

Об'єм стовбура зрубаного дерева та його визначення

Що розуміють під об'ємом стовбура?

Одним із головних кількісних показників зрубаного дерева є **об'єм стовбура** - об'єм простору, який займає деревина стовбура.

Основною одиницею вимірювання є: $\boxed{\text{м}^3}$

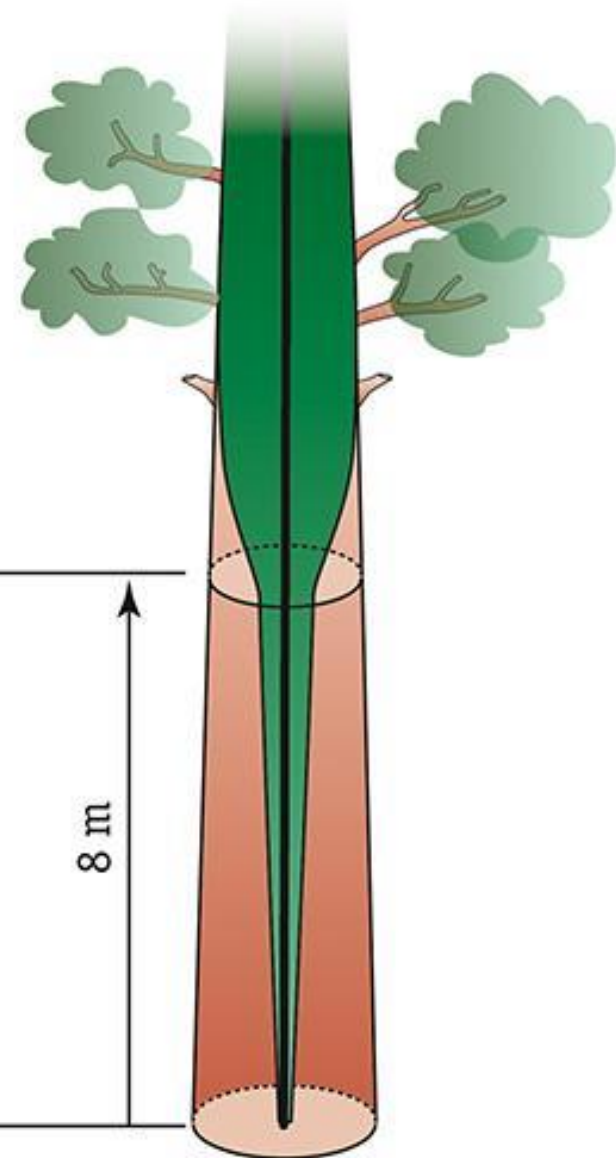
На перший погляд визначити об'єм зрубаного дерева нескладно: стовбур доступний для безпосереднього вимірювання його довжини та діаметрів у будь-якому місці.

Проте виникає принципова проблема: **стовбур дерева не є правильним геометричним тілом.**

Його діаметр поступово зменшується від окоренка до верхівки, причому інтенсивність цього зменшення неоднакова на різних ділянках. Саме тому об'єм стовбура не можна достатньо точно визначити лише як об'єм циліндра.

В основу теорії визначення об'єму зрубаних дерев покладено загальні принципи стереометрії.

Стовбур є достатньо симетричним відносно своєї центральної осі, тому його умовно розглядають як тіло обертання.



У попередній темі було встановлено, що окремі частини стовбура наближено відповідають різним правильним тілам обертання:

Частина стовбура	Геометричне наближення	Показник твірної m
окоренкова	нейлоїд	3
середня	параболоїд	1
окремі ділянки середньої частини	циліндр	0
верхівкова	конус	2

Таке представлення має важливе практичне значення: складний за формою стовбур можна умовно поділити на простіші частини та визначити їх об'єми окремо. Саме такий підхід є основою секційних методів таксації. **Нижня частина наближається до нейлоїда, середня - до циліндра або параболоїда, а верхівкова - до конуса.**

Важливо запам'ятати: Реальний стовбур $\neq$ циліндр.

Схематично:



Форма стовбура змінюється по висоті, тому для визначення його об'єму використовують спеціальні формули та таблиці.

Чому форма стовбура важлива?

Розглянемо два дерева:

Дерево А:

довжина - 20 м;

діаметр біля основи - 40 см.

Дерево Б:

довжина - 20 м;

діаметр біля основи - 40 см.

