ЛЕКЦІЯ 5
4 ВЛАСТИВОСТІ ЗАКОНІВ І ПРАВИЛА АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

4.1 Властивості операцій кон`юнкції, диз'юнкції, заперечення

Алгебра Буля, заснована на логічних операціях кон`юнкції, диз'юнкції і заперечення, базується на наступних основних законах:

- перемісний (властивість комутативності);
- сполучний (властивість асоціативності);
- розподільний (властивість дистрибутивності);
- ідемпотенції (властивість зберігати степінь і сталість коефіцієнта);
- інверсії (закон де Моргана).

У таблиці 4.1 наведена інтерпретація властивостей цих законів для операцій кон`юнкції, диз'юнкції і заперечення щодо декількох
(двох або трьох) змінних. Наслідок п.5а отримано з п.5 шляхом загального заперечення лівої і правої частини рівності.

Таблиця 4.1- Властивості основних законів

№	Закон	Логічного додавання	Логічного множення
1	Переміщення	$X_1+X_2 = X_2+X_1$	$X_1 X_2 = X_2 X_1$
2	Сполучний	$(X_1+X_2)+X_3=X_1+(X_2+X_3)$	$(X_1 X_2) X_3 = X_1 (X_2 X_3)$
3	Розподільний	$(X_1+X_2)X_3=X_1X_3+X_2X_3$	$X1X2+X3=(X1+X3)(X2+X3)$
4	Ідемпотенції	$X+X=X$	$X X = X$
5	Де Моргана	$\overline{X1+X2+\ldots+Xn} = \overline{X1}\,\overline{X2}\ldots\overline{Xn}$	$\overline{X1X2\ldots Xn} = \overline{X1}+\overline{X2}+\ldots+\overline{Xn}$
5а	Наслідок де Мор-на	$X1+X2+\ldots+X3 = \overline{\overline{X1}\,\overline{X2}\ldots\overline{Xn}}$	$X1\,X2\ldots Xn = \overline{\overline{X1}+\overline{X2}+\ldots+\overline{Xn}}$

Таблиця 4.2 - Правила перетворень ЛФ

№	Правило	Диз'юнкція	Кон`юнкція
1	Інверсія	$0 = \overline{1}$	$1 = \overline{0}$
2	Незмінності	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
3	Універсальності	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
4	Повторення	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
5	Додатності	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
6	Поглинання	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
7	Подвійного запер.	$\overline{\overline{x}} = x$	
8	Склеювання	$xy + x\overline{y} = x$	$(x + y)(x + \overline{y}) = x$
		$x + \overline{x}y = x + y$	$(x + y)(x + z) = x + yz$
		$\overline{x} + xy = \overline{x} + y$	$x(\overline{x} + y) = xy$

Довести ці співвідношення можливо, наприклад, за допомогою складання ТІ для правої і лівої частини рівнянь. Однак справедливість законів можна довести і аналітичним перетворенням функцій.

Доведемо, наприклад, розподільний закон для виразу: $x_1x_2+x_3 = (x_1+x_3)(x_2+x_3) = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3x_3 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3=$
$= x_1x_2+x_3(x_1+x_2+1) = x_1x_2+x_3$ (що і потрібно довести).

Використовуючи основні закони, одержимо ряд очевидних правил (див. таблицю 4.2).

4.2 Властивості функцій: суми по модулю 2, імплікації, Шеффера і Пірса

Для функції суми по модулю 2 має місце ***переміщення і сполучний закони***, а також ***розподільний закон відносно кон`юнкції.***

Таблиця 4.3 - Закони для ЛФ **сума mod2**

Переміщення	$x \oplus y = y \oplus x$
Сполучний	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
Розподільний (відносно кон`юнкції)	$x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$

Таблиця 4.4 - Правила для ЛФ **сума mod2**

1	$x \oplus x = 0$
2	$x \oplus 0 = x$
3	$x \oplus 1 = \overline{x}$
4	$x \oplus \overline{x} = 1$
5	$x + y = x \oplus y \oplus xy$

На відміну від раніше розглянутих функцій ***для імплікації не мають місця закони переміщення, сполучення, розподілення і інші:***

$x > y > z \neq y > x > z$; $(x > y) > z \neq x > (y > z)$; $(x > y) \cdot z \neq x \cdot z > y \cdot z$.

