АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Пряма на площині

Є кілька типів рівнянь прямої на площині. В залежності від умови задачі, зручно скористатись для її розв'язання тим чи іншим типом рівняння.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0\,. \qquad (1)$$

У прямокутній декартовій системі координат пряма (1) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A;B)$, який називають *нормальним вектором* прямої.

б) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A;B)$

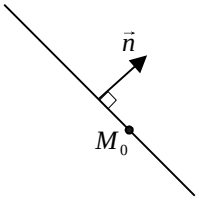


Рис. 1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,. \qquad (2)$$

в) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s} = (l;m)$

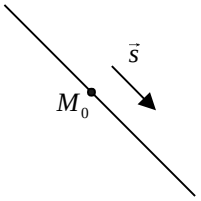


Рис. 2

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\,. \qquad (3)$$

г) *Рівняння прямої, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1)$ *та* $M_2(x_2;y_2)$

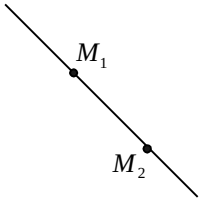


Рис. 3

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \qquad (4)$$

Зауваження. Якщо $x_1 = x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x = x_1$; аналогічно при $y_1 = y_2$ рівняння прямої має вигляд $y = y_1$.

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

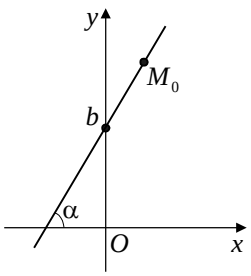


Рис. 4

$$y = kx + b\,, \qquad (5)$$

де $k = \operatorname{tg}\alpha$ *– кутовий коефіцієнт*.

е) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* k

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (6)$$

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1k_2=-1. \qquad (11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1=k_2. \qquad (12)$$

Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (13)$$

Приклади розв'язання типових завдань

1. Визначити, які з точок $M_1(2;3)$, $M_2(-1;3)$, $M_3(-2;-1)$, $M_4(5;-5)$ лежать на прямій $4x+3y-5=0$.

⌜ Для розв'язання даної задачі підставимо координати кожної із заданих точок в рівняння прямої.

$M_1(2;3)$: $4\cdot2+3\cdot3-5\neq0$. Точка M_1 не лежить на прямій.

$M_2(-1;3)$: $4\cdot(-1)+3\cdot3-5=0$. Точка M_2 лежить на прямій.

$M_3(-2;-1)$: $4\cdot(-2)+3\cdot(-1)-5\neq0$. Точка M_3 не лежить на прямій.

$M_4(5;-5)$: $4\cdot5+3\cdot(-5)-5=0$. Точка M_4 лежить на прямій. ⌟

2. На прямій $4x-5y-2=0$ знайти точку, у якої координата $y=2$.

⌜ Координату x знайдемо з рівняння прямої, підставивши в це рівняння $y=2$: $4x-5\cdot2-2=0$, $4x=12$, $x=3$.

Отже, шукана точка має координати $(3;2)$. ⌟

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(4;5)$.

⌜ Використаємо рівняння:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

$(A;B)$ - це координати вектора $\vec{n}=(4;5)$

$(x_0;y_0)$ - це координати точки $M_0(2;-3)$

$4(x-2)+5(y-(-3))=0$, $4x-8+5y+15=0$, або $4x+5y+7=0$. ⌟

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-3;2)$.

Використаємо рівняння:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

$(l;m)$ - це координати вектора $\vec{s}=(-3;2)$

$(x_0;y_0)$ - це координати точки $M_0(1;-4)$

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-(-4)}{2},\ \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,\ \frac{2(x-1)-(-3)(y+4)}{-3\cdot 2}=0,$$

$$2(x-1)+3(y+4)=0,\ 2x-2+3y+12=0,\ \text{або}\ \ 2x+3y+10=0.$$

5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

Рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$(x_1;y_1)$ - це координати першої точки $M_1(-3;4)$

$(x_2;y_2)$ - це координати другої точки $M_2(1;2)$

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4},\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},\ \frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0,$$

$$\frac{x+3-(-2)(y-4)}{4}=0,\ x+3+2y-8=0,\ \text{або}\ \ x+2y-5=0.$$

6. Знайти точку перетину прямих $4x-3y+9=0$ і $3x+2y-23=0$.

Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases}4x-3y+9=0\\3x+2y-23=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases}4x-3y=-9\\3x+2y=23;\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-(-3)\cdot 3=8+9=17,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-9 & -3\\ 23 & 2\end{vmatrix}=-9\cdot 2-(-3)\cdot 23=-18+69=51,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & -9\\ 3 & 23\end{vmatrix}=4\cdot 23-(-9)\cdot 3=92+27=119;$$

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{51}{17}=3,\ \ y=\frac{D_2}{D}=\frac{119}{17}=7.$$

Отже , точка перетину прямих – $(3;7)$.

7. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b=4$ і утворює кут $\alpha=60^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

Використаємо рівняння *прямої з кутовим коефіцієнтом*.

$$y=kx+b$$

Так як $k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$, то $y=\sqrt{3}x+4$.