Чи обов'язково вони мають однаковий об'єм?

Ні.

Одне дерево може швидко зменшувати діаметр у напрямку до верхівки, а друге - повільніше.

Тобто на об'єм впливає не тільки:

$d \text{ і } L$

а й форма стовбура та характер зміни його діаметра за довжиною. Ця зміна називається збіжистістю стовбура.

Стовбури можуть мати однакові діаметри на певних відносних висотах, але через відмінності форми їхні фактичні об'єми можуть відрізнятись на **10–12 %**.

Площа поперечного перерізу як основа визначення об'єму

Для визначення об'єму необхідно знати площі поперечних перерізів стовбура.
Якщо поперечний переріз умовно приймаємо за круг:

$$g = \frac{\pi d^2}{4}$$

де:

g - площа поперечного перерізу, м^2 ;

d - діаметр стовбура, м.

$$g = 0,7854d^2$$

Фактичні поперечні перерізи стовбурів мають неправильну форму, але здебільшого нагадують круг або еліпс. Тому для практичних таксаційних розрахунків їх прирівнюють до відповідних геометричних фігур.

Приклад

Діаметр стовбура:

$$d = 30 \text{ см} = 0,30 \text{ м.}$$

$$g = 0,7854 \times 0,30^2$$

$$g = 0,0707 \text{ м}^2.$$

Отже, площа поперечного перерізу становить приблизно:

$$0,071 \text{ м}^2$$

Загальний принцип визначення об'єму

Уявімо, що весь стовбур поділено на дуже велику кількість надзвичайно тонких поперечних шарів. Для одного такого шару:

$$dV = g(x) dx$$

$g(x)$ - площа поперечного перерізу на певній відстані від основи;
 dx - нескінченно мала товщина шару.

Тоді загальний об'єм:

$$V = \int_0^L g(x) dx$$

А оскільки:

$$g(x) = \pi y^2,$$

де y - радіус стовбура на відповідній відстані, то:

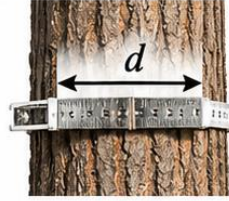
$$V = \pi \int_0^L y^2 dx$$

Саме інтегрування твірної стовбура в джерелі розглядається як теоретична основа визначення його об'єму.

1

Діаметр

Вимірюємо діаметр стовбура на певній висоті (наприклад, 1,3 м).
Позначення: d (м або см).



Від діаметра до об'єму

Наприклад:
 $d = 32$ см
(0,32 м)

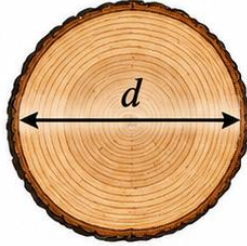
2

Площа поперечного перерізу

Обчислюємо площу поперечного перерізу за діаметром:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Позначення: A (м²).



Наприклад:
 $d = 0,32$ м
 $A = \frac{3,1416 \cdot 0,32^2}{4}$
 $= 0,080$ м²

3

Зміна площі вздовж стовбура

Діаметр (а отже і площа перерізу) змінюється по висоті стовбура:

$$A = f(h).$$

Площі перерізів на різних висотах різні (у основі більші, у вершини – менші).



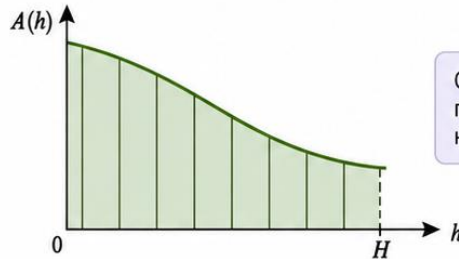
4

Інтегрування

Об'єм стовбура – це інтеграл від площі поперечного перерізу вздовж його висоти:

$$V = \int_0^H A(h) dh.$$

На практиці інтегрування замінюють наближеними методами (формули, таблиці, розрядні числа).



Об'єм стовбура – це площа під кривою $A(h)$ на відрізку від 0 до H .

5

Об'єм стовбура

У результаті інтегрування (або за наближеними методами) отримуємо об'єм стовбура:

$$V \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$V = \int_0^H A(h) dh$$

**Об'єм стовбура**

$$V \text{ (м}^3\text{)}$$

— кількість деревини в стовбурі від основи до вершини.

Логіка визначення об'єму стовбура

Чому інтегральний підхід складно застосовувати безпосередньо?

