Неперервність функції

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

тобто границя функції у точці співпадає зі значенням функції в цій точці.

Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x$ (*приріст аргументу*) та $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ (*приріст функції*), то умову неперервності можна записати у вигляді

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (відрізка), то вона називається *неперервною на* цьому *інтервалі* (*відрізку*).

Якщо функція не є неперервною у точці x_0, то її називають *розривною* у цій точці, а саму точку x_0 називають *точкою розриву*.

Нехай x_0 – точка розриву функції $f(x)$. Якщо існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, то x_0 називають точкою розриву *першого роду* ($x \to x_0 - 0$ означає, що $x \to x_0$ і $x < x_0$; $x \to x_0 + 0$ означає, що $x \to x_0$ і $x > x_0$).

Точки розриву першого роду поділяють на точки *усувного* розриву (коли $f(x_0-0) = f(x_0+0)$) та точки *неусувного* розриву або точки стрибка (коли $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$). *Стрибком* функції в точці x_0 у випадку неусувного розриву називають різницю $f(x_0+0) - f(x_0-0)$.

Зауважимо, що існування границі функції $f\ x$ в точці x_0 рівносильне умові $f\ x_0 - 0 = f\ x_0 + 0$.

Точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називають точками розриву *другого роду*.

Сума, різниця та добуток скінченного числа неперервних функцій є неперервною функцією. Частка двох неперервних функцій є неперервною функцією у тих точках, де знаменник не дорівнює нулю.

З означення неперервності функції в точці та властивостей границь випливає, що кожна елементарна функція неперервна у довільній точці своєї області визначення. Цей факт будемо використовувати при дослідженні функцій на неперервність.

136. Довести, що при $x = 3$ функція $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

⌜ При $x = 3$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо: $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x+1}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x+1}{x-3} = +\infty$. Отже, функція при $x \to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x = 3$ є точкою розриву другого роду. ⌟

137. Дослідити функцію $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}$ на неперервність.

⌜ Функція $y = \operatorname{arctg} t$ є основною елементарною функцією з областю визначення $t \in (-\infty, +\infty)$. Функція $t = \dfrac{1}{z} = z^{-1}$ також елементарна і визначена при $z \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, тобто $z \neq 0$. Але функція $z = x - 2$ також елементарна і визначена при $x \in (-\infty, +\infty)$. Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}$, є точка $x = 2$. Тому $x = 2$ є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При $x \to 2-0$ маємо $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{\pi}{2}$. При $x \to 2+0$ маємо $\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{\pi}{2}$. Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому $x = 2$ є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком $f(2+0) - f(2-0) = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Ми скористались графіком функції $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5) для встановлення того, що $\operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ та $\operatorname{arctg} x \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$. ⌟

138. З'ясувати характер розриву функції $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ в точці $x = 2$.

⌜ При $x=2$ функція не визначена. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$, то функція y має в точці $x=2$ усувний розрив. ⌟

139. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

⌜ При $x=1$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі функції при $x\to 1$.

Якщо $x\to 1-0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=0$.

Якщо $x\to 1+0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to +\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці $x=1$ має розрив другого роду.

При обчисленні односторонніх границь у цій вправі зручно використати схематичний графік функції $y=2^x$ (рис. 20), з якого:

якщо $x\to+\infty$, то $2^x\to+\infty$;

якщо $x\to-\infty$, то $2^x\to 0$. ⌟

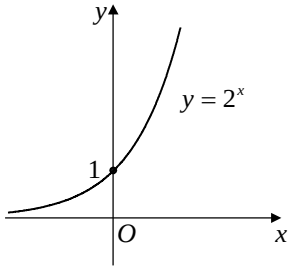


Рис. 20

140. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$ та дослідити їх характер.

⌜ Область визначення функції визначається системою нерівностей $\begin{cases}x-2\neq 0,\\ 2^{\frac{1}{x-2}}+1\neq 0,\end{cases}$ звідки $x\neq 2$.

Значення $x=2$ не належить області визначення функції. Отже, в цій точці функція має розрив.

Дослідимо характер розриву функції у точці $x=2$. Розглянемо односторонні границі.

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$ при $x\to 2-0$, то $\lim\limits_{x\to 2-0}2^{\frac{1}{x-2}}=0$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=-1$.

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to+\infty$ при $x\to 2+0$, то $2^{\frac{1}{x-2}}\to+\infty$ і тому $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}\to 0$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}=1$.

Отже, функція має у точці $x=2$ неусувний розрив першого роду зі стрибком $f(2+0)-f(2-0)=1-(-1)=2$. ⌟

141. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\le 0,\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2, & \text{якщо } x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

⌜ Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x\in(-\infty,+\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y=x$, $y=\sin x$ та $y=2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty,0]$, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви функція $f(x)$ може мати лише у точках $x_1=0$ та $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Розглянемо $x_1=0$:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} x = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \sin x = 0$,

$f(0) = 0$.

Оскільки $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то функція неперервна у точці $x_1 = 0$.

Розглянемо $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$:

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2$,

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

Оскільки $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right) \neq f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)$, то функція $f(x)$ має у точці $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ неусувний розрив першого роду зі стрибком

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2-1 = 1.$$

Схематичний графік функції $f(x)$ наведено на рис. 21. ⌟

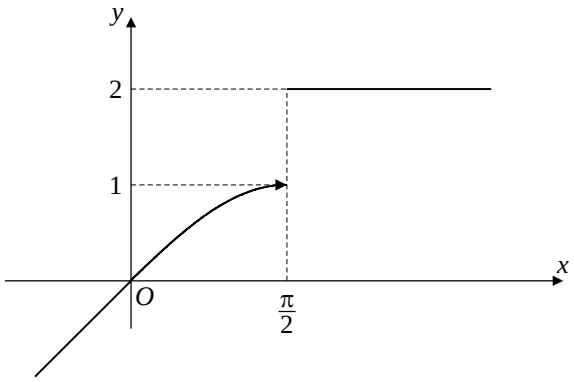


Рис. 21

Вправи для самостійного розв'язання

142. Довести, що при $x = 5$ функція $y = \dfrac{x}{5-x}$ має розрив.

143. З'ясувати характер розриву функції $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x = 1$.

144. З'ясувати характер розриву функції $y = \dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x = 0$.

145. Дослідити функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ на неперервність.

146. Дослідити функцію $y = 4^{\frac{2}{x-3}}$ на неперервність.

147. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3-8}{x-2}$ на неперервність.

148. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

149. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}1+\operatorname{tg} x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ \cos x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

150. При якому значенні a функція $f(x)=\begin{cases}x-a, & \text{якщо } x<1,\\ 2x+1, & \text{якщо } x\ge 1\end{cases}$ буде неперервною при $x\in(-\infty,+\infty)$?