Площина у просторі

Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad 14$$

У прямокутній декартовій системі координат площина 14 перпендикулярна вектору $\vec{n} = A;B;C$, який називається *нормальним вектором* площини.

б) *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0\ x_0;y_0;z_0$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n} = A;B;C$

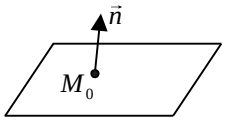


Рис. 12

$$A\ x - x_0\ + B\ y - y_0\ + C\ z - z_0\ = 0 . \qquad 15$$

в) *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0\ x_0;y_0;z_0$ *паралельно неколінеарним векторам* $\vec{s}_1 = l_1;m_1;n_1$ *і* $\vec{s}_2 = l_2;m_2;n_2$

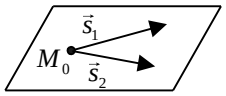


Рис. 13

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 . \qquad 16$$

г) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1\ x_1;y_1;z_1$ *і* $M_2\ x_2;y_2;z_2$ *паралельно вектору* $\vec{s} = l;m;n$

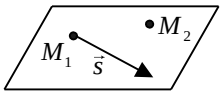


Рис. 14

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 . \qquad 17$$

д) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1\ x_1;y_1;z_1$, $M_2\ x_2;y_2;z_2$ *і* $M_3\ x_3;y_3;z_3$

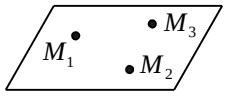


Рис. 15

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad 18$$

Один з кутів φ між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ знаходиться як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = A_1;B_1;C_1$ і $\vec{n}_2 = A_2;B_2;C_2$ з формули

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \qquad 19$$

Умова перпендикулярності площин – перпендикулярність їх нормальних векторів $\vec{n}_1 = A_1;B_1;C_1$ і $\vec{n}_2 = A_2;B_2;C_2$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 . \qquad 20$$

Умова паралельності площин – паралельність їх нормальних векторів:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad 21$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

Відстань d від точки $M_0\ x_0;y_0;z_0$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad 22$$

41. Визначити, які з точок $M_1\ 2;4;-1$, $M_2\ 3;-1;0$, $M_3\ -1;7;2$ лежать на площині $2x-y+3z+3=0$.

Для розв'язання даної задачі підставимо координати заданих точок в рівняння площини. $M_1\ 2;4;-1$: $2\cdot 2-4+3\cdot\ -1\ +3=0$. Точка M_1 лежить на площині. $M_2\ 3;-1;0$: $2\cdot 3-\ -1\ +3\cdot 0+3\neq 0$. Точка M_2 не лежить на площині. $M_3\ -1;7;2$: $2\cdot\ -1\ -7+3\cdot 2+3=0$. Точка M_3 лежить на площині.

42. На площині $4x+5y-3z+5=0$ знайти точку, якщо відомі дві її координати: $x=3$, $z=-1$.

Координату y знайдемо з рівняння площини, підставивши в це рівняння відомі координати:

$$4\cdot 3+5\cdot y-3\cdot\ -1\ +5=0,\ 12+5y+3+5=0,\ 5y=-20,\ y=-4.$$

Отже, координати шуканої точки $3;-4;-1$.

43. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\ 3;-1;2$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\ 2;4;-3$.

Рівняння площини має вигляд 15 :

$$2\ x-3\ +4\ y-\ -1\ +\ -3\ \ z-2\ =0,$$
$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$
$$2x+4y-3z+4=0.$$

44. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\ 1;4;-3$ паралельно векторам $\vec{s}_1=\ 2;-3;-1$, $\vec{s}_2=\ -3;2;0$.

Рівняння площини має вигляд 16 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-\ -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник:

$$x-1\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\ y-4\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{vmatrix}+\ z+3\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$x-1\ \ -3\cdot 0-\ -1\cdot 2\ -\ y-4\ \ 2\cdot 0-\ -1\ \ -3\ \ +\ z+3\ \ 2\cdot 2-\ -3\cdot\ -3\ \ =0,\ 2\ x-1\ +3\ y-4\ -5\ z+3\ =0,$$
$$2x-2+3y-12-5z-15=0,$$

або, остаточно, шукане рівняння площини – $2x+3y-5z-29=0$.

45. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1\ 2;4;-1$ і $M_2\ 3;1;2$ паралельно вектору $\vec{s}=\ -1;-3;2$.

Рівняння має вигляд 17 :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3-2 & 1-4 & 2+1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-2\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\ y-4\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\ z+1\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & -3\end{vmatrix}=0,$$

$$x-2\ \ -3\cdot 2-3\cdot\ -3\ \ -\ y-4\ \ 1\cdot 2-3\cdot\ -1\ \ +\ z+1\ \ 1\cdot\ -3\ -\ -3\ \cdot\ -1\ \ =0,\ 3\ x-2\ -5\ y-4\ -6\ z+1\ =0,$$

$$3x-6-5y+20-6z-6=0,$$

або остаточно маємо $3x-5y-6z+8=0$. ⌋

46. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1\ 2;-2;1$, $M_2\ 1;3;2$, $M_3\ -1;1;3$.

⌈ Рівняння площини має вигляд 18 :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1-2 & 3+2 & 2-1 \\ -1-2 & 1+2 & 3-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-\ y+2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+\ z-1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-2\ \ 5\cdot 2-3\cdot 1\ -\ y+2\ \ -1\cdot 2-1\cdot\ -3\ \ +\ z-1\ \ -1\cdot 3-5\cdot\ -3\ \ =0,$$

$$7\ x-2\ -\ y+2\ +12\ z-1\ =0,$$

$$7x-14-y-2+12z-12=0,$$

або остаточно маємо $7x-y+12z-28=0$. ⌋

47. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\ 3;-2;2$ паралельно площині $2x-2y+5z+4=0$.

⌈ Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\ 2;-2;5$ (див. пункт а)). Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд 15 :

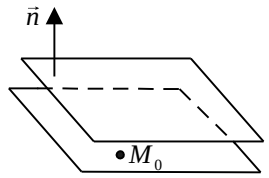


Рис. 16

$$2\ x-3\ -2\ y-\ -2\ \ +5\ z-2\ =0,$$

$$2x-6-2y-4+5z-10=0,$$

або $2x-2y+5z-20=0$. ⌋

48. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\ 4;1;-1$ перпендикулярно до площин $2x+2y-3z+2=0$ та $3x+y+2z+3=0$.

⌈ Згідно з пунктом а) перша з даних площин перпендикулярна до вектора $\vec{n}_1=\ 2;2;-3$, а друга – до $\vec{n}_2=\ 3;1;2$.

Шукана площина буде перпендикулярна до даних площин і тому паралельна до векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Її рівняння буде мати вигляд 16 :

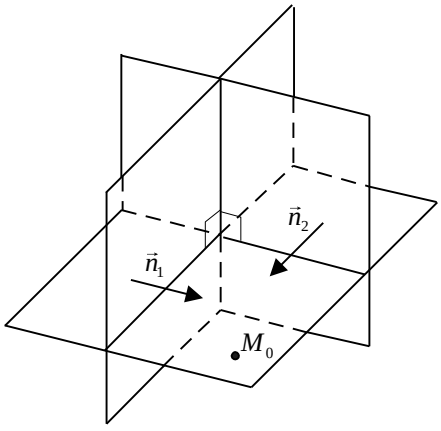


Рис. 17

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\ y-1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+\ z+1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x-4\ \ 2\cdot 2-\ -3\ \cdot 1\ -\ y-1\ \ 2\cdot 2-3\cdot\ -3\ \ +\ z+1\ \ 2\cdot 1-2\cdot 3\ =0,$$

$$7\ x-4\ -13\ y-1\ -4\ z+1\ =0,$$

$$7x-28-13y+13-4z-4=0,$$

або остаточно маємо $7x-13y-4z-19=0$. ⌋

Зауваження. Перевірити правильність знайденого рівняння площини можна переконавшись, що координати точки M_0 задовольняють його: $7\cdot 4-13\cdot 1-4\cdot\ -1\ -19=0$, і що нормальний вектор цієї площини $\vec{n}=\ 7;-13;-4$ перпендикулярний до $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}=2\cdot 7+2\cdot\ -13\ +\ -3\ \cdot\ -4\ =0,\ \ \vec{n}_2\cdot\vec{n}=3\cdot 7+1\cdot\ -13\ +2\cdot\ -4\ =0.$$