Функції кон`юнкції і диз'юнкції виражають через очевидні співвідношення для імплікації: $x \cdot y = \overline{\overline{x \to y}}$ $x + в = \overline{x} \to в$.

Таблиця 4.5 - Імплікація

1	$x > x = 1$	6	$1 > x = x$
2	$x \to \overline{x} = \overline{x}$	7	$x \to y = \overline{y} \to \overline{x}$
3	$x > 1 = 1$	8	$x > y > x = x$
4	$x \to 0 = \overline{x}$		$x \cdot y = \overline{\overline{x \to y}}$
5	$0 > x = 1$	9	
		10	$x + y = \overline{x} \to y$

Імплікація володіє тільки властивістю комутативності (закон переміщення) у зміненому виді $x \to y = \overline{y} \to \overline{x}$.

Для функцій Шеффера і Пірса має місце тільки закон переміщення: $x / в = y / x$; $x \downarrow y = y \downarrow x$.

Правила виконання функцій **штрих Шеффера** і **стрілка Пірса** мають наступні очевидні співвідношення (табл.4.6), перевірка яких проводиться студентам самостійно.

Таблиця 4.6 - Правила ЛФ **штрих Шеффера** і **стрілка Пірса**

№ п/п	Шеффера "НЕ-І"	Пірса "НЕ^- АБО"
1	$x / x = \overline{x}$	$x \downarrow x = \overline{x}$
2	$x / \overline{x} = 1$	$x \downarrow \overline{x} = 0$
3	$x / 1 = \overline{x}$	$x \downarrow 1 = 0$
4	$x / 0 = 1$	$x \downarrow 0 = \overline{x}$
5	$\overline{x} / 0 = 1$	$\overline{x} \downarrow 0 = x$
6	$\overline{x} / 1 = x$	$\overline{x} \downarrow 1 = 0$
7	$x/y = \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$	$x \downarrow y = \overline{x}\,\overline{y} = \overline{x + y}$
8	$xy = \overline{x / y} = x/y/x/y$	$xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \overline{x} \downarrow \overline{y}$
9	$x+y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{x}\,\overline{y} = \overline{x} / \overline{y}$	$x+y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
10	$x / y = \overline{\overline{x} \downarrow \overline{y}}$	$\overline{x / y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$
11	$x \downarrow y = \overline{\overline{x} / \overline{y}}$	$\overline{x \downarrow y} = \overline{x} / \overline{y}$

Розкриття дужок для функцій Шеффера і Пірса виконуються (в силу відсутності дії сполучного закону) за наступними правилами:

$(x / y) / (x/z) = \overline{x / (\overline{y} / \overline{z})} = \overline{x} \downarrow (y \downarrow z)$;

$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow z) = \overline{x \downarrow (\overline{y} \downarrow \overline{z})} = \overline{x} / (y / z)$;

$(x / y) \downarrow (x / z) = \overline{x / (\overline{y} \downarrow \overline{z})} = \overline{x} \downarrow (y / z)$;

$(x \downarrow y) / (x \downarrow z) = \overline{x \downarrow (\overline{y} / \overline{z})} = \overline{x} / (y \downarrow z)$;

$(x / y) \downarrow (z / k) = \overline{x} \downarrow \overline{\overline{y} \downarrow \overline{z} \downarrow \overline{k}}$;

$(x \downarrow y) / (z \downarrow k) = \overline{x} / \overline{\overline{y} / \overline{z} / \overline{k}}$.

