

МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ

Житомирський військовий інститут
імені С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

П.В. ФРИЗ

**ОСНОВИ ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ
КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ**

Підручник

*Затверджено Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України для слухачів, курсантів
та студентів вищих навчальних закладів*

Житомир
2012

УДК 629.78
ББК 39.62
Ф88

*Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту
України як підручник для слухачів, курсантів та студентів вищих
навчальних закладів*
(лист №1/11-8772 від 22 вересня 2011 року)

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського
військового інституту імені С.П. Корольова Національного авіа-
ційного університету*
(протокол №15 від 31 травня 2011 року)

Рецензенти:

Г.Л. Баранов – доктор технічних наук, професор

І.Г. Грабар – доктор технічних наук, професор

В.П. Манойлов – доктор технічних наук, професор

Фриз П.В.

**Ф88 Основи орбітального руху космічних апаратів: підручник
/П.В. Фриз . –Житомир: ЖВІ НАУ, 2012. –348 с.: іл.**

У підручнику розглядаються теоретичні та прикладні питання орбітального руху космічних апаратів здебільшого стосовно до завдань видового спостереження Землі. Разом з тим виділені особливості інших орбіт, наприклад, стаціонарних, високоеліптичних, навігаційних і т.п.

Підручник призначений для курсантів та студентів, які мають відповідну підготовку. Його можна використовувати і для навчання ад'юнктів, здобувачів, слухачів та фахівців з експлуатації космічних засобів.

Автор: заслужений працівник освіти України, кандидат технічних наук, доцент **Фриз П.В.**

УДК 629.78
ББК 39.62

ЗМІСТ

Відомості про автора	3
ПЕРЕДМОВА.....	8
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	10
ВСТУП.....	12
В.1. Загальна характеристика космічних систем спостереження як об'єкта вивчення	13
В.2. Роль теорії польоту космічних апаратів у задачах побудови і експлуатації космічних систем спостереження	17
В.3. Історичний аспект розвитку теорії космічних польотів	19
В.4. Загальна характеристика підручника	24
РОЗДІЛ 1. АСТРОНОМІЧНІ ТА ФІЗИЧНІ УМОВИ КОСМІЧНИХ ПОЛЬОТІВ	27
1.1. Загальні відомості про Всесвіт і Сонячну систему.....	28
1.2. Основи сферичної астрономії	31
1.2.1. Географічні координати наземних пунктів	32
1.2.2. Небесна сфера	36
1.2.3. Основні точки і лінії небесної сфери	38
1.3. Космічний простір як середовище функціонування космічних систем	42
1.4. Основні параметри Землі, її атмосфери та Місяця.....	45
1.4.1. Основні параметри Землі.....	45
1.4.2. Основні параметри атмосфери Землі	51
1.4.3. Основні параметри Місяця.....	55
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ	58
2.1. Закони взаємодії небесних тіл та їх інтерпретація для штучних супутників Землі.....	58
2.1.1. Закон всесвітнього тяжіння.....	58
2.1.2. Потенційна та кінетична енергія тіл у гравітаційному полі Землі.....	60
2.1.3. Закони небесної механіки Кеплера	62
2.1.4. Основні закони і закономірності класичної механіки	65
2.1.5. Сили, що діють на космічні апарати в орбітальному польоті.....	70
2.2. Час	72
2.2.1. Одиниці часу, що обумовлені обертанням Землі навколо	73

своїєї осі	78
2.2.2. Одиниці часу, що обумовлені рухом Землі навколо Сонця	78
2.2.3. Системи обчислення часу.....	81
2.2.4. Перерахування часу із однієї системи в іншу.....	87
2.3. Основні системи координат.....	91
2.3.1. Класифікація систем координат.....	92
2.3.2. Матричний запис формул перетворення координат.....	95
2.3.3. Основні системи небесних координат.....	97
2.3.4. Перехід від однієї системи небесних координат до іншої	101
2.3.5. Основні системи координат для опису орбітального руху космічних апаратів	103
2.3.6. Перерахування координат із однієї системи в іншу в задачах теорії польоту космічних апаратів	109
РОЗДІЛ 3. НЕЗБУРЕНИЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ	
.....	114
3.1. Умови незбуреного орбітального руху	114
3.2. Рівняння незбуреного орбітального руху в інерціальній системі координат.....	116
3.3. Кеплерові елементи орбіт	121
3.3.1. Спеціальні системи координат	121
3.3.2. Характеристика кеплерових елементів орбіти	123
3.4. Зв'язок кеплерових елементів орбіт з їх параметрами в інерціальній системі координат.....	130
3.5. Параметри незбуреного орбітального руху космічних апаратів.....	132
3.5.1. Кутові параметри орбітального руху. Рівняння Кеплера .	133
3.5.2. Лінійні параметри орбітального руху. Рівняння орбіти ...	139
3.5.3. Комплексний підхід до опису орбітального руху.....	144
3.6. Прикладні задачі орбітального руху	146
3.6.1. Прогнозування орбітального руху	148
3.6.2. Побудова трас космічних апаратів.....	151
3.6.3. Визначення параметрів орбіти за результатами траскторних вимірів	160
3.6.4. Умови видимості наземних об'єктів із космічних апаратів.....	163

