Границя функції

Число a називають *границею послідовності* x_n, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число N_0, що для всіх $n > N_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність x_n *збігається* до числа a. Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Число A називають *границею функції при* $x \to \infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \to x_0$. Запис $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ означає, що для довільного (як завгодно великого) числа $M > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Властивості нескінченно малих:

1) Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, то їх сума $f_1(x) + f_2(x)$ також є нескінченно малою при $x \to x_0$.

2) Якщо функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \to x_0$, а функція $g(x)$ – обмежена, то їх добуток $f(x)\,g(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to x_0$.

Властивості нескінченно великих:

1) Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ – нескінченно велика, а функція $g(x)$ має границю, то нескінченно великими при $x \to x_0$ є:

сума $f(x) + g(x)$; добуток $g(x) \cdot f(x)$; частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі при $x \to x_0$, то їх добуток теж є нескінченно великою.

3) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі одного знаку при $x \to x_0$, то їх сума теж є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими:

1) Якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ – нескінченно велика функція, то функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

2) Якщо при $x \to x_0$ функція $\alpha(x)$ нескінченно мала і не перетворюється в нуль, то функція $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

1º (арифметичні властивості границь).

Якщо існують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

зокрема,

$$\lim_{x\to x_0}\left[c \cdot g(x)\right] = c \lim_{x\to x_0} g(x);$$

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

2º (границя суперпозиції функцій).

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ та $\lim\limits_{t\to a} f(t) = A$, то існує також границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$. Дану рівність можна записати також у вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to a} f(y)$. На цій формулі грунтується обчислення границь методом заміни змінної, якщо покласти $y = g(x)$.

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f\ x$, то (див. підрозділ 5)

$$\lim_{x\to x_0} f\ x = f\ x_0\ . \qquad (1)$$

Більш загально: якщо $\lim_{x\to x_0} g\ x = a$, де a належить області визначення елементарної функції f, то

$$\lim_{x\to x_0} f\ g\ x\ = a\ \lim_{x\to x_0} g\ x\ , \qquad (2)$$

де x_0 – число або один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Використовуються також границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*перша визначна* границя);

$\lim\limits_{x\to 0}\ 1+x\ ^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (*друга визначна* границя).

Знайти границі функцій.

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\ x^2-3x+2\ ;$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x+3}$.

⌜ а) Оскільки функція $f\ x\ =x^2-3x+2\ \left(D(f)=(-\infty,+\infty)\right)$ є елементарною, то для обчислення її границі можна застосувати властивість (1). Підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 2, одержимо

$$\lim_{x\to 2}\ x^2-3x+2\ =2^2-3\cdot 2+2=0\,.$$

б) Значення $x=-1$ належить області визначення функції $f\ x\ =\dfrac{x^2+2x}{x^2-x+3}$ (знаменник не дорівнює нулю при $x=-1$). Тому скористаємось формулою (1):

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x}{x^2-x+3}=\frac{-1\ ^2+2\ -1}{-1\ ^2-\ -1\ +3}=\frac{1-2}{1+1+3}=-\frac{1}{5}\,.\ \lrcorner$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

⌜ Скористатись формулою (1) у цьому випадку не можна, оскільки значення $x=1$ не належить області визначення функції $f\ x\ =\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Для знаходження заданої границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3-b^3=\ a-b\ \ a^2+ab+b^2\ $:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1\ \ x^2+x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\ x^2+x+1\ =1^2+1+1=3\,.\ \lrcorner$$

У розглянутому щойно прикладі чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 1$. У такому випадку кажуть, що має місце невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$.

Поряд з такою невизначеністю зустрічаються й інші, наприклад, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ тощо. Якщо при обчисленні границі виникає одна з невизначеностей, то процес обчислення границі називають ще *розкриттям невизначеності*. Зручно класифікувати границі в залежності від типу невизначеності і розглядати відповідні методи розкриття невизначеностей у вигляді правил.