Доказ цих співвідношень здійснюється на підставі правила 7 таблиці 4.6. Доведемо, наприклад, що: $(x \downarrow y) / (x \downarrow z) = \overline{x + y} / \overline{x + z} =$

$= (x + y) + (x + z) = x + (y + z) = x + (\overline{y} / \overline{z}) = \overline{x \downarrow (\overline{y} / \overline{z})} = \overline{x} / (\overline{\overline{y} / \overline{z}}) = \overline{x} / (y \downarrow z)$.

Функції Шеффера і Пірса зв'язані між собою співвідношеннями (10, 11 табл. 4.6), аналогічними формулам де Моргана для функцій кон`юнкції і диз'юнкції. Для доказу цього, використають формулу 7.

У загальному випадку, закони алгебри логіки поширюються на будь-яке число змінних. В алгебрі логіки діє порядок операцій, як і у звичайній алгебрі: операція логічного множення випереджає операцію логічного додавання; можна брати вираження в дужки, розкривати їх, виносити загальний множник і ін..

Особливе значення має знак інверсії (виконує роль дужок).

Наприклад, виразу: $\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_3\,\overline{\overline{x_4}} + x_5\,\overline{x_6}}$ відповідає послідовність операцій:

- інвертування окремих змінних $\overline{x_2}, \overline{x_4}, \overline{x_6}$;
- логічне множення $x_1\overline{x_2}, x_3\overline{x_4}, x_5\overline{x_6}$;
- додавання під нижнім загальним знаком інверсії;
- інвертування результату отриманого під нижнім загальним знаком інверсії;
- додавання результату під нижнім загальним знаком інверсії з $x_5\overline{x_6}$, інвертування.

4.3 Основні класи функцій алгебри логіки (ФАЛ)

Для рішення питання про побудову функціональних логічних базисів ЦА, пов'язаного із практичним застосуванням результатів теорії алгебри логіки при синтезі принципових електричних схем, необхідно розглянути основні класи елементарних функцій.

4.3.1 Клас функцій, що зберігають значення «нуль» при нульових значеннях всіх змінних f (0, 0, ... , 0) = 0

Очевидно, що при фіксованому n, число функцій цього класу становить половину ФАЛ [2]. Позначається K_0 - "конституента 0" (Const 0).

4.3.2 Клас функцій, що зберігають значення «одиниця» при одиничних значеннях всіх змінних f (l, l, ... , 1) = 1

Цей клас також становить половину всіх елементарних ФАЛ і позначається K_1 - "конституента 1" (Const 1).

4.3.3 Клас самоподвійних функцій

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є самоподвійною, якщо вона збігається з оберненою (від обернених змінних) собі функцією, тобто є зворотною: $\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}\,(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n})}$.

Самоподвійна функція від n аргументів повністю визначається на половині наборів значень аргументів. Позначається S.

4.3.4 Лінійна функція

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є лінійної, якщо вона представлена наступному вигляді: $f = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$, де коефіцієнт c_i може приймати значення {0, 1}. Позначається L. Функцій класу L є 2^{n+1}.

4.3.5 Монотонна функція

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є монотонною, якщо для будь-яких двох наборів (кортежів) $\hat{x}_1$ і $\hat{x}_2$, таких що при $\hat{x}_1 \geq \hat{x}_2$ має місце нерівність: $f(\hat{x}_1) \geq f(\hat{x}_2)$. Позначається M.

4.3.6 Симетрична функція

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є симетричної, якщо вона не змінюється при довільній перенумерації аргументів: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, де $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – будь-яка перестановка змінних. Позначається C.

5 АНАЛІТИЧНИЙ ЗАПИС ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

5.1 Аналітичні форми подання ЛФ

Нами був розглянутий табличний спосіб завдання ФАЛ: кожному набору значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у ТІ вказується значення самої ЛФ {0,1}.

Однак, цей спосіб не придатний для аналізу і перетворень функцій, зокрема, з метою її мінімізації. Тому, використають аналітик-ний запис функцій у **вигляді логічних формул**, одержуваних з тих же ТІ за певними правилами їхнього запису. Розглянемо деякі визначення.

