Лекція 7. Динамічне програмування. Розподіл ресурсів.

Задача 1. Розв'язати задачу розподілу ресурсів за наступними даними:

1) $\xi_0 = 200$ млн грн.;

2) $n = 4$;

3) кошти виділяються тільки в розмірах, кратних 40 млн грн.;

4) функції доходу задані в таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	8	6	3	4
80	10	9	4	6
120	11	11	7	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Розв'язок.

Етап І. Умовна оптимізація.

Последовно вичисляємо $F_4^*(\xi_3), u_4^*$; $F_3^*(\xi_2), u_3^*$; $F_2^*(\xi_1), u_2^*$; $F_1^*(\xi_0), u_1^*$. Розрахунок починаємо з останнього кроку. Рівняння Беллмана для цього кроку має вигляд (6.3)

$$F_4^*(\xi_3) = f_4(\xi_3),$$

де ξ_3 – кількість коштів, які залишаються після виділення коштів для підприємств Π_1, Π_2, Π_3. Обчислення оформляємо в таблиці:

ξ_3	$F_4^*(\xi_3)$	$u_4^*(\xi_3)$
0	0	0
40	4	40
80	6	80
120	8	120
160	13	160
200	16	200

Обчислення на наступних кроках ускладнюються тим, що необхідно враховувати знайдену з попереднього кроку функцію $F_{k+1}^{*}(\xi_k)$.

Розглянемо докладно обчислення для кроку k = 3. Рівняння Беллмана для цього кроку має вигляд:

$$F_3^{*}(\xi_2) = \max_{0 \le u_3 \le \xi_2} \{f_3(u_3) + F_4^{*}(\xi_2 - u_3)\}.$$

Запишемо обчислення $F_3^{*}(\xi_2)$ для всіх допустимих значень ξ_2.

$F_3^{*}(0) = f_3(0) + F_4^{*}(0) = 0$, $u_3^{*}(0) = 0$;

$$F_3^{*}(40) = \max_{0 \le u_3 \le 40} \{f_3(u_3) + F_4^{*}(40 - u_3)\} = \max \begin{cases} f_3(0) + F_4^{*}(40) \\ f_3(40) + F_4^{*}(0) \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 0 + 4 \\ 3 + 0 \end{cases} = 4, \; u_3^{*}(40) = 0.$$

$$F_3^*(80)=\max_{0\le u_3\le 80}[f_3(u_3)+F_4^*(80-u_3)]=\max\begin{cases}f_3(0)+F_4^*(80)\\ f_3(40)+F_4^*(40)=\\ f_3(80)+F_4^*(0)\end{cases}$$

$$=\max\begin{cases}0+6\\ 3+4\\ 4+0\end{cases}=7,\ u_3^*(80)=40.$$

$$F_3^*(120)=\max\begin{cases}f_3(0)+F_4^*(120)\\ f_3(40)+F_4^*(80)\\ f_3(80)+F_4^*(40)\\ f_3(120)+F_4^*(0)\end{cases}=\max\begin{cases}0+8\\ 3+6\\ 4+4\\ 7+0\end{cases}=9,\ u_3^*(120)=40.$$

$$F_3^*(160)=\max\begin{cases} f_3(0)+F_4^*(160) \\ f_3(40)+F_4^*(120) \\ f_3(80)+F_4^*(80) \\ f_3(120)+F_4^*(40) \\ f_3(160)+F_4^*(0) \end{cases} =\max\begin{cases} 0+13 \\ 3+6 \\ 4+6 \\ 7+4 \\ 11+0 \end{cases} =13,\ u_3^*(160)=0.$$

$$F_3^*(200)=\max\begin{cases} f_3(0)+F_4^*(200) \\ f_3(40)+F_4^*(160) \\ f_3(80)+F_4^*(120) \\ f_3(120)+F_4^*(80) \\ f_3(160)+F_4^*(40) \\ f_3(200)+F_4^*(0) \end{cases} =\max\begin{cases} 0+16 \\ 3+13 \\ 4+8 \\ 7+6 \\ 11+4 \\ 18+0 \end{cases} =18,\ u_3^*(200)=200.$$

Ці обчислення оформляємо в таблицю для кроку k=3:

ξ_2	$F_3^*(\xi_2)$	$u_3^*(\xi_2)$
0	0	0
40	4	0
80	7	40
120	9	40
160	13	0
200	18	200

Обчислення для кроку k = 2 проводяться аналогічно. В результаті виходить таблиця:

ξ_1	$F_2^*(\xi_1)$	$u_2^*(\xi_1)$
0	0	0
40	6	40
80	10	40
120	13	80
160	16	80
200	13	40

Оскільки початковий стан ξ_0 фіксоване (загальна кількість коштів, що виділяються), то для кроку k = 1 обчислення проводяться лише для значення ξ_0=200.

$$F_1^*(200) = \max_{0 \le u_1 \le 200} \{f_1(u_1) + F_2^*(200 - u_1)\} = 24 \text{, } u_1^*(200) = 40 \text{.}$$

Етап ІІ. Безумовна оптимізація.

Знаходимо безумовні оптимальні управління, використовуючи рівняння станів $\xi_k = \xi_{k-1} - u_k$, $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\xi_0 = 200 \rightarrow u_1^* = u_1^*(200) = 40 \rightarrow \xi_1^* = \xi_0 - u_1^* = 200 - 40 = 160 \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2^* = u_2^*(160) = 80 \rightarrow \xi_2^* = 160 - u_2^* = 80 \rightarrow u_3^* = 40 \rightarrow \xi_3^* = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow u_4^* = 40 \rightarrow \xi_4^* = 0 \text{.}$$

$$F_{\max} = F_1^*(200) = 24 \text{.}$$

Відповідь. Оптимальні вкладення: $\Pi_1 = 40$, $\Pi_2 = 80$, $\Pi_3 = 40$, $\Pi_4 = 40$. Максимальний сумарний дохід $F_{\max} = 24$.

Слід зазначити, що таблицю 1-го кроку достатньо було заповнити для початкового стану ξ_0=200 млн грн. Повна таблиця кроку 1 дає рішення не однієї задачі, а безлічі завдань з будь-якими значеннями ξ_0 від 40 до 200. При збільшенні початкових коштів до 240 необхідно в кожній k-й таблиці додати ще один рядок, відповідну початкового стану ξ_{k-1}=240.