Лекція 1. Предмет теорії прийняття рішень.

Теорія ігр.

Реальні ситуації, що складаються в суспільному житті будь-якої країни і, зокрема, в економічній сфері, відрізняються зростаючою складністю завдань, безперервним зміною і неповнотою даних про економічну кон'юнктуру, високою динамічністю процесів. У цих умовах інтелектуальні можливості людини можуть увійти в суперечність з об'ємом інформації, який необхідно осмислити і переробити в ході управління різноманітними технологічними і соціальними процесами. Внаслідок цього зростає небезпека зриву управління. Основою управління, як відомо, є рішення. НТР настільки підвищила рівень енергоозброєності осіб, які приймають рішення (ОПР), що помилки від невірно прийнятих рішень можуть призвести не тільки до економічної катастрофи для окремого підприємця або галузі, а й до глобальної катастрофи для людства.

Дієвим способом підвищення ефективності та якості управління є оволодіння менеджерами всіх рівнів методологією системного аналізу і прийняття рішень на основі математичних методів. При цьому в ролі інтелектуального помічника людини виступає комп'ютер. Щоб наділити комп'ютер "інтелектуальними" можливостями, необхідно реальну економічну або управлінську задачу замінити її математичним аналогом, а досвід і інтуїцію людини - його моделями переваг. Саме ці питання становлять предмет математичної теорії прийняття рішень.

Математична теорія прийняття рішень в складних ситуаціях, яку часто називають теорією прийняття рішень (ТПР), займається розробкою загальних методів аналізу ситуацій прийняття рішень. За допомогою цих методів вся інформація про проблему, включаючи відомості про переваги ОПР та його ставлення до ризику, а також судження ЛПР про можливі реакції інших суб'єктів на прийняті ним рішення, використовується для отримання висновку про те, який з варіантів вирішення є найкращим.

Системний підхід до прийняття рішень. Методологічну основу ТПР складають елементи наукової бази системного підходу. Системний підхід узагальнює теоретичні посилки і методи соціально-прикладних і технічних наук, а його концепції і принципи складають основу для подальшого уточнення і конкретизації в інших науках. Принципи системного підходу практично реалізуються в елементах наукової бази системного аналізу. Сам системний аналіз – це сукупність конкретних, мають практичну спрямованість методичних підходів, практичних методів і алгоритмів, що дозволяють реалізувати теоретичні концепції та головні ідеї системного підходу в рамках соціально-економічних і технічних проблем. Системний підхід і системний аналіз складають базу таких наукових дисциплін, як теорія управління.

Теорія прийняття рішень орієнтується на розробку та пошук оптимальних результатів за досить складних проблем, із значною кількістю зв'язків і залежностей, обмежень, варіантів рішень. У зв'язку з цим використання системного підходу як методологічної бази вирішення подібних проблем є абсолютно необхідним. Принципова особливість системного підходу полягає в розгляді об'єкта управління як складної системи з різноманітними внутрішньосистемними зв'язками між її окремими елементами і зовнішніми зв'язками з іншими системами. Перевагою системного підходу є можливість обліку невизначеності поведінки елементів і системи в цілому, а також забезпечення узгодженості множини цілей при прийнятті рішення, зокрема, цілей елементів підсистем із загальними цілями системи (наприклад, цілей заводів і цехів, дільниць).

Мета системного аналізу полягає в з'ясуванні реальних цілей прийнятого рішення, можливих варіантів досягнення цих цілей, встановленні умов появи проблеми, обмежень і наслідків рішення. Логічний системний аналіз доповнюється математичним аналізом системи. Характерними ознаками системного аналізу є наступні:

• рішення приймаються, як правило, стосовно окремих елементів системи, тому необхідно враховувати взаємозв'язок елемента з іншими і загальну мету системи (тобто реалізовувати системний підхід);

• аналіз здійснюється за принципом – від загального до приватного, спочатку для всього комплексу проблем, а далі для окремих складових;

• першочергове значення мають такі фактори, як час, вартість, якість роботи; • нерідко дані аналізу орієнтують на вибір відповідного рішення;

• по відношенню до логічних суджень системний аналіз є допоміжним елементом; • системний аналіз дозволяє виділити області, де приймаються логічні судження і визначити значення кожного з можливих варіантів рішення;

• широке використання комп'ютерів на всіх стадіях аналізу проблеми та процесу прийняття відповідного рішення.

Теорія ігр.