Визначення. **Кон`юнктивний терм (мінтерм)** - терм, що зв'язує всі змінні, представлені в прямій або інверсній формі, знаком кон`юнкції ($\wedge$, $\cdot$) і дорівнює одиниці. У літературі: "конституента 1". Приклад: $f(x) = x_1x_2\overline{x}_3\,\overline{x}_4$.

Визначення. **Диз'юнктивний терм (макстерм)** - терм, що зв'язує всі змінні, представлені в прямій або інверсній формі, знаком диз'юнкції ($\vee$, +) і дорівнює нулю. У літературі: "конституента 0". Приклад: $f(x) = \overline{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Рангом терма r називається число, що визначає кількість змінних, вхідних у даний терм. Наприклад, для мінтерма $\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$, то r = 4; для макстерма $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$, то r = 3.

5.1.1 Подання ЛФ у досконалій диз'юнктивній нормальній формі

Для викладу методу і алгоритму переходу від таблиці завдання цифрового автомата до аналітичного подання його за допомогою ФАЛ, розглянемо наступну теорему [1,2].

Теорема. ***Будь-який таблично - заданий ЦА може бути представлений у вигляді логічної функції- досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ)***

$$\mathbf{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \bigvee_1 f_i,} \qquad (5.1)$$

де і - номера наборів, на яких функція $\mathbf{f_i}$ дорівнює 1, тобто

$f_i = \begin{cases} 1, \textit{ коли номер набора є } i \\ 0, \textit{ в протилежному випадку} \end{cases}$, де $\bigvee_1$ - знак загальності ДДНФ, що поєднує всі мінтерми f_i, рівні 1.

Справді, якщо на яких-небудь наборах функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, а на інших наборах $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то внаслідок того, що x + 1 + +…+ 1 + 0 +…+ 0 = 1, у правій частині об'єднання нульові терми зникають і завжди найдеться хоча б один мінтерм, що дорівнює 1.

Аналітичний запис 5.1 однозначно відображає ТІ будь-якого ЦА без елементів пам'яті для кінцевого числа змінних ($x_1, x_2, \ldots, x_n$).

5.1.2 Диз'юнктивна нормальна форма ЛФ

Диз'юнктивна нормальна форма ЛФ звичайно виходить після аналітичних перетворень ДДНФ, наприклад, після мінімізації. При цьому, можуть скоротяться деякі терми, змінні, логічні операції. Все це приведе до більше скороченої форми запису ЛФ, по своїй значимості, рівносильної вихідній ДДНФ.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) - диз'юнктивне об'єднання термів, що включає мінтерми змінного рангу .

Приклад. Записати в аналітичному виді ЛФ задану таблицею 5.1.

Таблиця 5.1 - Завдання функції

x_1	x_2	x_3	f(x)	x_1	x_2	x_3	f(x)
0	0	0	1*	1	0	0	1*
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1*	1	1	1	0

Кількість всіх термов, що входять в аналітичний запис функції у вигляді ДДНФ дорівнює кількості конституент одиниці, *поєднаних знаком логічного додавання* $F(x) = f_1 + f_2 + f_3 = 1^* + 1^* + 1^* = 1$.

Тоді запишемо функцію таблиці 5.1 у ДДНФ:

$F(x_1, x_2, x_3) = f_1 + f_2 + f_3 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$. Склеюючи 1 і 3 мінтерми, одержимо ДНФ

$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 \overline{x}_3 (\overline{x}_1 + x_1) + \overline{x}_1 x_2 x_3 = \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3$.

Наслідок теореми 5.1. Будь-яка таблично задана ЛФ може бути представлена в наступній аналітичній формі:

$$\mathbf{F(x_l, x_2, \ldots, x_n) = f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_n = \oplus f_i,} \qquad (5.2)$$

Для того щоб виконувалося це співвідношення, необхідно, щоб при обігу в одиницю (з термів f_i) будь-якої їх непарної кількості все вираження F оберталося в одиницю, а при обігу парної кількості у нуль (з термів f_i) все вираження F оберталося в таке, що дорівнює нулю. Функція додавання по mod2 ($\oplus$) відповідає цій вимозі.