Подібним чином можна перевірити і відповіді задач **44** – **46**.

49. Знайти кут між площинами $4x-2y-4z+3=0$ і $3x+6y+2z+7=0$.

⌈ Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=\ 4;-2;-4$ і $\vec{n}_2=\ 3;6;2$. Кут знаходимо з формули 19 :

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 3+\ -2\ \cdot 6+\ -4\ \cdot 2}{\sqrt{4^2+\ -2\ ^2+\ -4\ ^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\frac{12-12-8}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}}=\frac{-8}{6\cdot 7}=\frac{-4}{21},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{21}\right). \quad \lrcorner$$

50. Перевірити, чи паралельні площини

а) $3x+2y-4z+7=0$ і $-6x-4y+8z+1=0$;

б) $2x+5y-3z+1=0$ і $4x+10y+z-3=0$.

$\ulcorner$ Використаємо умову 21 .

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = 3;2;-4$, $\vec{n}_2 = -6;-4;8$. Так як $\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8}$, то площини паралельні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = 2;5;-3$, $\vec{n}_2 = 4;10;1$. Так як $\frac{2}{4}=\frac{5}{10}\neq\frac{-3}{1}$, то площини не паралельні. $\lrcorner$

51. Перевірити, чи перпендикулярні площини

а) $4x-3y+5z-1=0$ і $2x+5y+z-3=0$;

б) $3x+y-9z+7=0$ і $4x+6y+z-3=0$.

$\ulcorner$ Використаємо умову 20 .

а) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = 4;-3;5$, $\vec{n}_2 = 2;5;1$. Так як $4\cdot 2+\ -3\ \cdot 5+5\cdot 1\neq 0$, то площини не перпендикулярні.

б) Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = 3;1;-9$, $\vec{n}_2 = 4;6;2$. Так як $3\cdot 4+1\cdot 6+\ -9\ \cdot 2=0$, то площини перпендикулярні. $\lrcorner$

52. При яких значеннях A та C площини $3x+2y+Cz-7=0$ і $Ax+4y-8z+1=0$ паралельні?

$\ulcorner$ Для паралельності площин повинна виконуватись умова 21

$$\frac{3}{A}=\frac{2}{4}=\frac{C}{-8},\ \text{звідки}\ \begin{cases}\frac{3}{A}=\frac{2}{4}\\ \frac{2}{4}=\frac{C}{-8},\end{cases}\quad\begin{cases}A=6\\ C=-4.\end{cases}\quad\lrcorner$$

53. При яких значеннях C площини $3x+7y-5z+2=0$ і $2x+7y+Cz-3=0$ перпендикулярні?

$\ulcorner$ Використаємо умову 20 :

$$A_1=3,\ B_1=7,\ C_1=-5,\ A_2=2,\ B_2=7;$$
$$3\cdot 2+7\cdot 7+\ -5\ \cdot C=0,\ \text{звідки}\ -5C=-55,\ C=11.\quad\lrcorner$$

54. Знайти відстань від точки $M_0\ -2;-4;3$ до площини $2x-y+2z+3=0$.

$\ulcorner$ Відстань знаходиться за формулою 22 :

$$d=\frac{\left|2\cdot\ -2\ -\ -4\ +2\cdot 3+3\right|}{\sqrt{2^2+\ -1\ ^2+2^2}}=\frac{\left|-4+4+6+3\right|}{\sqrt{9}}=3.\quad\lrcorner$$

55. Знайти відстань між двома паралельними площинами $2x-y+2z+9=0$ і $-4x+2y-4z+21=0$.

