ЛЕКЦІЯ 6
МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

1 Аналітичний метод мінімізації ФАЛ

Мінімальна форма (МКФ і МДФ) подання ФЛ це форма, що містить мінімальну кількість термів і змінних у термах, і не повинна допускати наступних спрощень.

Наприклад, функція $x_1+\bar{x}_1 x_2$ може бути спрощена, якщо застосувати розподільний закон: $x_1x_2 + x_3 = (x_1+x_3) \cdot (x_2+x_3)$, тоді

$x_1+\bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_1 +x_1) \cdot (x_1+x_2) = x_1\bar{x}_1 + x_1x_1+\bar{x}_1 x_2 + x_1x_2 =$

$= 0 + x_1 + x_2 (\bar{x}_1 + x_1) = x_1 + x_2.$

Спрощення складних логічних виражень може бути здійснене на підставі **застосування законів і аксіом ФАЛ**.

Приклад.

$x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3$; (додамо ще один кон`юнктивний терм $x_1x_2x_3$ згідно аксіоми $x + x = x$).

Тоді: $x_1x_2(x_3+\bar{x}_3) + x_1\bar{x}_2(x_3+\bar{x}_3) + x_2x_3(x_1+\bar{x}_1) = x_1x_2+x_1\bar{x}_2 + x_2x_3 = x_1(x_2+\bar{x}_2) + x_2x_3 = x_1 + x_2x_3$; (використаємо сполучну і розподільну властивість кон`юнкції і диз'юнкції).

2 Числове і геометричне подання ФАЛ

$$F(x_1,x_2,x_3)=\bigvee_1 F(0,3,4). \qquad (1)$$

:000 + 011 + 100

$F(x_1, x_2, x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

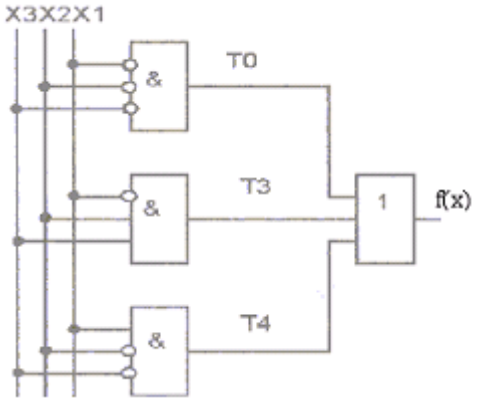


Рис. 1 Логічна схема логічної функції $F(x_1, x_2, x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

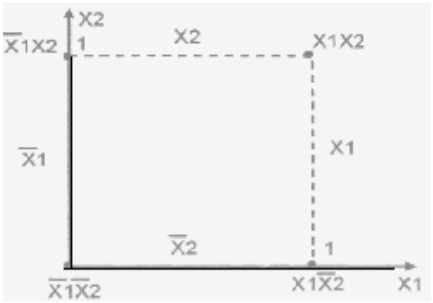


Рис. 2 - Геометричне подання ЛФ при n = 2.

Таке геометричне подання функцій двох змінних наочно показує: ***дві вершини, що належать одному ребру і звуться сусідніми, "склеюються" по змінній, що змінюється уздовж цього ребра.***

Сума розмірності геометричного еквівалента і рангу, що зпівставляється цьому геометричному еквіваленту кон`юнкції, постійна і дорівнює числу аргументів функції.

Кожний геометричний еквівалент меншої розмірності покривається всіма геометричними еквівалентами більшої розмірності.