Теорія ігр - це особливий розділ дослідження операцій, в якому вивчаються математичні моделі прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Під конфліктом зазвичай розуміють будь-яке явище, стосовно якого має сенс говорити, хто і як в цьому явищі бере участь, які його можливі наслідки, хто в цих результатах зацікавлений і в чому полягає ця зацікавленість. Важливо відзначити, що наведена формулювання досить універсальна і охоплює не тільки конфлікти між учасниками так званих салонних ігор (шахи, шашки, карткові ігри і т.д.), але і економічні зіткнення інтересів раз-особистих фірм в умовах конкуренції, а також військові конфлікти. Залежно від числа сторін, що беруть участь в конфлікті, розрізняють ігри багатьох осіб і гри двох осіб (парні ігри). Ми будемо розглядати тільки парні ігри. Конфліктуючі сторони назвемо гравцями і позначимо їх цифрами I і II (це можуть бути і команди). Гра складається з послідовності ходів. Стратегією гравця називають систе-му правил, що визначають його вибір варіанта дії при кожному ході. У більшості ігор гравець приймає рішення про своє чергове ході перед самим цим ходом або на кілька ходів вперед. Інакше і не може бути, оскільки в таких іграх, як шахи, число можливих ходів в більшості позицій дуже велике, і це не дає можливості гравцям заздалегідь спланувати всі свої дії від початку до кінця.

Однак з теоретичної точки зору ніщо не заважає нам припускати, що вже до початку гри кожен гравець вирішив, як він буде грати в будь-який позиції. Таким чином, ми припускаємо, що кожен гравець вибирає стратегію ще до початку гри.
Безлічі стратегій гравців I і II будемо позначати буквами X і Y відповіно.

Нехай гравець *I* обрав стратегію $x \in X$, а гравець *II* – стратегію $y \in Y$

Комбінація цих стратегій (*x,y*) називається ситуацією. Деякі комбінації стратегій можуть бути несумісними, і в такому випадку кажуть про неможливу ситуацію.
За кількістю можливих стратегій гравців ігри діляться на кінцеві і безкінечні.
Зацікавленність гравців в результатах гри проявляється в тому, що кожен з них вважає за краще одні ситуації іншим. Найчастіше відношення переваги задається за допомогою функцій виграшу, визначених на безлічі ситуацій.

Позначимо через $H_1(x,y)$ - виграш гравця I в ситуації (x, y).

Таким чином, $H_1(x,y)$ - це той виграш (кількість очок, сума грошей і т. д.), на який може розраховувати гравець I, якщо він вибере стратегію $x \in X$ а його суперник - $y \in Y$ стратегію.

Аналогічно визначається функція виграшу (x, y) гравця II.
Далі ми будемо розглядати ігри з нульовою сумою, коли $H_1(x,y)+H_2(x,y)=0$, тобто коли $H_1(x,y)=-H_2(x,y)$ для будь-яких ігр. В таких іграх, виграш одного гравця одночасно є програшем іншого, і ми можемо розглядати його як платіж програвшого переможцю.

Матричні ігри.

Матричної грою називається кінцева гра двох осіб з нульовою сумою.
Так як число стратегій кожного гравця в матричної грі скінченне, то їх можна пронумерувати. Будемо вважати, що гравець I має стратегії $i=1, \ldots, m$, а гравець II – стратегії $j=1, \ldots, n$. В подальшому, будемо називати їх чистыми стратегиями (ч.с.).

Функції виграшу гравців в матричної грі можуть бути задані у вигляді платіжної матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m \times n$, где a_{ij} – виграш гравця I (і, відповідно, програш гравця II) в ситуації (i,j).

Приклад 1.2. Гра «Два числа».

Грають двоє. Кожен з гравців потай від іншого записує одне з двох чисел: 1 або 2. Потім числа пред'являються і підводиться підсумок. Якщо обидва записали 1, то II виграє 1 очко, а якщо обидва записали 2, то I виграє 2 очки, якщо I записав менше число, то I виграє 1 очко; в іншому випадку II виграє 2 очки. У будь-якій ситуації виграш гравця дорівнює програшу суперника.

Тут у кожного з гравців є по дві ч.с .: записати 1 або записати 2. Платіжна матриця гри зображена на рис. 2, рядки відповідають стратегіям гравця I, стовпчики - стратегіям гравця II.

	1	2
1	-1	1
2	-2	2

Рис. 2

1.3 Принцип мінімакса. Сідлові точки

Будемо припускати, що гравці поводяться розумно і кожен з них прагне максимізувати свій виграш. Спробуємо з'ясувати, як слід було б діяти гравцям в матричної грі, щоб домогтися поставленої мети.

