Лекція 1

ФОРМАТИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ В МП

1. Представлення чисел з фіксованою комою (крапкою)

Автоматне зображення числа – це представлення числа N в розрядній сітці ЕОМ, в наперед заданому форматі і правилами відображення. На рис. 1 представлений звичайний машинний формат числа з фіксованою комою на n-розрядів (для знакової частини числа надано один додатковий розряд $Sg1$).

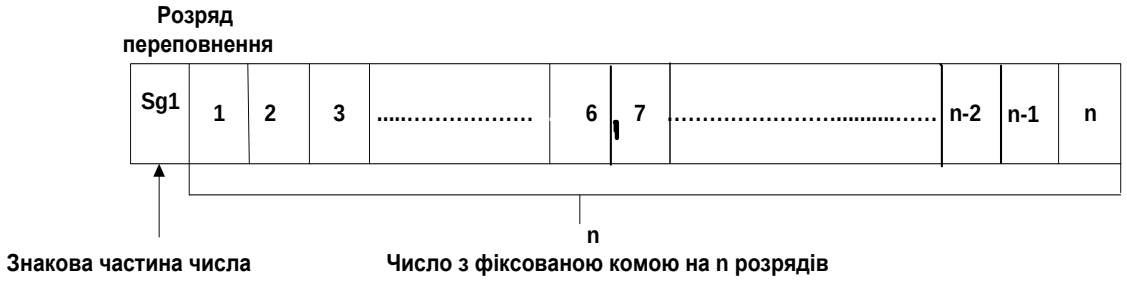


Рис.1 – Формат машинного представлення числа з фіксованою комою (крапкою) – ФФК

При представленні числа у форматі з фіксованою комою (ФФК) в двійковій системі числення увесь формат n-розрядної сітки розбивається наперед на дві основні частини-знакову і числову:

- один (або два зліва) розряди для представлення знаку числа (0 або 00 плюс «+»; 1 або 11 мінус «–»);
- наступні k розрядів визначають для розміщення цілої частини числа;
- інші (n–2–k) розрядів відводять для розміщення дробової частини числа.

Дійсно, положення коми строго фіксоване в розрядній сітці ЕОМ.

Позначимо машинне зображення числа N через N_m, тоді число N_m дорівнює: $N_m = \frac{N}{K_\Phi}$,

де K_ϕ – масштабний коефіцієнт прийнятого формату, величина якого ***залежить від числа розрядів цілої частини***, тобто для рис 5.1 $K_\Phi=2^k=2^6$.

Приклад. Записати число N=+11,00111000111 (природний запис) у форматі машини з $K_\Phi=2^6$, кількість розрядів n=16. $N_m= N\cdot 2^{-6}$.

$[N]_m$=0/000011,001110001 (машинний запис числа N, останні два розряди 11 – втрачені із за відсутності знакомісць для їх розміщення).

Для сприйняття машинної форми числа N_m знакову його частину (крайні зліва один або два розряди) відокремлюють знаком «слеш» / чи \.

Навпаки, число N визначається як $N=N_m \cdot K_Ф$=+11,001110001. Знак «+» для позитивного числа (природний запис) не записується.

Діапазон уявних чисел залежить від обраного формату цілої частини і складає:

$$R = \pm 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^1 + 2^0,$$

де k – кількість розрядів числа.

При записі чисел у форматі з фіксованою комою, якщо число виходить за межі розрядної сітки числа, молодші розряди відкидаються. При цьому, можуть виникати значні погрішності, зокрема, ділення на «0», що приводить до невизначеності і необхідності втручання у розрахунки. Проте, при роботі ЕОМ у форматі з фіксованою комою швидкість виконання арифметичних і логічних операцій висока.

Помилка представлення чисел зменшується при правильному виборі (розрахунку) масштабних коефіцієнтів $K_Ф$. У деяких ЕОМ при переповненні розрядної сітки автомата, виводять один розряд «переповнення» із зупинкою розрахунків, що порушує його нормальне функціонування. (Наприклад, у ЄС ЕОМ ХХХХ АЛП виконуються операції окремо з цілими числами і дробами, а переповнення від складання дробів додається до цілої частини).

2. Представлення чисел у форматі з рухомою комою (ФРК)

Іншою найбільш поширеною нормальною формою є представлення чисел у формі з рухомою комою. В цьому випадку в нормальній формі число записується як

$$N = (\pm m)(\pm p),$$

N – нормалізоване число; m – мантиса, а p – характеристика (порядок) числа.

Таке уявлення, в загальному випадку, не є однозначним. Тому, для нормалізованого числа вводять, як правило, обмеження. Найбільш зручною і поширеною є вимога вигляду:

$$q^{-1} \le |m| < 1, \qquad (1.1)$$

де q – основа системи.

Правило. ***Нормалізованою формою представлення чисел є форма числа, для якої справедлива умова*** **(1.1).**

В цьому випадку абсолютне значення мантиси може бути в межах від $0,q^{-1}$ до $(0,q^{-1}+0,q^{-2}+\ldots+0,q^{-n})$, тобто до 1 при $n \to \infty$, де n – кількість розрядів для запису мантиси без знаку.

Розташування коми у числі, мантису якого помножено на порядок, не є постійним. Тому і форма запису називається з рухомою комою (крапкою).