$\ulcorner$ На одній з площин, наприклад, першій, виберемо довільну точку $M_0\ x_0;y_0;z_0$ і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай $x_0=z_0=0$. З першого рівняння знаходимо

$$2\cdot 0-y_0+2\cdot 0+9=0,\ y_0=9.$$

Отже, $M_0\ 0;9;0$. За формулою 22 знаходимо відстань від цієї точки до другої площини:

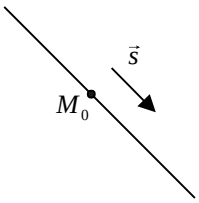
$$d=\frac{\left|-4\cdot 0+2\cdot 9-4\cdot 0+21\right|}{\sqrt{\ -4\ ^2+2^2+\ -4\ ^2}}=\frac{\left|0+18+0+21\right|}{\sqrt{36}}=\frac{39}{6}=6{,}5.$$

Отже, відстань між даними площинами $d=6{,}5$. $\lrcorner$

Пряма у просторі

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0\ x_0;y_0;z_0$ *паралельно вектору* $\vec{s}=\ l;m;n$, який називається *напрямним вектором* прямої:



$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad 23$$

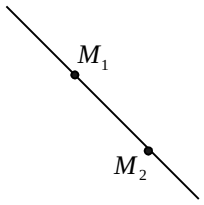
Рис. 18

Рівняння 23 називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt, \quad t\in R. \end{cases}$$

б) *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1\ x_1;y_1;z_1$ і $M_2\ x_2;y_2;z_2$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad 24$$

Рис. 19

У параметричній формі рівняння 24 мають вигляд

$$\begin{cases} x=x_1+\ x_2-x_1\ t \\ y=y_1+\ y_2-y_1\ t \\ z=z_1+\ z_2-z_1\ t, \quad t\in R. \end{cases}$$

в) Лінією перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ є пряма. *Загальними рівняннями* цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Відстань від точки P до прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}, \qquad 25$$

де $\vec{s}=\ l;m;n$ – напрямний вектор прямої, M_0 – будь-яка точка на прямій, наприклад точка з координатами $x_0;y_0;z_0$.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1=\ l_1;m_1;n_1$ і $\vec{s}_2=\ l_2;m_2;n_2$ з формули

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\ 2}+m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}}\sqrt{l_2^{\ 2}+m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}}}. \qquad 26$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться з формули

$$\sin\varphi=\frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad 27$$

71. Перевірити, які з точок $M_1\ 2;1;9$, $M_2\ -1;-5;3$, $M_3\ 8;7;3$ лежать на прямій $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

$\ulcorner$ Для розв'язання задачі підставимо координати даних точок в рівняння прямої.

$M_1\ 2;1;9$: $\dfrac{2-2}{3}\neq\dfrac{1+1}{4}\neq\dfrac{9-5}{-1}$. Точка M_1 не лежить на прямій.

$M_2\ -1;-5;3$: $\dfrac{-1-2}{3}=\dfrac{-5+1}{4}\neq\dfrac{3-5}{-1}$. Точка M_2 не лежить на прямій.

$M_3\ 8;7;3$: $\dfrac{8-2}{3}=\dfrac{7+1}{4}=\dfrac{3-5}{-1}$. Точка M_3 лежить на даній прямій. $\lrcorner$

72. На прямій $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+3}{5}$ знайти точку, у якої координата $z=7$.

$\ulcorner$ Підставивши відому координату в рівняння прямої, знаходимо дві інші координати:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{7+3}{5},\ \begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=2\\ \dfrac{y+1}{-2}=2,\end{cases}\ \begin{cases}x=10\\ y=-5.\end{cases}$$

Отже, шукана точка має координати $10;-5;7$. $\lrcorner$

73. Знайти точки перетину прямої $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-6}{3}$ з координатними площинами.