Теоретично можна описати форму всього стовбура математичним рівнянням і проінтегрувати його.

Але на практиці виникає проблема: **форма стовбура змінюється нерівномірно.**

Отже:

- ✓ в окоренковій частині твірна має переважно **увігнутий характер**;
- ✓ у середній і верхній частинах - більш-менш **опуклий**.

Тому одним простим рівнянням точно описати весь стовбур складно. Саме звідси виникає практична необхідність використовувати **наближені стереометричні формули**.

Фізичні методи визначення об'єму стовбура

Поряд із геометричними методами в лісовій таксації застосовують **фізичні методи визначення об'єму деревини**.

Вони ґрунтуються на законах фізики, насамперед:

- ✓ законі Архімеда;
- ✓ законах рівноваги рідини;
- ✓ співвідношенні між масою, об'ємом і щільністю.

Виділено **три фізичні методи**:

- ✓ Ксилометричний
- ✓ Гідростатичний
- ✓ Ваговий

Фізичні методи особливо корисні для зразків деревини неправильної форми, для яких складно застосувати звичайні стереометричні формули.

Ксилометричний метод

В основу методу покладено положення: тіло, занурене в рідину, витісняє об'єм рідини, що дорівнює об'єму зануреного тіла.

Для вимірювання використовують спеціальний прилад - **ксилометр**.

Ксилометр

Спеціальний прилад
для визначення об'єму деревини
методом витіснення води



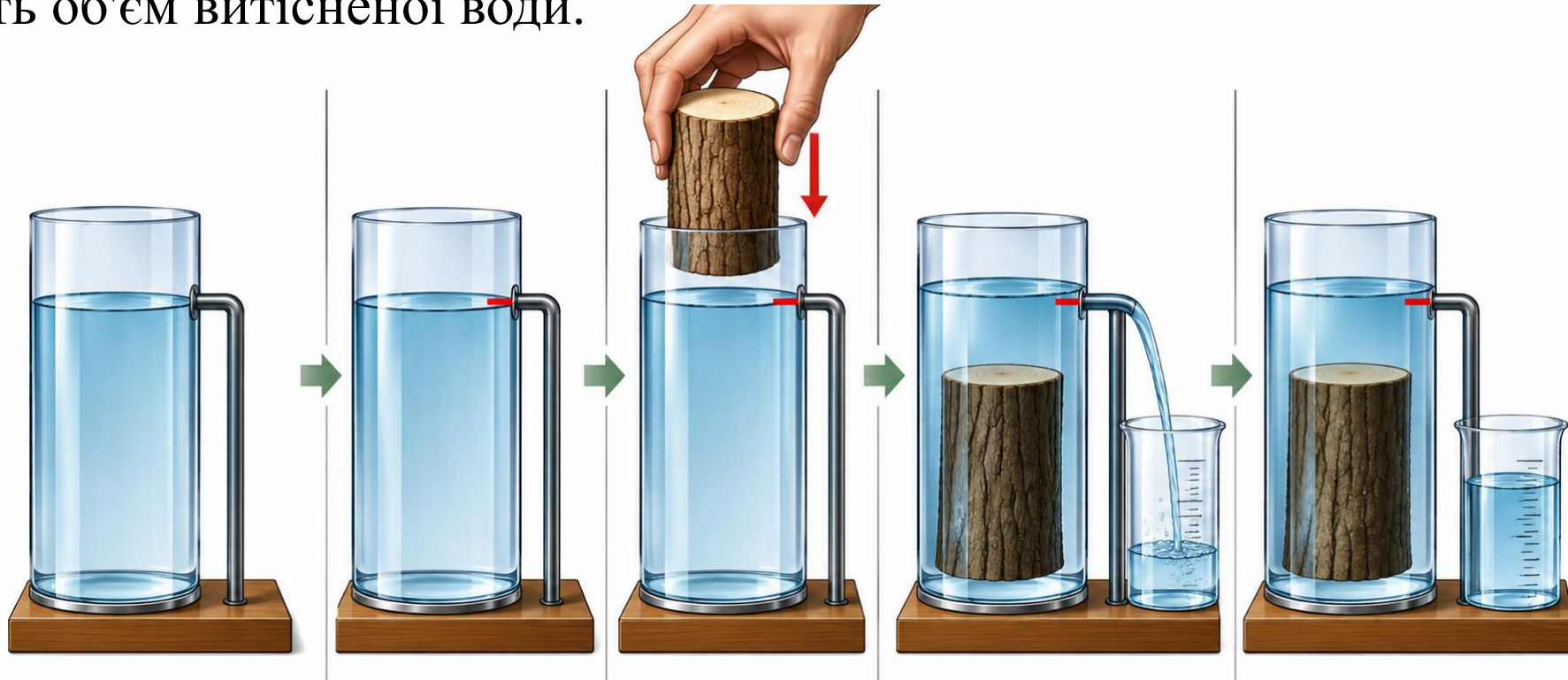
Об'єм деревини дорівнює об'єму
витісненої води.