3.6.5. Умови освітленості наземних об'єктів Сонцем.....	174
3.6.6. Умови видимості космічних апаратів із наземних пунктів.....	179
3.6.7. Умови освітленості космічних апаратів Сонцем	181
РОЗДІЛ 4. ЗБУРЕНИЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ	186
4.1. Збурювальні фактори і методи їх обліку	186
4.2. Збурення орбіт, викликані несферичністю Землі	191
4.2.1. Потенціал несферичної Землі	191
4.2.2. Вплив несферичності Землі на елементи орбіт	193
4.3. Збурення орбіт, викликані опором атмосфери Землі	197
4.3.1. Механізм дії аеродинамічних сил	197
4.3.2. Вплив атмосфери Землі на елементи орбіт	199
4.3.3. Час балістичного існування космічних апаратів	201
4.4. Збурення орбіт, викликані притяганням Сонця та Місяця..	204
4.5. Вибір орбіт для виконання цільових завдань	208
4.5.1. Класифікація орбіт і їх коротка характеристика.....	209
4.5.2. Основні вимоги і обмеження для вибору орбіт	212
4.5.3. Вибір окремих параметрів орбіт	214
4.6. Специфічні види орбіт	216
4.6.1. Особливості та параметри стаціонарних орбіт.....	216
4.6.2. Особливості та параметри високоеліптичних орбіт.....	220
4.6.3. Особливості та параметри сонячно-синхронних орбіт....	224
4.7. Технологія створення орбітальних групувань	230
4.7.1. Балістична структура орбітального групування та час його існування	230
4.7.2. Особливості орбітальних групувань на сонячно-синхронних орбітах.....	233
4.7.3. Приклади побудови орбітальних групувань.....	236
РОЗДІЛ 5. КЕРОВАНИЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ.....	241
5.1. Фізичні основи реактивного руху.....	242
5.1.1. Основні співвідношення механіки тіл змінної маси. Рівняння І.В. Мещерського	244
5.1.2. Основи теорії реактивного руху. Перша задача К.Е. Ціолковського.....	248
5.1.3. Друга задача К.Е. Ціолковського	256
5.2. Запуск ракет-носіїв і виведення космічних апаратів на орбіту.....	259

5.2.1. Зв'язок елементів орбіт з початковими умовами	260
5.2.2. Основні системи координат, які використовуються при виведенні космічних апаратів на орбіту	262
5.2.3. Сили, що діють на ракети-носії у польоті.....	266
5.2.4. Схеми виведення космічних апаратів на різні орбіти.....	277
5.2.5. Способи створення керуючих моментів	280
5.3. Міжорбітальні маневри космічних апаратів	283
5.3.1. Класифікація маневрів космічних апаратів.....	283
5.3.2. Енергетичні характеристики маневрів	285
5.3.3. Основні види міжорбітальних маневрів космічних апаратів	290
5.3.4. Компланарні переходи.....	291
5.3.5. Некомпланарні переходи	298
5.4. Коригувальні маневри космічних апаратів	305
5.4.1. Системи координат для коригувальних маневрів	305
5.4.2. Складові імпульсу корекції в різних системах координат.....	307
5.4.3. Вплив складових імпульсу корекції на елементи орбіт космічних апаратів	308
5.4.4. Аналіз ефективності імпульсів корекції	311
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	316
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	322
ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК	339
ДОДАТОК 1.....	340
ДОДАТОК 2.....	343

ПЕРЕДМОВА

На сучасному етапі одним із пріоритетних напрямків наукової, економічної, військової та інших сфер життя людства є космічна діяльність розвинених держав. Основу такої діяльності складають теоретичні дослідження, розробка, виготовлення, розгортання та застосування за цільовим призначенням (експлуатація) космічних засобів.

При цьому особливе місце серед них займають космічні засоби **спостережень** за об'єктами, явищами та процесами на земній кулі та в навколоземному просторі в інтересах безпеки та оборони як окремих держав, так і їх коаліцій.

На всіх етапах космічної діяльності будь-якої країни одним із визначальних факторів виступає **орбітальний рух** космічних апаратів (КА) як носіїв цільової апаратури. Науковою основою для вивчення такого складного явища, як орбітальний рух, виступає *теорія польоту* КА, що має й інші споріднені назви: динаміка польоту, механіка польоту, космодинаміка і т.п.

Якщо для дослідників, розроблювачів і виготовлювачів ракетно-космічної техніки потрібні більш-менш повні знання теорії польоту КА, ракет і інших космічних об'єктів, то для фахівців з *експлуатації* цих засобів досить тією чи іншою мірою опанувати *основи* теорії польоту.