$\ulcorner$ Точка перетину прямої з площиною xOy (рівняння якої $z=0$) має координати $x;y;0$. Підставивши в рівняння прямої $z=0$, знайдемо значення x та y :

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{0-6}{3},\ \begin{cases}\dfrac{x-6}{2}=-2\\ \dfrac{y+1}{1}=-2,\end{cases}\ \begin{cases}x=2\\ y=-3.\end{cases}$$

Таким чином, точка перетину прямої з площиною xOy є $M_1\ 2;-3;0$.

Точка перетину з площиною xOz має координати $x;0;z$. З рівняння прямої знаходимо x та z :

$$\frac{x-6}{2}=\frac{0+1}{1}=\frac{z-6}{3},\ \begin{cases}\dfrac{x-6}{2}=1\\ \dfrac{z-6}{3}=1,\end{cases}\ \begin{cases}x=8\\ z=9.\end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною xOz є $M_2\ 8;0;9$.

Точка перетину з площиною yOz має координати $0;y;z$. Аналогічно

$$\frac{0-6}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-6}{3},\ \begin{cases}\dfrac{y+1}{1}=-3\\ \dfrac{z-6}{3}=-3,\end{cases}\ \begin{cases}y=-4\\ z=-3.\end{cases}$$

Отже, точка перетину прямої з площиною yOz є $M_3\ 0;-4;-3$. $\lrcorner$

74. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\ 2;-3;1$ паралельно вектору $\vec{s}=\ 4;3;-2$.

$\ulcorner$ Канонічні рівняння мають вигляд 23 :

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}=t,\ \begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=t,\\ \dfrac{y+3}{3}=t\\ \dfrac{z-1}{-2}=t,\end{cases}$$

звідки маємо рівняння прямої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - 2t, \ \ t \in R. \end{cases} \lrcorner$$

75. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1\ 4;-2;-1$ і $M_2\ 3;2;2$.

$\ulcorner$ Рівняння прямої мають вигляд 24 :

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y+2}{2+2} = \frac{z+1}{2+1}, \text{ або } \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}.$$

Знайдемо параметричні рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3} = t;$$

$$\frac{x-4}{-1} = t,\ x = 4 - t;\ \frac{y+2}{4} = t,\ y = -2 + 4t;\ \frac{z+1}{3} = t,\ z = -1 + 3t.$$

Отже, $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + 3t, \ \ t \in R. \end{cases}$ – рівняння прямої у параметричній формі. $\lrcorner$

76. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + 3z + 13 = 0. \end{cases}$$

Знайти на цій прямій точку, у якої координата $x = 3$.

$\ulcorner$ Підставимо відому координату в загальні рівняння:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 3y + 2z - 4 = 0 \\ 3 + 2y + 3z + 13 = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи знаходимо координати y і z шуканої точки:

$$\begin{cases} -3y + 2z = -2 \\ 2y + 3z = -16; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -16 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - \ -16\ \cdot 2 = 26,\ y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{-13} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = -3 \cdot\ -16\ - 2 \cdot\ -2\ = 52,\ z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{-13} = -4.$$

Отже, координати шуканої точки $3;-2;-4$. $\lrcorner$

77. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 11 = 0 \\ 3x + 2y + z - 17 = 0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

$\ulcorner$ За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\vec{n}_1 = \ 2;1;-3\ $ і $\vec{n}_2 = \ 3;2;1\ $:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \ 1 \cdot 1 - \ -3\ \cdot 2\ \vec{i} - \ 2 \cdot 1 - \ -3\ \cdot 3\ \vec{j} + \ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3\ \vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, напрямний вектор $\vec{s} = (7;-11;1)$. $\lrcorner$

78. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

$\ulcorner$ Знаходимо на прямій довільну точку M_0, наприклад точку з координатою $x = 0$. Підставивши це значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3\cdot 0 + y - 2z + 3 = 0 \\ 0 + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо координати y та z:

$$\begin{cases} y - 2z = -3 \\ 2y + 3z = 8; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - \ -2\ \cdot 2 = 7;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 - \ -2\ \cdot 8 = 7,\ y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot\ -3\ = 14,\ z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

Отже, точка $M_0\ 0;1;2$ лежить на прямій.

