$	$u_3^*(\xi_2)$
0	0	0
40	4	0
80	7	40
120	9	40
160	13	0
200	18	200

Обчислення для кроку k = 2 проводяться аналогічно. В результаті виходить таблиця:

ξ_1	$F_2^*(\xi_1)$	$u_2^*(\xi_1)$
0	0	0
40	6	40
80	10	40
120	13	80
160	16	80
200	13	40

Оскільки початковий стан ξ_0 фіксоване (загальна кількість коштів, що виділяються), то для кроку k = 1 обчислення проводяться лише для значення ξ_0=200.

$$F_1^*(200) = \max_{0 \le u_1 \le 200} \{f_1(u_1) + F_2^*(200 - u_1)\} = 24,\ u_1^*(200) = 40.$$

Етап II. Безумовна оптимізація.

Знаходимо безумовні оптимальні управління, використовуючи рівняння станів $\xi_k = \xi_{k-1} - u_k$, $k = 1,...,n-1$:

$$\xi_0 = 200 \to u_1^* = u_1^*(200) = 40 \to \xi_1^* = \xi_0 - u_1^* = 200 - 40 = 160 \to$$

$$\to u_2^* = u_2^*(160) = 80 \to \xi_2^* = 160 - u_2^* = 80 \to u_3^* = 40 \to \xi_3^* = 40 \to$$

$$\to u_4^* = 40 \to \xi_4^* = 0.$$

$$F_{\max} = F_1^*(200) = 24.$$

Відповідь. Оптимальні вкладення: $\Pi_1 = 40$, $\Pi_2 = 80$, $\Pi_3 = 40$, $\Pi_4 = 40$. Максимальний сумарний дохід $F_{\max} = 24$.

Слід зазначити, що таблицю 1-го кроку достатньо було заповнити для початкового стану ξ_0=200 млн грн. Повна таблиця кроку 1 дає рішення не однієї задачі, а безлічі завдань з будь-якими значеннями ξ_0 від 40 до 200. При збільшенні початкових коштів до 240 необхідно в кожній k-й таблиці додати ще один рядок, відповідну початкового стану ξ_{k-1}=240.