Лабораторна робота № 1

МАТРИЧНІ ІГРИ. ЗМІШАНІ СТРАТЕГІЇ.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Змішаною стратегією (з.с.) гравця в матричної грі називається ймовірнісний розподіл на безлічі його ч.с. Таким чином, якщо $i=1,\dots,m$ – чисті стратегії гравця I, а $j=1,\dots,n$ – чисті стратегії гравця II, то з.с. гравця I – це ймовірнісний вектор $x=(x_1,\dots,x_m)$, де x_i – ймовірність вибору гравцем I чистої стратегії i, $i=1,\dots,m$. Очевидно, що вектор x повинен задовольняти умовам:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i=1,\dots,m. \tag{1.1}$$

Аналогічно з.с. гравця II – це ймовірнісний вектор $y=(y_1,\dots,y_n)$, що задовольняє умовам:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j=1,\dots,n. \tag{1.2}$$

Позначимо множину всіх з.с. гравця I через X, а гравця II – через Y. Якщо I вибрав з.с. $x \in X$, а II – $y \in Y$, то виграшем гравця I (відповідно, програшем гравця II) в ситуації (x,y) природно вважати математичне сподівання

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \tag{1.3}$$

Відповідно до принципу минимакса гарантований, тобто найменший виграш гравця I при виборі їм з.с. x буде

$$u(x) = \min_{y\in Y} H(x,y) = \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \tag{1.4}$$

Тоді гравцю I вигідно вибрати x так, щоб максимально збільшити $u(x)$:

$$u^* = \max_{x\in X} u(x) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \tag{1.5}$$

Аналогично гарантований, тобто найбільший, програш гравця II при воборі ним з.с. y буде

$$v(y) = \max_{x\in X} H(x,y) = \max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j , \tag{1.6}$$

і гравцю II вигідно мінімізувати $v(y)$:

$$v^* = \min_{y\in Y} u(x) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \tag{1.7}$$

Числа u^*, v^* називаються відповідно нижньою і верхньою ціною гри в змішаних стратегіях.

Теорема 1.2 (про мінімакс). Для будь-якої матричної гри має місце рівність $u^* = v^*$. Іншими словами, будь-яка матрична гра вирішувана в с.с.

Оптимальні з.с. гравців, а також ціна гри в з.с. можуть бути знайдені як рішення пари двоїстих задач лінійного програмування:

$$\begin{cases} u \to \max \\ u - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0,\ j = 1,\dots,n, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,m, \\ u - \text{любая}, \end{cases} , \qquad \begin{cases} v \to \min \\ y_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n, \\ v - \text{любая}, \\ v - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ge 0, i = 1,\dots,m, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

Тут a_{ij} – елементи платіжної матриці A, змінні x_i, y_j – компоненти змішаних стратегій гравців I, II відповідно, u – гарантований виграш гравця I, v – гарантований програш гравця II в з.с.

Задача. Розв’язати гру з платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

1. З'ясуємо, чи має гра рішення в ч.с. Для цього обчислимо нижню і верхню ціни гри в ч.с .:

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = -1;\ b = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Отримаємо, що $a < b$, значить, матриця A не має сідлової точки, і гра не розв’язна в ч.с.

2. Будемо шукати рішення гри в с. с. Змішана стратегія гравця I – це ймовірнісний вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3), \text{ где } x_1 + x_2 + x_3 = 1;\ x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Аналогічно змішана стратегія гравця II – це ймовірнісний вектор:

$$y = (y_1, y_2, y_3), \text{ где } y_1 + y_2 + y_3 = 1;\ y_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

3. Зауважимо, що кожен елемент рядка 1 цієї матриці не менше відповідного елемента рядка 3, тобто виграш гравця I при виборі їм ч.с. 1 не менше за нього виграшу при виборі їм ч.с. 3. Ясно, що розумний гравець I віддасть перевагу стратегію 1 стратегії 3. У цьому випадку говорять, що ч.с. 1 гравця I домінує над його ч.с. 3. Аналогічно кожен елемент стовпця 2 цієї статті не більше відповідного елемента стовпця 3, і ч.с. 2 гравця II домінує над його ч.с. 3. Легко зрозуміти, що в оптимальні с.с. домінованих ч.с. увійдуть з нульовими ймовірностями $x_3^* = 0$, $y_3^* = 0$. Тому в подальшому ми можемо розглядати скорочену матрицю гри, отриману з вихідної викреслюванням третього рядка і третього стовпця:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. «Зміщення» матриці. Замість матриці $\overline{A}$ розглянемо матрицю

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

отриману з матриці $\overline{A}$ додаванням одного і того ж числа до всіх її елементів. Це Число (в даному випадку 2) вибирається так, щоб всі елементи матриці $\widetilde{A}$ стали невід'ємними. Нескладно показати, що таке зрушення платіжної матриці не призводить до зміни оптимальних змішаних стратегій гравців. Змінюється тільки значення ціни гри, в даному випадку воно збільшується на 2.

Сенс такого зсуву в наступному. У грі з платіжною матрицею $\widetilde{A}$ виграш гравця I в будь-якій ситуації невід'ємний, а значить, невід'ємні і все його гарантовані виграші, а також ціна гри в с.с. Це дає нам право, складаючи пару двоїстих задач ЛП, вважати змінні u, v невід'ємними.

5. Складаємо пару двоїстих задач для гри з платіжною матрицею $\widetilde{A}$:

$$\begin{cases} u \to \max \\ u - 3x_1 \le 0, \\ u - x_1 - 4x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ u \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v \to \min \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ v \ge 0, \\ v - 3y_1 - y_2 \ge 0, \\ v - 4y_2 \ge 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Перш ніж розв’язувати їх, зручно зробити заміну змінних $s_i = \dfrac{x_i}{u}$, $t_i = \dfrac{y_i}{v}$, i=1,2. Тоді завдання набирають вигляду

$$\begin{cases} s_1 + s_2 \to \min \\ 3s_1 \ge 1, \\ s_1 + 4s_2 \ge 1, \\ s_1 \ge 0, \\ s_2 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 + t_2 \to \max \\ t_1 \ge 0, \\ t_2 \ge 0, \\ 3t_1 + t_2 \le 1, \\ 4t_2 \le 1. \end{cases}$$

Оптимальний розв'язок $t^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $v^* = \dfrac{1}{t_1 + t_2} = 2$. Використовуючи другу теорему подвійності, знаходимо оптимальне рішення двоїстої задачі: $s^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$,

$u^* = \dfrac{1}{s_1 + s_2} = 2$. Повертаючись до початкових змінним і згадуючи, що $x_3^* = 0$, $y_3^* = 0$, отримуємо оптимальні з.с. гравців: $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Ціна гри в с.с. дорівнює 0 (з урахуванням зсуву матриці).

Завдання для самостійної роботи:

1.1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

1.4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1.5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

1.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1.7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

x $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1.8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

1.9

1.10

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

1.11
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.12
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

1.13
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

1.14
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.15
$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1.16
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.17
$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

1.18
$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

1.19

1.20

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

1.21

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1.22

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

1.23

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1.24

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

1.25

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1.26

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

1.27

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,

$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1.28

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,

$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1.29

1.30

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \left(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right),$$

$$y^* = \left(0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right),$$

$$y^* = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right)$$