Знаходимо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = 3;1;-2$, $\vec{n}_2 = 1;2;3$. Їх векторний добуток

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= 1\cdot 3 - \ -2\ \cdot 2\ \vec{i} - \ 3\cdot 3 - \ -2\ \cdot 1\ \vec{j} + \ 3\cdot 2 - 1\cdot 1\ \vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}.$$

За знайденими точкою $M_0\ 0;1;2$ та напрямним вектором $\vec{s} = \ 7;-11;5$ запишемо канонічні рівняння прямої 23:

$$\frac{x}{7} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-2}{5}. \quad \lrcorner$$

79. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$ і площини $2x + 4y + 3z - 8 = 0$.

$\ulcorner$ Знайдемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1} = t;$$

$$\frac{x-2}{3} = t,\ x = 2 + 3t;\ \frac{y-1}{-2} = t,\ y = 1 - 2t;\ \frac{z+1}{1} = t,\ z = -1 + t.$$

Знайдені рівняння

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

підставляємо в рівняння площини і знаходимо параметр точки перетину:

$$2\ 2 + 3t\ + 4\ 1 - 2t\ + 3\ -1 + t\ - 8 = 0,$$

$$4 + 6t + 4 - 8t - 3 + 3t - 8 = 0,\ \text{звідки}\ \ t = 3.$$

Координати точки перетину знаходяться з параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cdot 3 = 11 \\ y = 1 - 2\cdot 3 = -5 \\ z = -1 + 3 = 2. \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M\ 11;-5;2$. $\lrcorner$

80. Знайти проекцію точки $P\ 8;-1;7$ на площину $3x - 2y + 4z + 4 = 0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

⌜ Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора площини $\vec{n} = 3;-2;4$ і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд 23 :

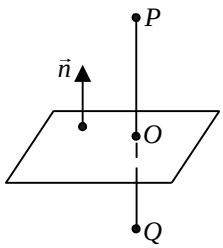


Рис. 20

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}.$$

Проекцію точки P знаходимо як точку перетину прямої PO і заданої площини. Для цього спочатку записуємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-7}{4}=t;$$

$$\frac{x-8}{3}=t,\ x=8+3t;\ \frac{y+1}{-2}=t,\ y=-1-2t;\ \frac{z-7}{4}=t,\ z=7+4t.$$

Знайдені параметричні рівняння $\begin{cases} x=8+3t \\ y=-1-2t \\ z=7+4t \end{cases}$ підставляємо в рівняння площини:

$$3\ 8+3t\ -2\ -1-2t\ +4\ 7+4t\ +4=0,$$

$$24+9t+2+4t+28+16t+4=0,$$

$$58+29t=0.$$

Звідси, $t=-2$ – параметр точки перетину. Знаходимо її координати

$$\begin{cases} x=8+3\cdot\ -2\ =2 \\ y=-1-2\cdot\ -2\ =3 \\ z=7+4\cdot\ -2\ =-1. \end{cases}$$

Таким чином, проекція – точка $O\ 2;3;-1$.

Нехай Q – точка, симетрична точці P відносно даної площини. Тоді точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O=\frac{x_P+x_Q}{2},\ y_O=\frac{y_P+y_Q}{2},\ z_O=\frac{z_P+z_Q}{2},\ \text{звідки знаходимо}$$

$$x_Q=2x_O-x_P,\ y_Q=2y_O-y_P,\ z_Q=2z_O-z_P.$$

Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q=2\cdot 2-8=-4,\ y_Q=2\cdot 3-\ -1\ =7,\ z_Q=2\cdot\ -1\ -7=-9.$$

Отже, координати симетричної точки $Q\ -4;7;-9$. ⌟

81. Знайти проекцію точки $P\ 2;4;15$ на пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{4}$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