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;4)$ і утворює кут $\alpha=30^\circ$ з додатним напрямом осі Ox.

Рівняння прямої має вигляд

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

$k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$(x_0; y_0)$ - це координати точки $M(3;4)$

Тому

$$y - 4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3),\ y - 4 - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3) = 0,\ \frac{\sqrt{3}(y - 4) - (x - 3)}{\sqrt{3}} = 0,\ \sqrt{3}y - 4\sqrt{3} - x + 3 = 0,$$ або остаточно

$$x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 3 = 0. \ \lrcorner$$

9. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $M_1(3;2)$ та $M_2(-2;5)$.

$\ulcorner$ Кутовий коефіцієнт k можна знайти з рівняння прямої, звівши його до виду $y = kx + b$. Пряма задана двома точками. Тому використаємо рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$:

$$\frac{x - 3}{-2 - 3} = \frac{y - 2}{5 - 2},\ \frac{x - 3}{-5} - \frac{y - 2}{3} = 0,\ \frac{3(x - 3) - (-5)(y - 2)}{-5\text{Ч}3} = 0,\ 3x - 9 + 5y - 10 = 0,\ 3x + 5y - 19 = 0.$$

Зі знайденого рівняння прямої виразимо y: $5y = -3x + 19$,

$y = -\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}$. Порівнюючи це рівняння з формулою (5), знаходимо, що $k = -\frac{3}{5}$. $\lrcorner$

10. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно до прямої $4x + 3y - 2 = 0$.

$\ulcorner$ Шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої, а тому паралельна до її нормального вектора $\vec{n} = (4;3)$ (рис. 5). Підставимо координати точки M_0 та вектора $\vec{n}$ в рівняння $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$:

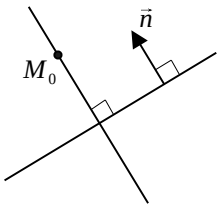


Рис. 5

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 5}{3},\ \frac{x - 2}{4} - \frac{y - 5}{3} = 0,\ \frac{3(x - 2) - 4(y - 5)}{12} = 0,\ 3x - 6 - 4y + 20 = 0,$$

або остаточно $3x - 4y + 14 = 0$. $\lrcorner$

11. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельна до прямої $2x + 5y + 7 = 0$.

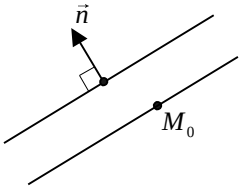


Рис. 6

$\ulcorner$ Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n} = (2;5)$ (рис. 6). Використаємо рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$:

$$2(x - (-3)) + 5(y - 2) = 0,$$

$$2x + 6 + 5y - 10 = 0,$$

або

$$2x + 5y - 4 = 0. \ \lrcorner$$

12. Відомі координати вершин трикутника: $A(3;6)$, $B(-5;8)$, $C(-1;-2)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна до сторони AB.

$\ulcorner$ Нехай M та N – середини сторін AC та BC відповідно. Їх координати

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1,\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2;$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-5 + (-1)}{2} = -3,\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8 + (-2)}{2} = 3.$$

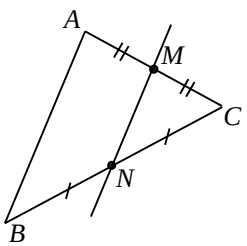


Рис. 7

Отже, $M(1;2)$, $N(-3;3)$. Рівняння прямої MN має вигляд (4):

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 2}{3 - 2},\ \frac{x - 1}{-4} - \frac{y - 2}{1} = 0,\ \frac{x - 4 - (-4)(y - 2)}{-4} = 0,\ x - 4 + 4y - 8 = 0,$$ або

$$x + 4y - 12 = 0. \ \lrcorner$$

13. Вершини трикутника мають координати: $A(4;3)$, $B(1;8)$, $C(8;4)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини A до сторони BC.

Висота AK проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (8-1;4-8) = (7;-4)$. Тому її рівняння має вигляд (2):

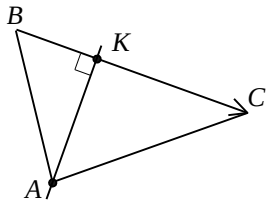


Рис. 8

$$7(x-4)-4(y-3)=0,$$
$$7x-28-4y+12=0,$$

або

$$7x-4y-16=0. \quad \lrcorner$$

14. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(-1;7)$, $B(-5;1)$, $C(9;-5)$.

Три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Знайдемо рівняння двох будь-яких медіан, наприклад CM і BN. Для цього спочатку обчислимо координати точки M – середини сторони AB:

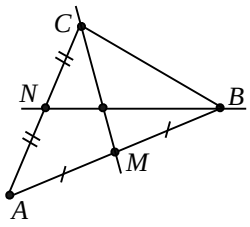


Рис. 9

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+(-5)}{2} = -3,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Отже, $M(-3;4)$. Рівняння медіани CM має вигляд (4):

$$\frac{x-9}{-3-9} = \frac{y-(-5)}{4-(-5)},\ \frac{x-9}{-12} - \frac{y+5}{9} = 0,$$
$$\frac{3(x-9)-(-4)(y+5)}{-36} = 0,\ 3x-27+4y+20=0.$$

Таким чином, рівняння прямої CM $-\ 3x+4y-7=0$.