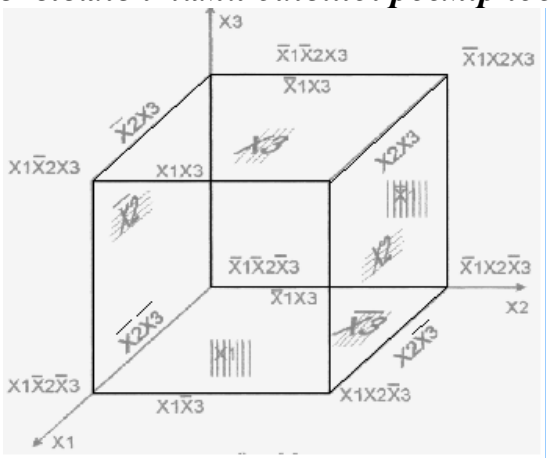
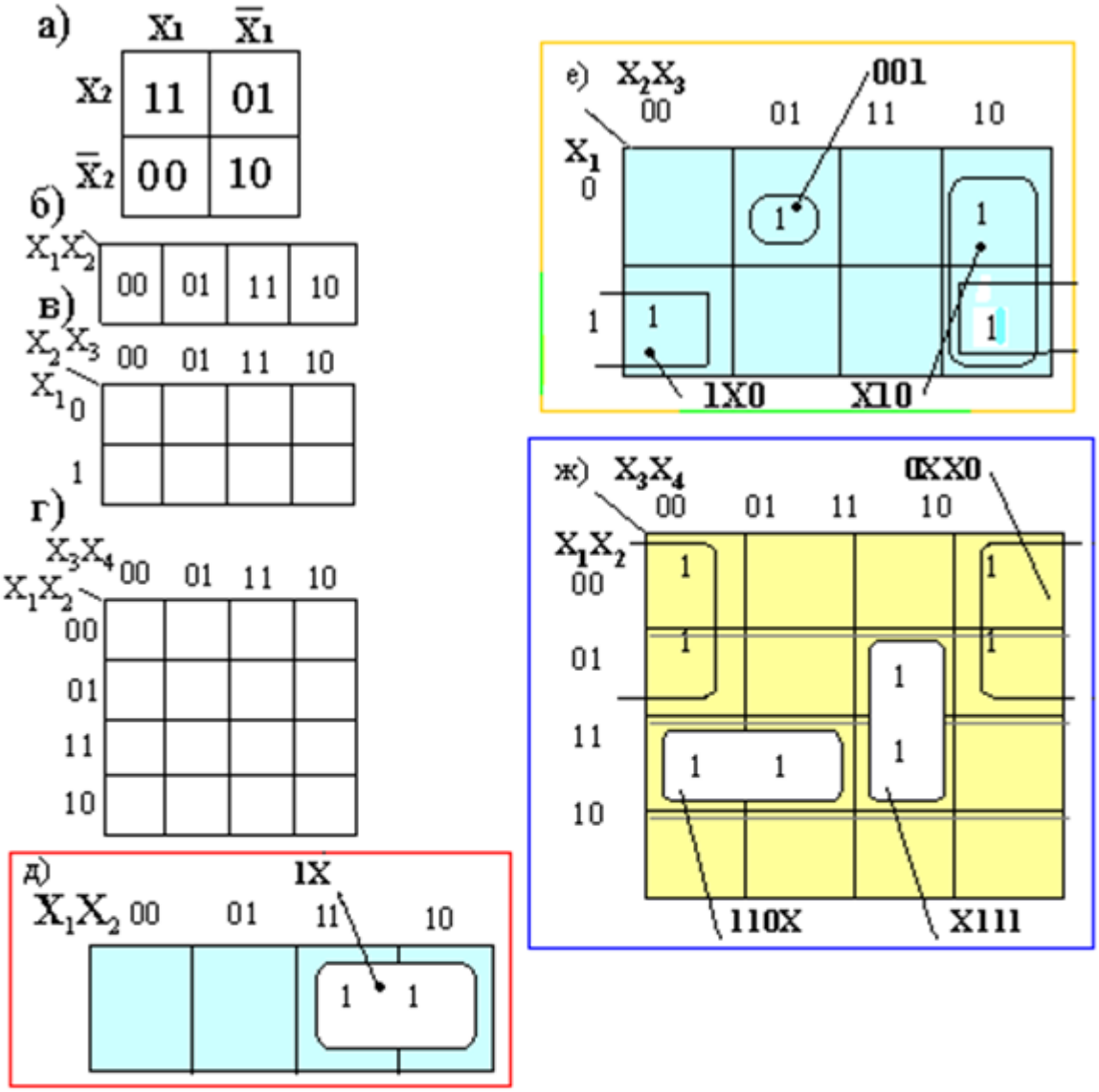


