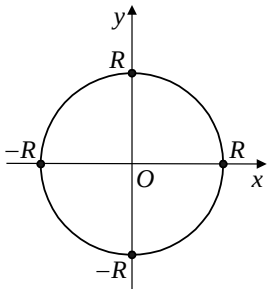
Криві другого порядку

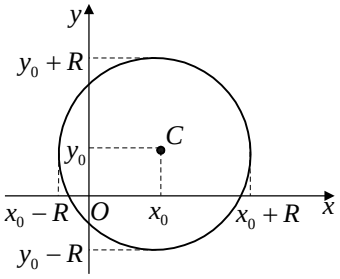
Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R (*канонічне рівняння кола*)



$$x^2 + y^2 = R^2 . \qquad (28)$$

Рис. 23

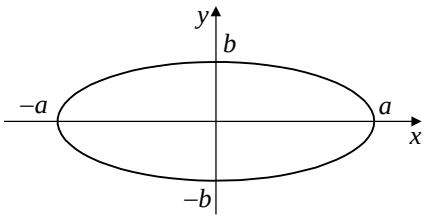
Рівняння кола з центром у точці $C\ x_0; y_0$ і радіусом R



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 . \qquad (29)$$

Рис. 24

Рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який має півосі a *та* b (*канонічне рівняння еліпса*)

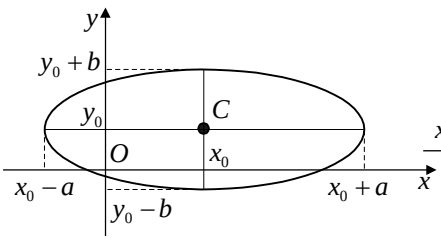


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (30)$$

Рис. 25

(a *– велика піввісь,* b *– мала піввісь*).

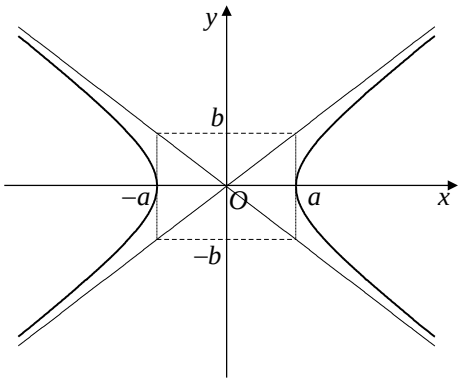
Рівняння еліпса, осі якого паралельні осям координат і який має півосі a та b і центр у точці $C\ x_0; y_0$



$$\frac{x - x_0}{a^2}^2 + \frac{y - y_0}{b^2}^2 = 1 . \qquad (31)$$

Рис. 26

Рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка має півосі a *та* b (*канонічне рівняння гіперболи*)

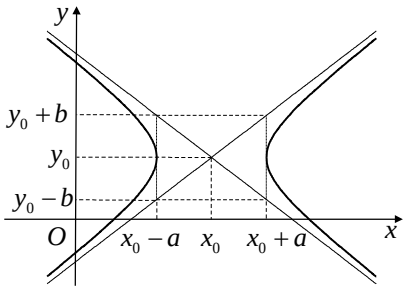


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad 32$$

Рис. 27

(a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь).

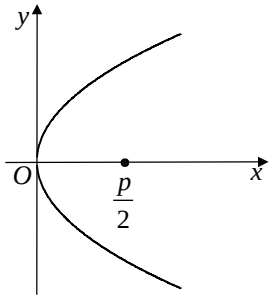
Рівняння гіперболи, осі якої паралельні осям координат і яка має півосі a та b і центр в точці $C\ x_0; y_0$



$$\frac{x-x_0}{a^2}^2-\frac{y-y_0}{b^2}^2=1. \qquad 33$$

Рис. 28

Рівняння параболи з вершиною в початку координат і віссю, яка співпадає з додатною піввіссю Ox

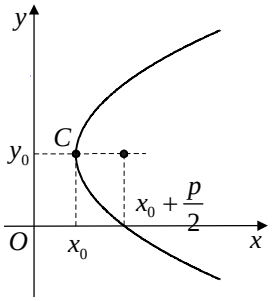


$$y^2=2px, \qquad 34$$

Рис. 29

де p – параметр параболи.