Правило 1. *Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при* $x\to x_0$ *чисельник і знаменник прямують до нуля* (*невизначеність* $\dfrac{0}{0}$), *потрібно скоротити дріб на* $x-x_0$ *і перейти до границі.*

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$x^2\pm 2ax+a^2=\ x\pm a\ ^2\,; \qquad (a)$$

$$x^2-a^2=\ x-a\ \ x+a\ \ ; \qquad (в)$$

$$x^3\pm a^3=\ x\pm a\ \ x^2\mp ax+a^2 \qquad (c)$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2+bx+c=a\ \ x-x_1\ \ x-x_2\ \ , \qquad (d)$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

⌜ Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Скористаємось правилом 1, для чого спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\dfrac{3}{2}$. Тому за формулою (d):

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=(x-1)(2x+3).$$

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$. Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot 1+3}{7+6}=\frac{5}{7}.$$ ⌟

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

⌜ При $x=-2$ знаменник не дорівнює нулю. Тому за формулою (1):

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-2}=\frac{0}{4}=0,$$

тобто функція $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ є нескінченно малою при $x\to -2$. ⌟

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$.

⌜ При $x=3$ знаменник дробу дорівнює нулю. Тому властивістю (1) скористатись не можна. Але тут немає і невизначеності, оскільки чисельник дробу при $x=3$ дорівнює 10, тобто відмінний від нуля.

Ми вже перевірили, що знаменник дробу $\alpha(x)=x^2-2x-3$ є функцією нескінченно малою при $x\to 3$. Отже функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ є нескінченно великою, тобто $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\infty$. За формулою (1) існує $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)=3^2+1=10$. Тому за властивостями нескінченно великих

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 1}\left[(x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2-2x-3}\right]=\infty.$$ ⌟

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

⌜ При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Але розкрити її за правилом 1 немає можливості, оскільки чисельник дробу не є многочленом. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз $\sqrt{x+7}+3$, який є спряженим до чисельника. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Зауважимо, що при множенні на спряжений вираз, ми розкрили дужки лише в чисельнику, перемноживши взаємно спряжені вирази за допомогою формули скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. У знаменнику ж ми дужки не розкривали, щоб зберегти множник $(x-2)$, на який потрібно скоротити дріб для розкриття невизначеності. ⌟

Розглянутий нами прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 2. *Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при* $x \to x_0$ *чисельник і знаменник прямують до нуля* (*невизначеність* $\frac{0}{0}$), *потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на* $(x - x_0)$ *і перейти до границі.*

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

$\ulcorner$ При $x = 0$ чисельник та знаменник дорівнюють нулю. Дійсно $\sqrt{0^2+4}-2 = \sqrt{4}-2 = 2-2 = 0$, $\sqrt{0^2+9}-3 = \sqrt{9}-3 = 3-3 = 0$. Тому маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, зумовлену саме ірраціональними виразами. Скористаємось правилом 2 та помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжені вирази відповідно $\sqrt{x^2+4}+2$ і $\sqrt{x^2+9}+3$.

Одержимо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}^{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}_{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-3^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4-4}{x^2+9-9}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{\sqrt{0^2+9}+3}{\sqrt{0^2+4}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{2}. \ \lrcorner$$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right)$.

$\ulcorner$ Використовуючи властивості нескінченно великих, маємо:

$x^2 = x\cdot x$ – нескінченно велика при $x \to +\infty$, як добуток нескінченно великих;

$2x^2 = 2\cdot x^2$ – нескінченно велика при $x \to +\infty$, як добуток функції, що має границю на нескінченно велику;

$2x^2 + x$ – нескінченно велика при $x \to +\infty$, як сума двох нескінченно великих;

$2x^2 + x - 3 = \left(2x^2 + x\right) - 3$ – нескінченно велика при $x \to +\infty$, як сума нескінченно великої та функції, що має границю.

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right) = \infty$. $\lrcorner$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right)$.

$\ulcorner$ Оскільки $4x^2$ та x є нескінченно великими, то маємо випадок невизначеності типу $\infty - \infty$. Розкрити таку невизначеність можна шляхом запису функції $4x^2 - x$ у вигляді $4x^2 - x = x(4x-1)$. Одержали добуток двох нескінченно великих, отже

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right) = \infty. \ \lrcorner$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-x}$.

$\ulcorner$ Для обчислення цієї границі не можна застосувати правило (1). Арифметичну властивість про границю частки застосувати також не можна, оскільки не існує границь чисельника та знаменника. Дійсно (див. приклади 53, 54), при $x \to \infty$ чисельник та знаменник нескінченно великі. Тобто, ми маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2 і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{2+0-0}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

У ході розв'язання скористались тим, що $\frac{1}{x}$ та $\frac{3}{x^2}$ є нескінченно малими при $x\to\infty$ (див. властивості нескінченно малих). ⌟

Розглянутий нами щойно прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 3. *Для обчислення границі частки двох многочленів при* $x\to\infty$ (*невизначеність типу* $\frac{\infty}{\infty}$) *потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду* $\frac{a}{x^n}$ $\left(a\in R,\ n\in N\right)$ *при* $x\to\infty$ *є нескінченно малими.*

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$.