Подання ЛФ у вигляді 5.1 і 5.2 називають диз'юнктивним і поліноміальним поданнями (відповідно).

5.1.3 Подання ЛФ у досконалій кон`юнктивній нормальній формі

Для одержання подань кон`юнктивного типу розглянемо функції $F_i(x_l, x_2, \ldots, x_n)$, обумовлені, як:

$$f_i = \begin{cases} 0, \textit{коли номер набора є } i \\ 1, \textit{в протилежному випадку} \end{cases}.$$

Такі функції називають характеристичними функціями нуля.

Теорема. ***Будь-який таблично задана ФАЛ може бути представлена у наступній досконалій кон`юнктивній нормальній формі (ДКНФ):***

$$\mathbf{F(x_l, x_2, \dots, x_n) = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k = \wedge f_i,} \qquad (5.3)$$

де і є множина номерів наборів (кортежів) на яких функція $\mathbf{f_i}$ звертається в «0». Доказ теореми є аналогічним. Якщо на будь-якому наборі функція F дорівнює «0», то для цього досить, щоб хоч одних терм $\mathbf{f_i}$ рівнявся «0».

Наслідок. Будь-яка таблично задана ФАЛ може бути представлена в наступній аналітичній формі:

$$\mathbf{F(x_l, x_2, \dots, x_n) = f_1 \sim f_2 \sim \dots \sim f_k = \sim f_i,} \qquad (5.4)$$

де *1,2..i…k* є терми, що виключно мають однакові значення «0» або «1».

Подання функції у вигляді 5.3 називають кон`юнктивним, а у вигляді 5.4 називають рівнозначністю (еквіваленцією). Можна показати будь-яку ФАЛ через функції ***штрих Шеффера, стрілку Пірса.***

Визначення кон`юнктивна нормальна форма (КНФ) – об'єднання термів, що включає в себе макстерми різних рангів.

Наприклад: $F(x_l, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_2 + \overline{x}_3)$.

5.2 Основні властивості і алгоритм одержання ДДНФ, ДКНФ

5.2. 1 Загальні властивості ДДНФ

Аналіз ЛФ, записаних в ДДНФ виділяє ряд властивостей:

- всі кон`юнктивні терми ДДНФ є конституентами «1», тобто мінтермами;
-у ДДНФ немає двох однакових мінтермів;
-у ДДНФ жоден мінтерм не містить двох однакових множників (змінних);
-у ДДНФ жоден мінтерм не містить разом зі змінної і її заперечення;
-кожний мінтерм містить всі змінні або їхні заперечення.

5.2.2 Алгоритм запису ДДНФ

На підставі наведеного можна скласти наступний алгоритм. Отримаємо ДДНФ з ТІ, що задає **функціонування ФАЛ**.

Для приклада візьмемо дані таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 - Таблиця функціонування **ФАЛ**

x_1	x_2	x_3	f(x)	x_1	x_2	x_3	f(x)
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

Алгоритм запису ЛФ у ДДНФ має наступну послідовність:

- вибрати з ТІ перший рядок, у якій f(x) = l;
- сформувати зі змінних цього рядку кон`юнктивний терм (мінтерм) по правилу:

$$x_j = \begin{cases} x_j, \textit{ коли значення } 1 \\ \overline{x_j}, \textit{ коли значення } 0 \end{cases};$$

- поставити оператор поділу $\vee$ (+) і перейти до пошуку наступного рядка, де f(x) = 1;
- якщо рядків з f(x) = l більше немає, те перейти до закінчення запису ДДНФ.

По таблиці 5.2, відповідно до алгоритму, маємо таку ДДНФ:

$$F_{ДДНФ}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 .$$

5.2.3 Властивості ДКНФ

Властивості функцій представлених у досконалій кон`юктивній нормальній формі (ДКНФ) аналогічні властивостям ДДНФ:

- всі диз'юнктивні терми ДКНФ є конституентами 0, тобто макстермами;
- у ДКНФ немає двох однакових макстермів;
- у ДКНФ макстерми не містять двох однакових змінних;
- у ДКНФ макстерм не містить разом зі змінної і її заперечення;
- кожний макстерм містить всі змінні або їхні заперечення.