⌜ Через точку P проведемо площину, перпендикулярну до заданої прямої, тобто до її напрямного вектора $\vec{s} = 3;-2;4$. Рівняння площини має вигляд 15 :

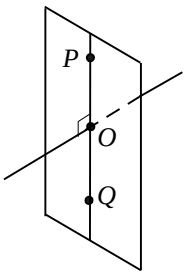


Рис. 21

$$3\ x-2\ -2\ y-4\ +4\ z-15\ =0,$$

$$3x-6-2y+8+4z-60=0,$$

$$3x-2y+4z-58=0.$$

Точка O перетину цієї площини і даної прямої буде проекцією точки P, оскільки пряма PO перпендикулярна до даної прямої. Для знаходження точки перетину запишемо рівняння даної прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{4}=t;\ \frac{x-2}{3}=t,\ x=2+3t;\ \frac{y+1}{-2}=t,\ y=-1-2t;\ \frac{z+2}{4}=t,\ z=-2+4t;$$

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+4t. \end{cases}$$

Знайдені параметричні рівняння даної прямої підставляємо у рівняння площини:

$$3\ 2+3t\ -2\ -1-2t\ +4\ -2+4t\ -58=0,$$

$$6+9t+2+4t-8+16t-58=0,\ 29t-58=0.$$

$t=2$ – параметр точки перетину, її координати знаходимо з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x=2+3\cdot 2=8 \\ y=-1-2\cdot 2=-5 \\ z=-2+4\cdot 2=6. \end{cases}$$

Отже, проекція точки P – точка $O\ 8;-5;6$.

Якщо Q – точка, симетрична точці P відносно даної прямої, то точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_O = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_O = \frac{z_P + z_Q}{2},$$

звідки знаходимо $x_Q = 2x_O - x_P,\ y_Q = 2y_O - y_P,\ z_Q = 2z_O - z_P$.

Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2\cdot 8 - 2 = 14,\ y_Q = 2\cdot\ -5\ -4 = -14,\ z_Q = 2\cdot 6 - 15 = -3.$$

Таким чином, координати симетричної точки $Q\ 14;-14;-3$. ⌟

82. Знайти відстань від точки $P\ 2;-1;0$ до прямої $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

⌜ Використаємо формулу 25 .

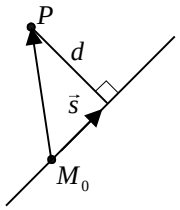


Рис. 22

$M_0\ 7;1;3$, $\vec{s} = 3;4;2$, $\overrightarrow{M_0P} = -5;-2;-3$.

$$\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= -2\cdot 2 - -3\cdot 4\ \vec{i} - -5\cdot 2 - -3\cdot 3\ \vec{j} +$$

$$+\ -5\cdot 4 - -2\cdot 3\ \vec{k} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k} = 8;1;-14 .$$

$$\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right| = \sqrt{8^2 + 1^2 + -14^{\ 2}} = \sqrt{64+1+196} = \sqrt{261},\ |\vec{s}| = \sqrt{3^2+4^2+2^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29};$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{261}{29}} = \sqrt{9} = 3 .$$ ⌟

83. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$ і

$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{6}$.

⌜ За формулою 26 знаходимо кут між напрямними векторами $\vec{s}_1 = 2;-1;1$ і $\vec{s}_2 = 3;-2;6$ даних прямих:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + -1\cdot -2 + 1\cdot 6}{\sqrt{2^2 + -1^{\ 2} + 1^2}\sqrt{3^2 + -2^{\ 2} + 6^2}} = \frac{14}{\sqrt{6}\cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

звідки $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$. ⌟

84. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$ і площиною $x - y + z + 7 = 0$.

⌜ $A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ l = 5,\ m = 1,\ n = 1$. За формулою 27 знаходимо

$$\sin\alpha = \frac{\left|1\cdot 5 + -1\cdot 1 + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{5^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2 + -1^{\ 2} + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9},$$

звідки $\alpha = \arcsin\frac{5}{9}$. ⌟