Аналогічно знаходимо координати точки N – середини сторони AC і рівняння прямої BN:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4,\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{7+(-5)}{2} = 1,\ N(4;1);$$
$$\frac{x-(-5)}{4-(-5)} = \frac{y-1}{1-1},\ \frac{x+5}{9} = \frac{y-1}{0}.$$

Згідно з зауваженням до формули (4), рівняння медіани BN $y-1=0$. Координати точки перетину знаходяться з системи

$$\begin{cases} y-1=0 \\ 3x+4y-7=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ 3x=7-4y, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Отже, точка перетину медіан $O(1;1)$. $\lrcorner$

15. Знайти проекцію точки $P(8;2)$ на пряму $3x-y-2=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора даної прямої $\vec{n} = (3;-1)$ (див. пункт а)) і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд (3):

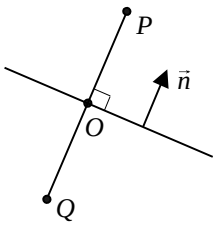


Рис. 10

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y-2}{-1},\ \frac{x-8}{3} + \frac{y-2}{1} = 0,\ \frac{x-8+3(y-2)}{8} = 0,\ x+3y-14=0.$$

Проекція точки P є точкою перетину знайденої прямої і даної прямої. Її координати визначаються з системи

$$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x+3y-14=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=2 \\ x+3y=14; \end{cases}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3-(-1)\cdot 1 = 10,$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 14-1\cdot 2 = 40,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot 14 = 20;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{10} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2.$$

Отже, знайдено проекцію точки P – точку $O(4;2)$. Ця точка є серединою відрізка PQ. Тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2}, \text{ звідки } 2x_O = x_P + x_Q, \quad x_Q = 2x_O - x_P;$$

аналогічно, $y_O = \frac{y_P + y_Q}{2}$, $2y_O = y_P + y_Q$, $y_Q = 2y_O - y_P$.

Обчислимо координати точки Q:

$$x_Q = 2 \cdot 4 - 8 = 0, \; y_Q = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Отже, $Q(0;2)$. ⌟

16. Визначити кут між прямими:

а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y - 3 = 0$;

б) $y = 3x + 2$ і $y = \frac{1}{2}x - 5$.

⌜ а) Використаємо формулу $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$: $A_1 = 5$, $B_1 = -1$, $A_2 = 3$, $B_2 = 2$;

$$\cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{15 - 2}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

б) Використаємо формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$: $k_1 = 3$, $k_2 = \frac{1}{2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1.$$

За відомим значенням $\operatorname{tg}\varphi = -1$ знаходимо $\varphi = 135^\circ$. ⌟

17. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $3x - 2y + 4 = 0$ і $4x + 6y - 3 = 0$;

б) $y = 2x - 7$ і $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

⌜ а) Використаємо формулу $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. В даній задачі $A_1 = 3$, $B_1 = -2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 6$. Так як $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$, то прямі перпендикулярні.

б) Використаємо умову $k_1k_2 = -1$. В даній задачі $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. Так як $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то прямі не перпендикулярні. ⌟

18. Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $-3x + 4y - 7 = 0$ і $6x - 8y + 2 = 0$;

б) $y = 3x + 7$ і $y = 3x - 2$.

⌜ а) Використаємо умову $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. В даній задачі

$$A_1 = -3, \; B_1 = 4, \; C_1 = -7, \; A_2 = 6, \; B_2 = -8, \; C_2 = 2.$$

Перевіряємо рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$: $\frac{-3}{6} = \frac{4}{-8}$. Отже, прямі паралельні, причому не співпадають, так як $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

.

б) Кутові коефіцієнти даних прямих однакові: $k_1 = k_2 = 3$. Згідно з умовою $k_1 = k_2$ прямі паралельні. ⌟

19. Знайти відстань від точки $P(-2;3)$ до прямої $3x-4y-2=0$.

$\ulcorner$ Використаємо формулу $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 3-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-6-12-2|}{5}=4. \ \lrcorner$$

20. Знайти відстань між двома паралельними прямими $3x+4y-8=0$ і $-3x-4y+18=0$.

$\ulcorner$ На першій прямій візьмемо довільну точку $M_0(x_0;y_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до іншої прямої. Нехай $x_0=0$. Тоді з рівняння першої прямої знаходимо: $3\cdot 0+4\cdot y_0-8=0$, $y_0=2$. Отже, $M_0(0;2)$. Відстань від знайденої точки до другої прямої знаходимо за формулою $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

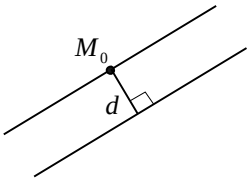


Рис. 11

$$d=\frac{|-3\cdot 0-4\cdot 2+18|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=\frac{|0-8+18|}{5}=2. \ \lrcorner$$