5.2.4 Алгоритм запису ДКНФ

З огляду на вищеперераховані властивості, сформулюємо наступний алгоритм побудови ДКНФ для ЛФ, що задані ТІ:

- вибрати з таблиці перший рядок, де f(x) = 0;
- сформувати диз'юнктивний терм (макстерм) по правилу:

$$x_j = \begin{cases} x_j, & коли\ значення\ 0 \\ \overline{x_j}, & коли\ значеннння\ 1 \end{cases};$$

- поставити круглі дужки, що поділяють макстерми і оператор логічного множення і перейти до наступного рядка де f(x) = 0;
- якщо рядків з f(x) = 0 немає, то закінчити запис ДКНФ.

Рішення для таблиці 5.2. Відповідно до алгоритму маємо ДКНФ:

$f_{ДКНФ}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot$

$\cdot (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$.

Для подання ДДНФ, ДКНФ використалися операції І, АБО, НІ.

5.3 Способи перетворення ДНФ і КНФ у ДДНФ і ДКНФ

Іноді, при автоматизованому проектуванні, для опису систем необхідно відновлювати функції представлені в нормальних формах у більше повні зроблені нормальні форми.

Довільна ДНФ переводиться в ДДНФ за правилом по формулі:

$$\mathbf{F_{ДДНФ} = F_i(x_i + \overline{x}_i)} \qquad (5.5)$$

де $\overline{x}_i$ - змінна, котра не входить у даний терм.

Наприклад, логічну функцію, задану в ДНФ

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ необхідно перетворити в ДДНФ.

Рішення. Перетворимо терми відповідно до 5.5.

$f_1 = x_1\overline{x}_2 \cdot (x_3 + \overline{x}_3) \cdot (x_4 + \overline{x}_4) = (x_1\overline{x}_2 x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3) \cdot (x_4 + \overline{x}_4) =$

$= x_1\overline{x}_2 x_3x_4 + x_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$;

$f_2 = x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \cdot (x_1 + \overline{x}_1) = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$;

тоді, $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\overline{x}_2 x_3x_4 + x_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 +$

$+ x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$.

Довільна КНФ перетвориться в ДКНФ по формулі:

$\mathbf{F_{ДКНФ} = F_i + x_i\overline{x}_i = (F_i + x_i) \cdot (F_i + \overline{x}_i)}$,

де x_i - змінна, котрої немає в даному термі.

Наприклад, перетворити в ДКНФ функцію:

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2) \cdot (x_1+x_2+x_3) = [(x_1+x_2)+x_3\overline{x}_3] \cdot (x_1+x_2+x_3) =$

$= (x_1+x_2+x_3) \cdot (x_1+x_2+\overline{x}_3) \cdot (x_1+x_2+x_3) = (x_1+x_2+x_3) \cdot (x_1+x_2+\overline{x}_3)$.

6 ПОВНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

6.1 Функціонально повні базиси

Одні логічні функції, як було розглянуто вище, за допомогою суперпозиції можна виражати через інші. Цей дуже важливий метод широко застосовується при синтезі кінцевих ЦА. Важливо визначити те мінімальне число необхідних функцій, за допомогою яких ми могли б виразити будь-яку ЛФ, і, тим самим, визначити технічний базис проектування, достатній для побудови будь-якого автомата. Сформулюємо деякі визначення.