Формат машинного відображення чисел з рухомою комою представлений на рис. 2 для 16-и розрядної сітки.

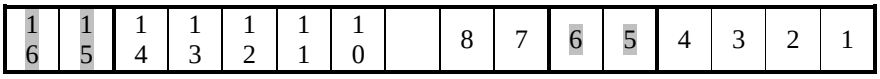


Рис.2 – Формат машинного представлення числа з рухомою комою (крапкою)

Формат уявлення цілої частини числа визначається знаком порядку і числом порядку і може змінюватися. Але завжди формат числа повинен містити: ***знак числа, мантису, знак порядку, порядок*** (де порядок визначає скільки розрядів мантиси необхідно відлічити вправо або вліво, щоб поставити кому, яка відокремлює дробову частину у кінцевому вигляді числа).

Отже, перш ніж записати число в ЕОМ з його розрядною сіткою, це число ***нормалізують***, тобто приводять до вигляду, коли в старшому розряді мантиси немає «нуля», а є «одиниця» (для двійкової системи числення). Решта всіх форм називається ***ненормалізованими***.

Порядок – це показник степені для обраної системи числення, на який потрібно помножити (для позитивного знаку порядку) або розділити (для негативного знаку порядку) мантису для перетворення, тобто, $P=q^{\pm p}$,
де P – число, яке записане в двійкових розрядах порядку. При нормалізації число зрушують порозрядно вправо (якщо є ціла частина числа) або вліво (до одиниці після коми). При зрушенні вправо порядок (тобто степінь основи) збільшується з кожним зрушенням на 1. При зрушенні вліво порядок зменшується кожного разу на 1.

Приклади. Записати двійкове число в нормальній формі (звичайний машинний код-один розряд під код знаку):

+11101,011 (природна форма); $0\backslash,11101011\cdot 2^{+5}$ (напів машинна форма); 0\11101011\0\0101(звичайний машинний код).

Для прийнятого формату (рис. 2) число запишеться у машинній формі (модифікований машинний код - два розряди під код знаку):

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1

Зн. мант. Мантиса Зн. поряд. Порядок

При записі мантиси зручно щоб старший розряд був зліва, а в полі порядку розташування старшого розряду обумовлено коментарем (визначено для окремо ЕОМ особливо).

Приклад:

+0,00011111 (природна форма) = $0\backslash 11111\cdot 2^{-3}$ (напів машинна форма) = 0\11111000\1\000011 (звичайний машинний код, наявність коми припускається, але в ЦА вона за «слешем» відсутня).

Оскільки основа $2_{(10)}=10_{(2)}$ завжди постійна, то її запис в характеристиці числа опускається, а діапазон уявних чисел визначається розрядною сіткою.

Максимальне уявне число буде при позитивних знаках мантиси і порядку, і при максимальних значеннях їх чисел, іншими словами, при запису числа – по всіх розрядах одиниці. Швидкість обчислень у ФРК менша ніж у ФФК, а точність і діапазон – вища.

Мінімальне уявне число має негативні знаки мантиси і порядку, при мінімальному значенні мантиси і максимальному (тобто одиниці по всіх розрядах) порядку.

$$N_{\max} = \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot 2^{\left(2^m - 1\right)},$$

$$N_{\min} = -2^{-1} \cdot 2^{\left(2^m - 1\right)}.$$

3. Погрішності представлення чисел

Представлення чисел в ЕОМ, як ми бачимо, завжди спричиняє за собою появу погрішностей в розрахунках, величина яких залежить від обмежень, що накладаються на автомат по розрядній сітці та формі представлення чисел.

3.1 Абсолютна похибка представлення чисел ΔN

Абсолютна похибка представлення чисел ΔN називається різниця між дійсним значенням числа N_i та його значенням N_m, отриманим після машинного відображення, операцій АЛП.

Приклад: двійкове число +11,00111000111 при n=15 і $K_Ф$=2^k, k=6, тоді N_m = 0\000011,001110001 [останні два розряди 11 – втрачені]. Перевівши в десяткові числа, отримаємо:

N =11,00111000111 (+3,2221678);
N_m =0\000011,001110001 (+3,2207031);
$\Delta N = N - N_m$ = +3,2221678– (+3,2207031)= +0,0014647.

Правило. ***Максимальна похибка ΔN для чисел формату з фіксованою комою не перевищує одиниці молодшого розряду сітки:***

$$\Delta N = 2^{[n-(k+1)]},$$

де n – розрядність ЕОМ;
k – степінь масштабного коефіцієнта $K_Ф$;
N_m – значення машинного числа в двійковій системі після його переводу (тобто з N в N_m).

3.2 Відносна похибка представлення числа δN

Відносна похибка представлення числа δN. Це відношення абсолютної погрішності ΔN до числа N в процентному відношенні, тобто:

$$\delta N = \frac{\Delta N}{N} \cdot 100\% \cdot$$

Зазвичай N визначається математично після виконання арифметичних операцій в десятковій системі.

Після визначення абсолютної погрішності визначаємо відносну похибку в %. Приклад: з попереднього рішення ΔN=0,0014647, тоді

$$\delta N = \frac{0{,}0014647}{3{,}2221678} \cdot 100\% = 0{,}04546\,\%.$$