$$V_{\text{деревини}} = V_{\text{витісненої води}}$$

Ксилومتر із постійним рівнем води

Найпростіша конструкція являє собою посудину, заповнену водою до певного рівня. Послідовність визначення:

1. Ксилومتر наповнюють водою.
2. Встановлюють початковий рівень.
3. Зразок деревини повністю занурюють у воду.
4. Вода витісняється.
5. Вимірюють об'єм витісненої води.



Ксилومتر зі змінним рівнем води

Такий прилад має градуйовану шкалу.

До занурення:

Фіксують:

$$V_1 = 25,0 \text{ л}$$

V_1

Після занурення:

$$V_2 = 31,4 \text{ л}$$

— початковий показник;

Тоді:

після занурення:

$$V = 31,4 - 25,0 = 6,4 \text{ л.}$$

V_2

Оскільки:

— кінцевий показник.

$$1000 \text{ л} = 1 \text{ м}^3,$$

то:

Об'єм деревини:

$$V = 0,0064 \text{ м}^3.$$

$$V = V_2 - V_1$$

Для свіжозрубаної деревини метод є достатньо точним. Підсохла деревина може **поглинати частину води**, тому необхідно враховувати відповідну поправку.

Гідростатичний метод

Метод базується на законі Архімеда.

Зразок деревини:

1.зважують у повітрі;

2.занурюють у воду;

3.зважують у воді;

4.визначають втрату маси.

Різниця показників відповідає масі витісненої води.

Для води приблизно:

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

$$V = \frac{m_{\text{пов}} - m_{\text{вод}}}{\rho_{\text{води}}}$$

Маса зразка в повітрі:

$$m_1 = 12,03 \text{ кг.}$$

Маса у воді:

$$m_2 = 9,81 \text{ кг.}$$

Різниця:

$$12,03 - 9,81 = 2,22 \text{ кг.}$$

Тоді:

$$V = \frac{2,22}{1000}$$

$$V = 0,00222 \text{ м}^3$$

Тобто об'єм зразка становить 2,22 л.



Ваговий метод

Ваговий метод ґрунтується на співвідношенні:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

де:

V - об'єм деревини, м^3 ;

m - маса, кг;

ρ - щільність деревини, $\text{кг}/\text{м}^3$.



Основна проблема методу

Щільність деревини **не є сталою величиною.**

Вона залежить насамперед від:

- ✓ деревної породи;
- ✓ вологості;
- ✓ умов зберігання;
- ✓ сезону;
- ✓ строків після заготівлі.

Тому помилка у визначенні щільності безпосередньо спричиняє помилку в розрахованому об'ємі.

Маса партії деревини:

$$m = 5200 \text{ кг.}$$

Встановлена щільність:

$$\rho = 650 \text{ кг/м}^3.$$

Тоді:

$$V = \frac{5200}{650} = 8,0 \text{ м}^3.$$

Отже:

$$V = 8,0 \text{ м}^3$$

Порівняння фізичних методів

Метод	Що визначається	Основний принцип	Основне застосування
Ксилметричний	об'єм витісненої води	витіснення рідини	точні дослідження зразків
Гідростатичний	різниця маси у повітрі та воді	закон Архімеда	дослідження невеликих зразків
Ваговий	маса деревини	$V=m/\rho$	великі партії деревини

Формули визначення об'єму стовбура

Стереометричні формули поділяють на:

прості

складні (секційні)

Прості формули

Стовбур або його частину розглядають як **одне ціле**.

Складні формули

Стовбур поділяють на декілька секцій, визначають об'єм кожної, після чого результати додають.

Проста формула Губера

Також називається **формулою серединного перерізу**.

$$V = g_{1/2} L$$

де:

$g_{1/2}$ - площа поперечного перерізу на середині довжини стовбура, м²;

L - довжина стовбура, м.