Якщо вершина параболи має координати $C\ x_0; y_0$, а вісь паралельна до осі Ox, то рівняння параболи має вигляд



$$y - y_0\ ^2 = 2p\ x - x_0\ . \qquad 35$$

Рис. 30

99. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

$\ulcorner$ Перетворимо дане рівняння до виду 29 , виділивши повні квадрати з x та y:

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0\,,\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 4 = 0\,,$$

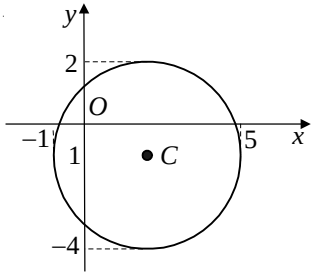


Рис. 31

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 4 = 0\,,$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9\,.$$

Порівнюючи отримане рівняння з рівнянням 29 , знаходимо $R^2 = 9$, $R = 3$ – радіус кола,

$C\ 2;-1\ $ – центр кола. $\lrcorner$

100. Знайти рівняння кола, якщо його центр має координати $C\ 2;3\ $ і коло проходить через точку $M\ 5;-1\ $.

$\ulcorner$ Рівняння кола має вигляд 29 : $x-2\ ^2 + \ y-3\ ^2 = R^2$. Значення R^2 знайдемо з умови, що коло проходить через точку M: $5-2\ ^2 + \ -1-3\ ^2 = R^2$, $R^2 = 3^2 + \ -4\ ^2$, $R^2 = 25$. Отже, рівняння кола

$$x-2\ ^2 + \ y-3\ ^2 = 25\,.\ \lrcorner$$

Зауваження. Радіус кола можна знайти як відстань між центром C і точкою M:

$$R = CM = \sqrt{x_C - x_M\ ^2 + \ y_C - y_M\ ^2} = \sqrt{2-5\ ^2 + \ 3-\ -1\ ^2} = 5\,.$$

101. Знайти рівняння кола, якщо точки $A\ 4;7\ $ і $B\ 10;-1\ $ є кінцями одного з його діаметрів.

$\ulcorner$ Центр кола – точка C є серединою відрізка AB:

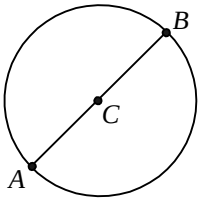


Рис. 32

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}\,,\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2}\,;$$

$$x_C = \frac{4+10}{2} = 7\,,\ y_C = \frac{7+\ -1}{2} = 3\,.$$

Отже, $C(7;3)$.

Радіус кола

$$R = AC = \sqrt{x_A - x_C\ ^2 + \ y_A - y_C\ ^2} =$$

$$= \sqrt{4-7\ ^2 + \ 7-3\ ^2} = \sqrt{9+16} = 5\,.$$

За формулою (29) рівняння кола має вигляд $x-7\ ^2 + \ y-3\ ^2 = 25$. $\lrcorner$

102. Знайти рівняння еліпса, осі якого співпадають з осями координат і який проходить через точки $M_1\ 4;-\sqrt{3}\ $ і $M_2\ 2\sqrt{2};3\ $.

$\ulcorner$ Рівняння має вигляд 30 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Значення a^2 та b^2 знайдемо з умови, що координати точок $M_1\ 4;-\sqrt{3}\ $ і $M_2\ 2\sqrt{2};3\ $ задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{4^2}{a^2}+\dfrac{-\sqrt{3}^{\,2}}{b^2}=1 \\ \dfrac{2\sqrt{2}^{\,2}}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1 \\ \dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right) \\ \dfrac{8}{a^2}+9\cdot\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{16}{a^2}\right)=1, \end{cases}$$

$$\frac{8}{a^2}+3-\frac{48}{a^2}=1,\ -\frac{40}{a^2}=-2,\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{20},\ a^2=20;$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{3}\left(1-16\cdot\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15},\ b^2=15.$$

Отже, рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$. ⌋

103. Знайти координати центра і півосі еліпса, заданого рівнянням $16x^2-25y^2+32x-100y-284=0$.