Рис. 3 - Геометричне подання ЛФ при n = 3

$AB+A\overline{B}=A$. Частіше вживається термін «склеювання".

У геометричному змісті кожний набір $x_1, x_2,\ldots, x_n$ може розглядатися як *n* - мірний вектор, що визначає точку n-мірного простору. Виходячи із цього, множину наборів, на яких визначена функція *n* змінних, представляють у вигляді вершин *n*-мірного куба.

МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ЛФ ЗА ДОПОМОГОЮ КАРТ КАРНО



$$F_1 = X1\overline{X2} + X1X2 = X1;$$

$$F_2 = \overline{X_1}\overline{X_2}X_3 + X_1\overline{X_2}\overline{X_3} + \overline{X_1}X_2\overline{X_3} + X_1X_2\overline{X_3} =$$

$$= \overline{X_1}\overline{X_2}X_3 + X_1\overline{X_3} + X_2\overline{X_3};$$

$$F_3 = \overline{X_1}\overline{X_2}\overline{X_3}\overline{X_4} + \overline{X_1}\overline{X_2}X_3\overline{X_4} + \overline{X_1}X_2\overline{X_3}\overline{X_4} + \overline{X_1}X_2X_3X_4 +$$

$$+ \overline{X_1}X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3X_4 + X_1X_2\overline{X_3}X_4 + X_1X_2\overline{X_3}\overline{X_4} =$$

$$= \overline{X_1}\overline{X_4} + X_1X_2\overline{X_3} + X_2X_3X_4.$$

Рис. 4 - Карти Карно для двух (а,б), трьох (в) і чотирьох (г) змінних; приклади мінімізації ЛФ д), е), ж)

Мінімальне покриття вибирається інтуїтивним шляхом на основі аналізу різних варіантів покриттів (контурів об'єднань) мінімізованої функції.

Даній ДНФ (рис. 4, а) відповідає мінімальна форма виду:

$$F = \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 + x_1\,\bar{x}_3\,x_4 + x_2 x_3.$$

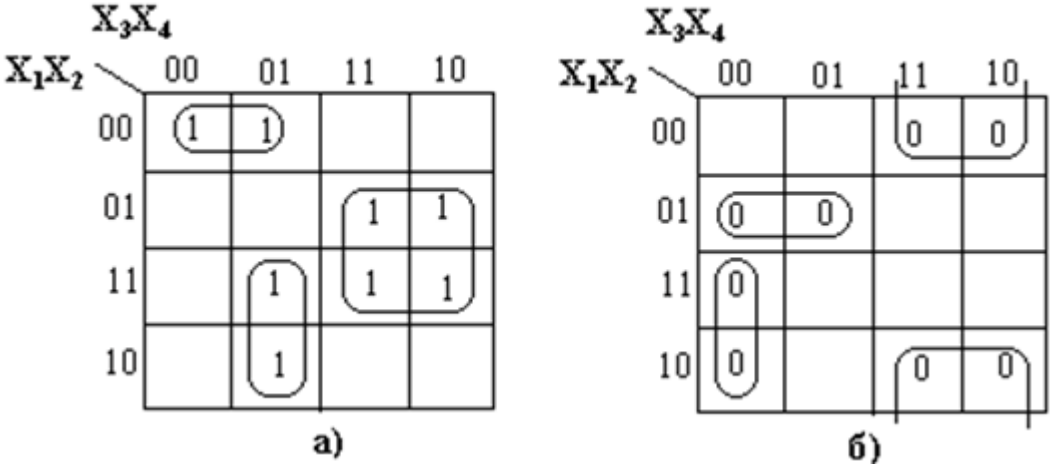


Рис. 5 Значення функції, задані картою Карно

Нульові значення цієї функції представлені на рис. 5, б. Відзначені на карті клітки визначають функцію $\bar{F}$, зворотну F. При мінімізації функції $\bar{F}$, одержуємо:

$$\bar{F} = \bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3 + x_1\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4 + \bar{x}_2\,x_3.$$

Використовуючи правило де Моргана, перетворимо ЛФ в КНФ:

$$F = \overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3} = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_3 + x_4)(x_2 + \bar{x}_3).$$

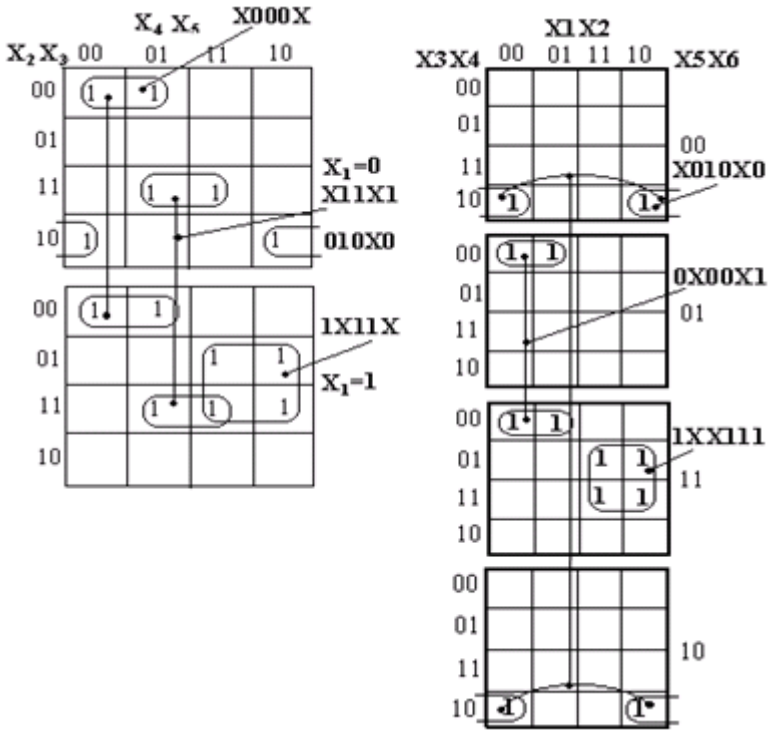


Рис. 6 Карти Карно на 5 і 6 змінних

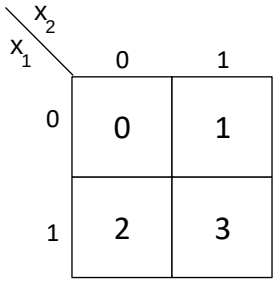


Рис. 6 Еталонна карти Карно на 2 змінних

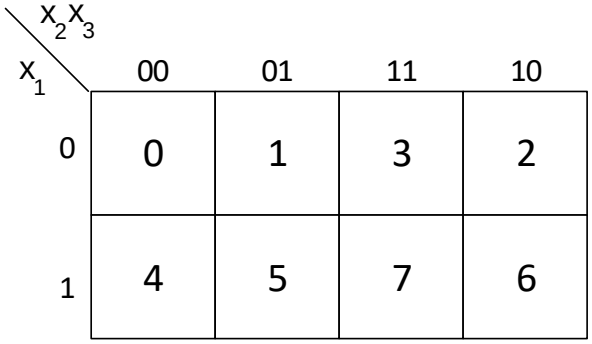


Рис. 7 Еталонна карти Карно на 3 змінних

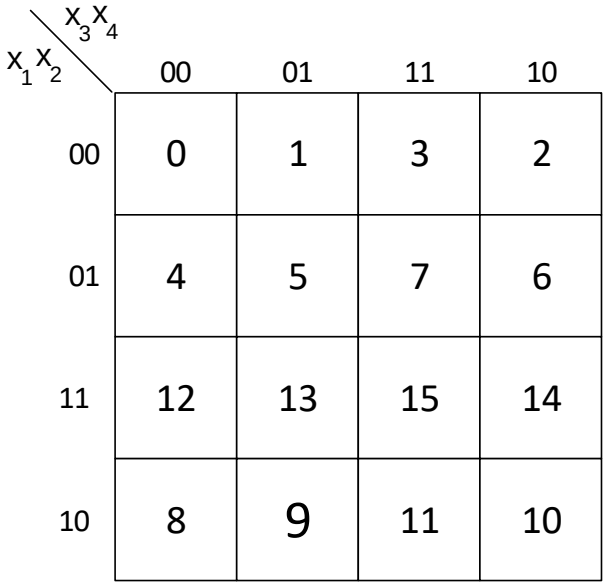


Рис. 8 Еталонна карти Карно на 4 змінних