Припустимо, що гравці I і II беруть участь в матричної грі з платіжною матрицею $A=(a_{ij})$ розміру $m \times n$. Обираючи чисту стратегію, гравець I обирає рядок i, а гравець II – стовбчик j. Виграш I або, що теж саме, програш II в цій ситуації дорівнює a_{ij}. Ясно, що гравець I буде намагатися збільшити a_{ij}, в той час, як II буде намагатися зменшити його.

Якщо гравець I вибрав ч.с. i, то II повинен відповісти такою стратегією j, щоб виграш a_{ij} був найменшим серед чисел $a_{i1},\ldots,a_{in}$, позначимо його через a_i:

$$a_i = \min_j a_{ij}.$$

Величина a_i є найменший, тобто гарантований виграш гравця I при виборі ним ч. с. i. Отже, гравцеві I вигідно вибрати ту стратегію, яка дасть найбільше значення a_i:

$$a = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Стратегія p, для якої $a_p = \max_i a_i = a$, являєтьс максімінною стратегією гравця I.

Аналогічно розмірковуючи, отримуємо, що величина

$$b_j = \max_i a_{ij}$$

є найбільший, тобто гарантований, програш гравця II при виборі їм ч.с. j. Гравцеві II з усіх стратегій вигідно вибрати мінімаксне ч.с., при якій його гарантований програш b_j мінімальний:

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Величини a і b називаються відповідно нижньою і верхньою ціною гри в ч.с.

Ще раз підкреслимо, що, вибравши максимина ч.с., гравець I гарантовано отримає виграш, не менший a, а гравець II, вибравши мінімаксне ч.с., не програє більше b.

Описані міркування носять назву принципу минимакса (або принципу гарантованого результату). Коротко цей принцип може бути сформульовано таким чином: кожен гравець повинен прагнути максимально збільшити свій гарантований виграш.

1.4 Змішані стратегії

Змішаною стратегією (з. с.) гравця в матричній грі називається імовірнісний розподіл на безлічі його ч. с. Таким чином, якщо i=1,…,m – чисті стратегії гравця I, а j=1,…,n – чисті стратегії гравця II, то з. с гравця I – це ймовірнісний вектор $x = (x_1,\dots,x_m)$, де x_i – ймовірність вибору гравцем I чистої стратегії i, i = 1, …, m. Очевидно, що вектор x повинен задовольняти умовам:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m. \qquad (1.1)$$

Аналогічно з.с. гравця II - це імовірнісний вектор, що задовольняє умовам

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n. \qquad (1.2)$$

Позначимо множину всіх з.с. гравця I через X, а гравця II - через Y. Якщо I вибрав з.с. $x \in X$, а II – $y \in Y$, о виграшем гравця I (відповідно, програшем гравця II) в ситуації (x, y) природно вважати математичне сподівання

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\ . \qquad (1.3)$$

Відповідно до принципу минимакса гарантований, тобто найменший виграш гравця I при виборі їм з.с. x буде

$$u(x) = \min_{y \in Y} H(x, y) = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,. \tag{1.4}$$

Тому гравцеві I вигідно вибрати x так, щоб максимально збільшити $u(x)$:

$$u^* = \max_{x \in X} u(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,. \tag{1.5}$$

Аналогічно гарантований, тобто найбільший, програш гравця II при виборі їм з.с. y буде

$$v(y) = \max_{x \in X} H(x, y) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,, \tag{1.6}$$

і гравцеві II вигідно мінімізувати $v(y)$:

$$v^* = \min_{y \in Y} u(x) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,. \tag{1.7}$$

Числа u *, v * називаються відповідно нижньою і верхньою ціною гри в змішаних стратегіях.

Теорема 1.2 [2] (про мінімакс). Для любої матричної гри має місце рівність $u^* = v^*$. Іншими словами, люба матрична гра розв'язна в з.с.

Оптимальні з.с. гравців, а також ціна гри в з.с. можуть буть знайдені як рішення пари двоїстих задач лінійного програмування:

$$\begin{cases} u \to \max \\ u - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0,\ j = 1,\dots,n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m, \\ u - \text{довільна}, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} v \to \min \\ y_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n, \\ v - \text{довільна}, \\ v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ge 0,\ i = 1,\dots,m, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

Тут a_{ij} – елементи платіжної матриці А, змінні x_i, y_j – компоненти змішаних стратегій гравців І, ІІ відповідно, u - гарантований виграш гравця І, v - гарантований програш гравця ІІ в з.с.