1. Вимірюємо довжину стовбура.
2. Знаходимо середину.
3. Вимірюємо діаметр у середині.
4. Розраховуємо площу:

$$g_{1/2} = 0,7854d^2.$$

5. Розраховуємо:

$$V = g_{1/2} L.$$

Приклад

$$L = 20 \text{ м}$$

$$d_{1/2} = 30 \text{ см} = 0,30 \text{ м}$$

Тоді:

$$g_{1/2} = 0,7854 \times 0,30^2 = 0,0707 \text{ м}^2$$

$$V = 0,0707 \times 20$$

$$V = 1,414 \text{ м}^3$$

Формула Шиффеля

Використовуються площі перерізів на:

та

$$\frac{1}{4}L$$

$$\frac{3}{4}L.$$

Формула:

$$V = \frac{g_{1/4} + g_{3/4}}{2} L$$

Таким чином, замість одного серединного перерізу враховуються дві точки стовбура.

Формула Смаліана

Використовують площі **нижнього та верхнього перерізів**.

$$V = \frac{g_{\text{н}} + g_{\text{в}}}{2} L$$

де:

$g_{\text{н}}$ — площа нижнього перерізу;

$g_{\text{в}}$ — площа верхнього перерізу.

Приклад

Нехай:

$$g_{\text{н}} = 0,1257 \text{ м}^2$$

$$g_{\text{в}} = 0,0314 \text{ м}^2$$

$$L = 10 \text{ м.}$$

Тоді:

$$V = \frac{0,1257 + 0,0314}{2} \times 10$$

$$V = 0,7855 \text{ м}^3.$$

Отже:

$$V \approx 0,786 \text{ м}^3$$

Формула Госфельда

Для зрізаної частини стовбура у джерелі наведено:

$$V = \frac{3g_{1/3} + g_{\text{в}}}{4} L$$

де:

$g_{1/3}$ — площа поперечного перерізу на $1/3$ довжини;

$g_{\text{в}}$ — площа верхнього перерізу.

Для цілого стовбура, якщо площу верхнього перерізу прийняти рівною нулю:

$$V = \frac{3}{4} g_{1/3} L$$

Формула Симпсона

Формула враховує три перерізи:

- ✓ нижній;
- ✓ серединний;
- ✓ верхній.

$$V = \frac{L}{6} (g_{\text{н}} + 4g_{1/2} + g_{\text{в}})$$

Приклад

Нехай:

$$g_{\text{н}} = 0,126 \text{ м}^2;$$

$$g_{1/2} = 0,071 \text{ м}^2;$$

$$g_{\text{в}} = 0,031 \text{ м}^2;$$

$$L = 10 \text{ м.}$$

Тоді:

$$V = \frac{10}{6} (0,126 + 4 \times 0,071 + 0,031)$$

$$V = \frac{10}{6} (0,441)$$

$$V = 0,735 \text{ м}^3$$

Порівняння простих формул

Формула	Які перерізи необхідні	Формула
Губера	середина	$V = g_{1/2} L$
Шиффеля	1/4 і 3/4 довжини	$V = \frac{g_{1/4} + g_{3/4}}{2} L$
Смаліана	нижній і верхній	$V = \frac{g_{\text{н}} + g_{\text{в}}}{2} L$
Госфельда	1/3 довжини і верхній	$V = \frac{3g_{1/3} + g_{\text{в}}}{4} L$
Симпсона	нижній, середній, верхній	$V = \frac{L}{6} (g_{\text{н}} + 4g_{1/2} + g_{\text{в}})$

Варто запам'ятати головну відмінність: Формули відрізняються насамперед тим, у яких місцях стовбура необхідно вимірювати діаметри.

Складні, або секційні, формули

Якщо потрібна вища точність, стовбур не розглядають як одне геометричне тіло. Його поділяють:

стовбур $\rightarrow$ секція 1 $\rightarrow$ секція 2 $\rightarrow$... $\rightarrow$ верхівка

Секції зазвичай приймають довжиною **2 м**.

Для кожної секції окремо визначають об'єм, після чого:

$$V_{\text{ст}} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + V_{\text{верх}}$$

Складна формула Губера

Для кожної секції визначають площу **серединного перерізу**.
Якщо всі секції мають однакову довжину l :

$$V_1 = g_1 l$$

$$V_2 = g_2 l$$

$$V_3 = g_3 l$$

і т. д.