⌜ Оскільки при $x\to\infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, для розкриття якої скористаємось правилом 3: поділимо чисельник та знаменник на x^2 – найвищий степінь змінної:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0. \quad ⌟$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^2+4}$.

⌜ При $x\to\infty$ маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної x^3. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}.$$

Скористатись арифметичною властивістю про границю частки не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю, тобто функція $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}$ є нескінченно малою. Але тоді функція $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}$ є нескінченно великою. Границя чисельника дорівнює 2. Тому за властивістю нескінченно великих

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \infty. \quad ⌟$$

Узагальнення правила 3 на складніші випадки розглянемо на наступних прикладах.

Перейдемо до обчислення границь пов'язаних з першою визначною границею:

(I) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$.

⌜ При $x\to0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Обчислимо цю границю двома способами.

1) Використовуючи (I) та властивості границь 1º б), 2º, одержуємо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x} = 3\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot1 = 3.$$

2) Інший спосіб розв'язування цієї вправи ґрунтується на заміні змінної під знаком границі (див. властивість 2º).

Нехай $3x = y$. Тоді $y \to 0$ при $x \to 0$. Враховуючи, що $x = \frac{y}{3}$, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = \lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y} = 3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 3\cdot 1 = 3.$$

Ми скористались границею (I) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$, яка не залежить від позначення змінної, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$. ⌋

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

⌈ Зробимо заміну змінної $y = \arcsin x$, звідки $x = \sin y$ і $y \to 0$ при $x \to 0$. Тому, з урахуванням (I) та арифметичних властивостей границь, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$ ⌋

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

⌈ Скористаємось тим, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ та границею (I):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Ми скористались властивостями 1º границь та правилом (1), згідно з яким $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$. ⌋

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}$.

⌈ а) Аналогічно попередньому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x = \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 0 =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{5}{2}.$$

б) Використаємо формули $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ і $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ та перейдемо від границі добутку до добутку границь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{2\sin^2\frac{4x}{2}\cdot\cos 3x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{x\cdot 3x}{(2x)^2}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{4\cos 3x} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$ ⌋

Зауважимо, що при обчисленні границь від тригонометричних функцій не завжди виникає необхідність використовувати першу визначну границю. Переконаємось у цьому на наступних прикладах.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$.

⌜ а) Оскільки значення $x=0$ належить області визначення елементарної функції $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$, скористаємося правилом (1): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin 0}{\cos 0}=\dfrac{0}{1}=0$.

б) З графіка функції $y=\cos x$ (рис. 4) робимо висновок, що при $x\to\infty$ границя функції $\cos x$ не існує.

в) Подамо функцію $y=\dfrac{\cos x}{x}$ у вигляді добутку $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$. Скористатись властивістю границь і перейти від границі добутку до добутку границь не можна, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує (див. попередній приклад). Але, оскільки функція $y=\cos x$ обмежена ($|\cos x|\le 1,\ x\in R$), а функція $y=\dfrac{1}{x}$ – нескінченно мала при $x\to\infty$, то за властивістю 2) нескінченно малих функція $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$. Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$. ⌟

Розглянемо обчислення границь, пов'язаних з другою визначною границею

(II.1) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

(II.2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Записи другої визначної границі у вигляді (II.1) та (II.2) еквівалентні. У цьому можна переконатись, здійснивши підстановку $\dfrac{1}{x}=y$ у кожній з цих границь. При розв'язанні вправ, пов'язаних з другою визначною границею, нам знадобиться наступна формула (наслідок формули (2)):

якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$ *та* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}, \qquad (3)$$

де під x_0 *розуміємо число або один із символів* ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Розглянемо спочатку прості вправи, пов'язані з застосуванням формули (3).