Визначення. ***Система функцій алгебри логіки*** **$\{f_1, f_2, ...f_m\}$** ***називається повною в класі R, якщо будь-яка функція φ, що належить R, може бути представлена суперпозицією функцій*** **$f_1, f_2,..., f_m$.**

Визначення. ***Система функцій*** **$\{f_1, f_2,..., f_m\}$, що є** ***повною в класі R називається базисом.***

У силу теореми, розглянутої раніше, загальне число функцій, що залежать від n аргументів дорівнює 2^{2^n}. Розглянемо цей клас функцій, як клас R. Справді, у його входять всі 2^{2^n} функції за

допомогою яких можна виразити **будь-яку іншу функцію цього класу**. Це тривіально повна система. Але, вона занадто велика і різноманітна.

Тому, у техніку застосовують інші повні системи. Інтерес представляє базис функцій І, АБО, НІ (базис 1- розширений Буля), властивості якого досить вивчені.

Іншими базисами служать системи: І, НІ (базис 2) і АБО, НІ (базис 3). Система, що базується на функції Шеффера І-НІ (базис 4) і функції Пірса (Вебба) АБО-НІ (базис 5). Ці базиси одержали найбільше поширення в техніку.

Існує багато і інших базисів. Наприклад, зі досконалої поліноміальної форми виводиться базис із функцій: **кон`юнкції, додання по mod2 і заперечення.** Заперечення можна замінити через співвідношення $\overline{x} = x \oplus 1$, і одержимо базис функції додавання по mod2, кон`юнкції і константи 1 (поліноміальний базис Жегалкіна).

6.2 Теорема Поста

Для визначення базису ФАЛ, існує теорема Поста-Яблонского (наведена без доказу).

Теорема Поста. ***Для того, щоб система функцій*** $\{f_1,f_2,...,f_m\}$ ***була повної, необхідно і досить, щоб вона містила функції, які:***

- не є константа, що зберігає нуль;

- не є константа, що зберігає одиницю;

- не є самоподвійною;

- не є лінійною;

- не є монотонною.

При визначенні повноти базисних систем, зручно користуватися таблицею, у якій приналежність елементарних функцій до того або іншого класу відзначена плюсом (+), а мінус - означає відсутність даної властивості (див. таблицю 6.1).

Таблиця 6.1- Таблиця визначення логічного базису

№	Функція	K_0 конст.0	K_1 конст.1	L лін.	M мон.	S самоподв.
1	Заперечення	−	−	+	−	+
2	Диз'юнкція	+	+	−	+	−
3	Кон`юнкція	+	+	−	+	−
4	Імплікація	−	+	−	−	−
5	Сума по mod2	+	−	+	−	−
6	Шеффера	−	−	−	−	−
7	Пірса	−	−	−	−	−
8	Еквіваленція	−	+	+	−	−

Ця таблиця дає можливість визначати базиси системи ЛФ із елементарних функцій у такий спосіб. Беруть будь-яку функцію і перевіряють стовпчики. Необхідно, щоб у всіх стовпчиках стояв знак мінуса, тобто, були відсутні зазначені властивості. Якщо в якому-небудь стовпчику є +, то до взятої функції підбирають, для компенсації, функцію з − у цьому стовпчику. Сукупність цих функцій і складе базис.

Базиси бувають **надлишковими:** І, АБО, НІ (Буля) і **мінімальними** (Шеффера, Пірса). Базис називається **мінімальним**, якщо видалення хоча б однієї функції перетворює базисну систему ЛФ у неповну. Наприклад, базис 4, 5.

Базис- І, АБО, НІ є надлишковим, тому що, використовуючи закон де - Моргана, можна видалити: або І, замінивши її на АБО-НІ, або АБО, замінивши її на І-НІ.

Проблема повноти базису еквівалентна **проблемі вибору стандартів на логічні мікросхеми**, з яких буде будуватися ЦА.

Поряд із цим важливо не тільки реалізувати сам автомат, але і загальне число застосовуваних при цьому базисних елементів. Виникає питання **про мінімальні форми побудови функцій.** Очевидно, що нормальні форми (після мінімізації) є більш економні, ніж досконалі нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ). Але з іншого боку, загальне подання про ЦА може бути оцінено тільки по досконалих нормальних формах. Після цього виконується мінімізація функції по її ДДНФ або ДКНФ.