Тоді:

$$V = l(g_1 + g_2 + \dots + g_n) + V_{\text{верх}}$$

Верхівку наближено приймають за конус:

$$V_{\text{верх}} = \frac{1}{3} g_{\text{осн.верх}} l_{\text{верх}}$$

Отже:

$$V = l \sum_{i=1}^n g_i + \frac{1}{3} g_{\text{осн.верх}} l_{\text{верх}}$$

Приклад визначення об'єму стовбура секційним методом

Маємо зрубаний стовбур:

L=11 м.

Поділимо його на:

- ✓ п'ять секцій по 2 м;
- ✓ верхівку довжиною 1 м.

Серединні діаметри секцій:

Секція	d, см	g, м²	l, м	V, м³
1	38	0,1134	2	0,2268
2	35	0,0962	2	0,1924
3	31	0,0755	2	0,1510
4	27	0,0573	2	0,1146
5	21	0,0346	2	0,0692

Сума секцій:

$$V_{сек} = 0,2268 + 0,1924 + 0,1510 + 0,1146 + 0,0692$$

$$V_{сек} = 0,7540 \text{ м}^3.$$

Якщо площа основи верхівки:

$$g_{осн.верх} = 0,020 \text{ м}^2,$$

то:

$$V_{верх} = \frac{1}{3} \times 0,020 \times 1 = 0,0067 \text{ м}^3.$$

Загальний об'єм:

$$V = 0,7540 + 0,0067$$

$V \approx 0,761 \text{ м}^3$

Чому секційний метод точніший?

Варіант 1 — проста формула



- Один або декілька характерних перерізів
- Одна формула
- Одне наближення для всього стовбура

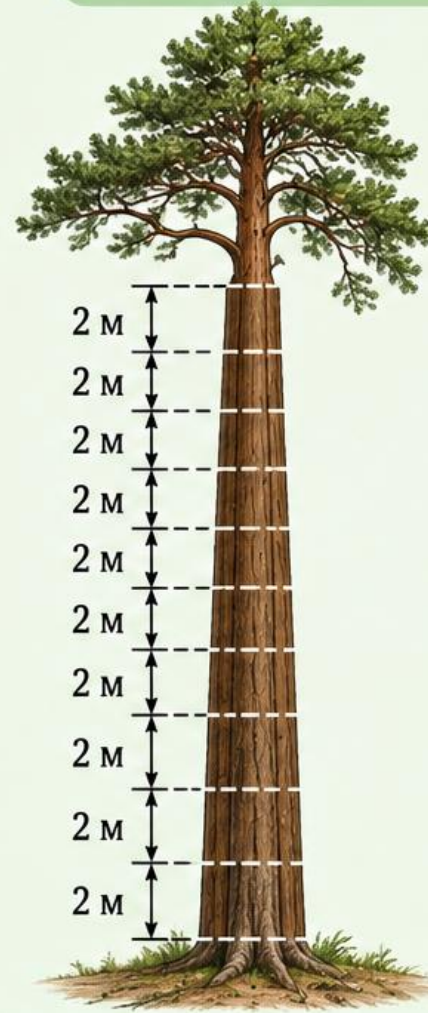
Наприклад:



$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

Одне наближення для всього стовбура

Варіант 2 — секційний метод



- Стовбур поділяють на короткі секції (наприклад, по 2 м)
- Визначають об'єм кожної частини
- Підсумовують усі часткові об'єми



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{10}$$

Чим коротші секції, тим краще геометрична модель відповідає реальній формі стовбура.

Чим коротші секції, тим краще геометрична модель відповідає реальній формі стовбура.

Точність визначення об'єму

Еталонним за точністю вважається **ксилометричний спосіб**. Складні стереометричні формули дають змогу визначати об'єм стовбура з помилкою переважно **не більше 2–3 %**. Водночас прості формули можуть давати більші відхилення, особливо в окоренковій частині через кореневі напливи. У джерелі зазначено, що проста формула Смаліана може суттєво завищувати об'єм, так само як формула Симпсона; для формул Губера, Госфельда і Шиффеля відхилення можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Тому слід розуміти:

Тому слід розуміти:

більше вимірювань → краще врахування форми → вища точність

але одночасно:

більше вимірювань → більші витрати часу

Отже, вибір способу є компромісом між точністю та трудомісткістю.