Практичне заняття №5
Дискретні випадкові величини їх числові характеристики та закони розподілу

Дискретною називають випадкову величину, яка може приймати зчисленну скінчену чи нескінченну множину значень з певними ймовірностями.

Задають дискретні випадкові величини за допомогою ***закону розподілу***.

Ймовірність події, яка полягає в тому, що X прийме значення менше x, тобто $P(X < x)$, будемо називати ***інтегральною функцією розподілу*** або ***функцією розподілу випадкової величини***. Позначають інтегральну функцію символом $F(x)$.

Отже, згідно з означенням, інтегральна функція розподілу задається формулою:

$$F(x) = P(X < x).$$

Інтегральна функція володіє такими властивостями:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$.

3) ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення з інтервалу (a,b), обчислюється за формулою:

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Над випадковими величинами можна проводити такі самі операції, як і над випадковими подіями.

Об'єднання випадкових величин X і Y

$X \cup Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
P	$p_1\tilde{p}_1$	$p_1\tilde{p}_2$	$p_2\tilde{p}_1$	$p_2\tilde{p}_2$

Перетин незалежних випадкових величин X і Y

$X \cap Y$	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	$p_1\tilde{p}_1$	$p_1\tilde{p}_2$	$p_2\tilde{p}_1$	$p_2\tilde{p}_2$

Числові характеристики випадкових величин та їх властивості

Математичне сподівання: $M(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + ... + x_k p(x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює сталій: $M(C) = C$.

2. Математичне сподівання добутку сталої величини з випадковою величиною дорівнює добутку сталої на математичне сподівання цієї випадкової величини: $M(CX) = CM(X)$.

3. Для випадкових величин X і Y справедливі співвідношення: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4. Математичне сподівання випадкової величини $Z = \alpha X \cup \beta Y$ обчислюється за формулою:

$$M(Z) = \alpha M(X) + \beta M(Y).$$

де α, β – сталі числа.

5. Математичне сподівання перетину двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(X \cap Y) = M(X)M(Y)$.

Дисперсія: $D(X) = M\left\{ \left[X - M(X)\right]^2 \right\}$

Дисперсія має такі властивості:

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

2. Постійний множник виноситься за знак дисперсії в квадраті: $D(C \cap X) = C^2 D(X)$.

3. Дисперсія об'єднання (різниці) двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Для обчислення дисперсії в схемі повторних незалежних випробувань Бернуллі є справедливим такий ***наслідок***: дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності появи і не появи події A в одному випробовуванні:

$D(X) = npq$.

Середнє квадратичне відхилення : $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Закони розподілу дискретних випадкових величин

Рівномірний розподіл на множині

ξ	1	2	...	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

а функція розподілу:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P_k = \sum_{x_k < x} \frac{1}{n} = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{n}, & 1 < x \le 2, \\ \quad ... & \\ \frac{n-1}{n}, & n-1 < x \le n, \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія величини ξ відповідно дорівнюють:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = ... = \frac{n+1}{2},$$

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = ... = \frac{n^2-1}{12}.$$

Гіпергеометричний закон розподілу. Дискретна випадкова величина ξ розподілена за гіпергеометричним законом, якщо вона набуває значень $0,1,...,k$ з ймовірностями:

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Параметри розподілу M, N, n – натуральні числа, причому: $M \le N,\ n \le N,\ k = \min(M, n)$.

Числові характеристики гіпергеометричного закону:

$$M(\xi) = \sum x_m p_m = ... = n\frac{M}{N},$$

$$D(\xi) = \sum x_m^2 p_m - \left(n\frac{M}{N}\right)^2 = ... = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Геометричний закон розподілу. Дискретна випадкова величина ξ розподілена за геометричним законом, якщо вона набуває значень з множини натуральних чисел з ймовірностями:

$$P\{\xi = m\} = p(1-p)^{m-1} \equiv pq^{m-1},\quad m = 1,\ 2,....$$

Числові характеристики розподілу:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = ... = \frac{1}{p},\ \ D(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \frac{1}{p^2} = ... = \frac{q}{p^2}.$$

Біномний розподіл. Дискретна випадкова величина ξ розподілена за біномним законом, якщо вона набуває значень $0,1,...,n$ з ймовірностями:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k = \overline{0,n}.$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = ... = np,\ \ D(\xi) = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 p_k - (np)^2 = ... = npq.$$

Розподіл Пуассона. Дискретна випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона, якщо вона набуває значень 0, 1,..., n з ймовірностями:

$$P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^{m}}{m!} e^{-\lambda},$$

де λ – параметр розподілу.

Числові характеристики розподілу:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \lambda, \quad D(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 p_k - \lambda^2 = \lambda.$$

Аудиторна робота

1. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю $q = 0{,}1$ *(p = 1 - q* = 0,9 – імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини *X* – число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити $\sigma(X)$.

2. У таблиці подано дані розподілу дискретної випадкової величини, пов'язані з денним попитом на продукт.

Попит за день	10	20	30	40	50
$p(x)$	0,05	0,32	0,3	0,18	0,15

Визначте:

а) середнє значення денної вимоги;

б) середньоквадратичне відхилення від денного попиту

3. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого – 0,7. Побудувати закон розподілу величини *X* – числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

4. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Обчислити *M(X), D(X),* $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини *X* – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

5. У партії із семи деталей є 6 стандартних. Навмання відібрано 4 деталі. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини *X* – числа стандартних деталей серед відібраних. Знайти дисперсію величини *X*.

6. П'ять приладів перевіряють на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перед цим перевірений прилад виявиться надійним. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, дорівнює 0,8 для кожного із них. Обчислити числові характеристики дискретної випадкової величини *X* – числа приладів, що пройшли перевірку. Знайти M_0(моду).

7. Ймовірність виконання договору для кожного з трьох заводів дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу числа заводів, які виконують договір.

8. Дискретна випадкова величина *X* приймає три можливі значення: x_1=4 з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$; x_2=6 з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$ і x_3 з ймовірністю p_3. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X*, якщо $M(X) = 8$. Знайти середнє квадратичне відхилення.

9. Задано закон розподілу ймовірностей:

X	–3	1	40,2
p	0,2	0,3	0,5

Знайти $M(2X - 3)$, $D(2X - 3)$.

10. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	–1	0	1
P	P_1	P_2	P_3

Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, якщо відомо, що $M(X)=0{,}1$, $M(X^2)=0{,}9$.