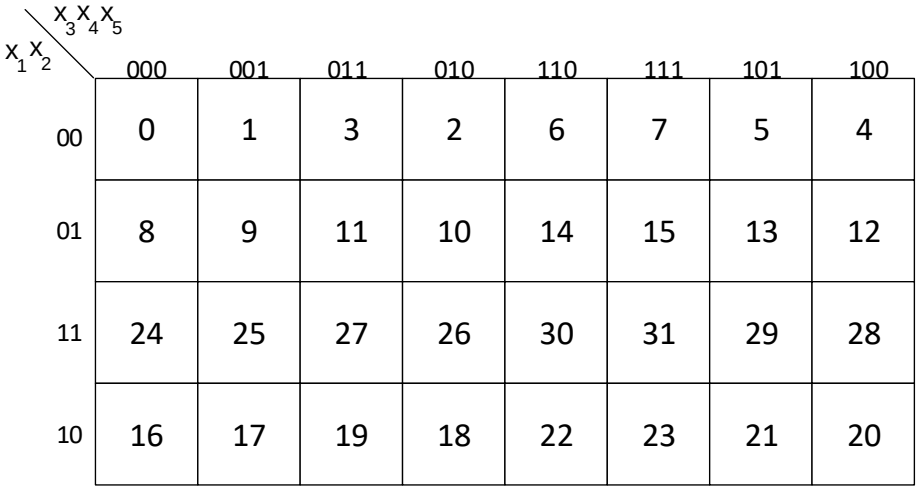


Рис. 9 Еталонна карти Карно на 5змінних

2 Не повністю визначені логічні функції в картах Карно

Не повністю визначенні ЛФ - це функції, значення яких на деяких наборах змінних несуттєво (будь яке).

При мінімізації не повністю визначеної ЛФ її можна довизначити самостійно на свій розсуд, для цього вершини, відзначені символом * змінюють, привласнюючи їм значення 1 або 0, підвищуючи, таким чином, ефективність мінімізації.

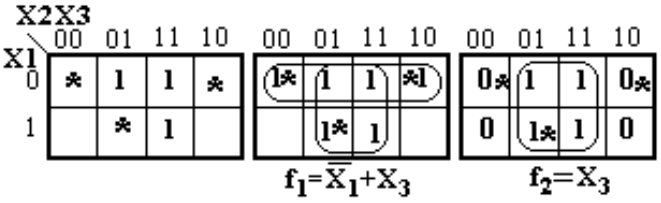


Рис. 10- Не повністю визначені ЛФ у картах Карно

$$F(x)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3+\overline{x_1}\,x_2x_3+x_1x_2x_3.$$