⌈ Зведемо рівняння до виду 31 . Для цього виділимо в рівнянні повні квадрати з x та y:

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0,$$

$$16\ x^2+2x\ +25\ y^2-4y\ -284=0,$$

$$16\ x^2+2x+1^2-1^2\ +25\ y^2-4y+2^2-2^2\ -284=0,$$

$$16\ x+1^{\,2}-16+25\ y-2^{\,2}-100-284=0,$$

$$16\ x+1^{\,2}+25\ y-2^{\,2}=400,$$

$$\frac{x+1^{\,2}}{25}+\frac{y-2^{\,2}}{16}=1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з 31 , знаходимо координати центра $x_0=-1$, $y_0=2$ і півосі $a=5$, $b=4$. ⌋

104. Знайти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат і яка проходить через точки $M_1\ 6;-1$ і $M_2\ -8;2\sqrt{2}$.

⌈ Рівняння буде мати вигляд 32 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Координати точок M_1 та M_2 задовольняють це рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{6^2}{a^2}-\dfrac{-1^{\,2}}{b^2}=1 \\ \dfrac{-8^{\,2}}{a^2}-\dfrac{2\sqrt{2}^{\,2}}{b^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{36}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{64}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{36}{a^2}-1 \\ \dfrac{64}{a^2}-8\left(\dfrac{36}{a^2}-1\right)=1, \end{cases}$$

$$\frac{64}{a^2}-\frac{288}{a^2}+8=1,\ \frac{-224}{a^2}=-7,\ a^2=\frac{-224}{-7}=32.$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{36}{32}-1,\ \frac{1}{b^2}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8},\ b^2=8.$$

Отже, рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1$. ⌋

105. Знайти координати центра і півосі гіперболи, заданої рівнянням $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

⌈ Зведемо дане рівняння до виду 33 . Для цього виділимо повні квадрати з x та y:

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0,$$

$$16x^2-64x-9y^2-54y-161=0,$$

$$16\ x^2-4x\ -9\ y^2+6y\ -161=0,$$

$$16\ x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2\ -9\ y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2\ -161=0,$$

$$16\ x-2^{\,2}-16\cdot 4-9\ y+3^{\,2}+9\cdot 9-161=0,$$

$$16\ x-2^{\,2}-9\ y+3^{\,2}=144,$$

$$\frac{x-2^{\,2}}{9}-\frac{y+3^{\,2}}{16}=1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з 33 , знаходимо координати центра $x_0=2$, $y_0=3$ і півосі $a=3$, $b=4$. ⌋

106. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox , і яка проходить через точку $M\ 2;-4$.

⌜ Рівняння параболи буде мати вигляд 34 : $y^2 = 2px$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і її координати задовольняють це рівняння: $-4^{\,2} = 2p \cdot 2$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $y^2 = 8x$. ⌟

107. Знайти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $C\ 2;3$, а вісь паралельна до осі Ox, і яка проходить через точку $M\ 4;-1$.

⌜ Рівняння параболи буде мати вигляд 35 : $y - y_0^{\,2} = 2p\ x - x_0$. Так як координати вершини $C\ -\ x_0 = 2$, $y_0 = 3$, то $y - 3^{\,2} = 2p\ x - 2$. Значення p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку M, і координати цієї точки задовольняють рівняння параболи: $-1 - 3^{\,2} = 2p\ 4 - 2$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Отже, рівняння параболи $y - 3^{\,2} = 8\ x - 2$. ⌟

108. Знайти координати вершини і параметр параболи, заданої рівнянням $y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$.

⌜ Зведемо дане рівняння до вигляду 35 :

$$y^2 - 8x + 4y - 4 = 0,$$
$$y^2 + 4y - 8x - 4 = 0,$$
$$y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 8x - 4 = 0,$$
$$y + 2^{\,2} - 8x - 8 = 0,$$
$$y + 2^{\,2} = 8\ x + 1.$$

Порівнюючи отримане рівняння з формулою 35, знаходимо $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $2p = 8$. Отже, координати вершини параболи $C\ -1;-2$, параметр – $p = 4$. ⌟