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}2^{\frac{3x}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌜ а) $\lim\limits_{x\to 1}2^{\frac{3x}{x+2}}=\left[\lim\limits_{x\to 1}2\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x+2}}=2^{\frac{3\cdot 1}{1+2}}=2^{\frac{3}{3}}=2;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}3\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{x}}}=3^{\frac{2}{1}}=3^2=9.$ ⌟

19. $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌜ $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{2x}{x+3}}=\left[\lim\limits_{x\to 1}(3-x)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x+3}}=[3-1]^{\frac{2\cdot 1}{1+3}}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$ ⌟

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

⌜ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=$

$=\left(\dfrac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}}=2^2=4.$ ⌟

У подальшому не будемо щоразу робити заміну змінної у подібних випадках, а розумітимемо, що формули (II.1) та (II.2) виконуються і у випадку, коли у них під x розуміти довільну функцію, яка прямує відповідно до нуля чи до нескінченності при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e \quad \text{(II.1')} \quad \text{та} \quad \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad \text{(II.2')}.$$

Ці узагальнення формул (II.1) та (II.2) дістаємо на основі границі суперпозиції функцій (властивість 2º).

Наприклад, будемо писати

$\lim\limits_{x\to 1}\left(1+3\left(x-1\right)\right)^{\frac{1}{3(x-1)}}=e$ (оскільки $3\left(x-1\right)\to 0$ при $x\to 1$);

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}}=e$$

(оскільки $\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}=\dfrac{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\to\infty$ при $x\to\infty$) тощо.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}$.

⌜ Як і раніше, маємо невизначеність 1^{∞}. Перепишемо функцію, що стоїть під знаком границі так, щоб прийти до (II.2') і скористаємось формулою (2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot\frac{2}{-x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-x}{2}}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

Для побудови потрібного показника $\dfrac{-x}{2}$ ми помножили і поділили на нього показник функції x. Такий прийом у подальшому будемо використовувати часто. ⌟

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}$.

⌜ Знову маємо невизначеність 1^{∞}. Виділимо в основі цілу частину $\dfrac{2x+3}{2x+1}=\dfrac{(2x+1)+2}{2x+1}=1+\dfrac{2}{2x+1}$. Зауважимо, що для виділення цілої частини можна також скористатись діленням многочлена на многочлен. Але у випадку невизначеності 1^{∞} (коли відомо, що основа прямує до 1) зручним є формальний спосіб, який полягає у додаванні та відніманні 1. Проілюструємо його на нашому прикладі:

$$\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2x+3}{2x+1}-1=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=1+\frac{2x+3-(2x+1)}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отже, для того щоб можна було скористатись формулою (II.2'), показником степеня має бути вираз $\dfrac{2x+1}{2}$ (обернений до $\dfrac{2}{2x+1}$). Тому помножимо і поділимо показник $x-3$ на $\dfrac{2x+1}{2}$ (від цього вираз $x-3$ не зміниться). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^{1}=e.$$

При знаходженні границі основи скористались формулою (II.2'), а при обчисленні границі показника – правилом 3.

Розглянемо інший спосіб розв'язання цієї вправи. Поділимо чисельник та знаменник дробу на $2x$ і одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x-3}}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x-3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x \left(1+\frac{1}{2x}\right)^3}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^3 \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^3}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^3 \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{1\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = e^1 = e\,.$$

Оскільки перший спосіб є більш стандартним, його ми і будемо використовувати у подальшому. ⌋

23. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}}$.

⌈ При $x\to 3$: $(2x-5)\to 1$, $\frac{x}{x^2-9}\to\infty$. Тому подамо основу у вигляді $1+f(x)$:

$$2x-5 = 1+(2x-5)-1 = 1+(2x-5-1) = 1+(2x-6) = 1+2(x-3).$$

Зауважимо, що $2(x-3)\to 0$ при $x\to 3$. Перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було використати формулу (II.1'). Враховуючи формулу (3), одержимо:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x^2-9}} = \lim_{x\to 3}\left[\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\frac{2(x-3)\cdot x}{x^2-9}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 3}\left(1+2(x-3)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x+3}} = e^{\frac{2\cdot 3}{3+3}} = e^1 = e\,. \quad ⌋$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

1. За допомогою властивості (1) знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{2-x}}$.

2. Знайти границі, використовуючи правило 1:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-3}{x^3+x-2}$.

3. Використовуючи властивості нескінченно малих та нескінченно великих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}$.

4. Знайти границі за допомогою правила 2:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{12+x}-3}{1-\sqrt{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2-\sqrt{x^2+4}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+4}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+2x}{x^3+x^2+4}$.

За допомогою першої та другої визначних границь знайти границі:

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$. **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} ax}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-\cos^5 x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{arctg} 3x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 7x$.

12. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{\frac{x-3}{2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{\frac{3x-1}{x+2}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+5}\right)^{2x+5}$.

16. 105. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2x}\right)^{x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{4}{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)^{\frac{1}{x-1}}$.