У контексті сказаного у Житомирському військовому інституті імені С.П. Корольова Національного авіаційного університету, де уже більше 30 років ведеться підготовка обслуговуючого персоналу для експлуатації космічних систем, сформувалася та викладається навчальна дисципліна “Теоретичні основи польоту космічних апаратів” (ТОП КА).

Зважаючи на те, що у широкому розумінні термін “космічний політ” означає як поступальний, так і обертальний рух КА,

на думку автора, настав час розділити навчальну дисципліну ТОП КА на дві складові: основи *орбітального* руху КА та основи *кутового* руху КА.

В такому разі, по-перше, виключається із назви термін “теоретичні”, оскільки насправді для фахівців з експлуатації потрібні не тільки теоретичні, а перш за все прикладні питання орбітального руху КА. А по-друге, оскільки політ КА вивчається відносно *сучасних* супутникових систем оптико-електронного та радіолокаційного спостережень високого розрізнення, коли вузьке поле зору КА наводиться на заданий об’єкт за рахунок кутових переміщень КА, то виникає необхідність виділення основ *кутового* руху в окрему навчальну дисципліну.

Крім того, оскільки історично склалося так, що термінологія у галузі ракетно-космічної техніки первісно сформувалася російською мовою, то виникає необхідність у виданні відповідних україномовних навчальних посібників та підручників.

Запропонований підручник включає вступ до навчальної дисципліни і п’ять розділів основного матеріалу. При цьому послідовно викладаються астрономічні і фізичні умови польоту КА, теоретичні основи і прикладні питання незбуреного, збуреного і керованого орбітального руху, а також виведення КА на орбіти.

В основу навчального матеріалу покладені роботи відомих вітчизняних і закордонних авторів, список яких наведений наприкінці підручника, а також навчально-методичні матеріали, досвід викладання і результати наукових досліджень автора [40, 51, 62...64].

Автор вдячний рецензентам доктору технічних наук, професору Баранову Г.Л., доктору технічних наук, професору Грабару І.Г., доктору технічних наук, професору Манойлову В.П. за критичні зауваження і корисні поради, що сприяли підвищенню якості подачі навчальної інформації, а також Климчук Л.А. за літературну редакцію рукопису та всім, хто сприяв підготовці і виданню підручника.

Заздалегідь вдячний тим читачам, які скористаються підручником, критично оцінять його і внесуть конструктивні пропозиції щодо його вдосконалення.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА



ФРИЗ Петро Васильович – професор кафедри геоінформаційних та космічних систем Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова (ЖВІ НАУ), заслужений працівник освіти України, кандидат технічних наук, доцент, вчений секретар спеціалізованої вченої ради інституту по захисту кандидатських дисертацій, полковник ЗСУ у відставці, ветеран військової служби та ветеран праці.

Військова освіта: закінч

нічне училище ППО та у 1973 р. – Військову інженерну радіотехнічну академію ППО ім. Л.О. Говорова (м. Харків). Має великий досвід бойової роботи у зенітно-ракетних військах ППО та випробувань і експлуатації космічних систем колишнього Союзу.

З 1979 р. – на викладацьких та керівних посадах у ЖВІ НАУ. Захистив кандидатську дисертацію (1989 р.) з питань ефективного керування космічними апаратами. Опублікував понад 160 наукових робіт, у тому числі 15 навчальних посібників. Брав участь у розробці космічних програм України.

Як колишній заступник начальника інституту з навчальної та наукової роботи добре орієнтується в напрямках підготовки фахівців та тематиці наукових досліджень, має хороші організаторські здібності та досвід у виборі та обґрунтуванні перспективних напрямків розвитку кафедри та інституту.

Працює над монографією з питань моделювання процесів та планування роботи космічних систем спостереження Землі. Активно допомагає ад'юнктам та здобувачам у розробці наукових статей, у підготовці і захисті дисертацій. Підготував трьох кандидатів наук та керує підготовкою трьох здобувачів наукового ступеня.

Має 32-річний досвід викладання основ орбітального та кутового руху КА, їх побудови та експлуатації в орбітальному польоті, в тому числі і для іноземних фахівців. Добре володіє сучасними методами наукових досліджень та комп'ютерними технологіями. Наукові інтереси – моделювання процесів космічних спостережень Землі та ефективність космічних інформаційних систем.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БЗК – бортовий забезпечувальний комплекс
БІ – бортова інформація
БКУ – бортовий комплекс управління
БС – балістична структура
БСК – бортовий спеціальний комплекс
БЦА – бортова цільова апаратура
ВВ – висхідний вузол
ВЕО – високоеліптична орбіта
ВСп – видове спостереження
ГгССК – географічна *сферична* система координат
ГдССК – геодезична *сферична* система координат
ГрСК – гринвіцька прямокутна система координат
ГцССК – геоцентрична *сферична* система координат
ДЗЗ – дистанційне зондування Землі
ДІ – допоміжна інформація
ЕМВ – електромагнітне випромінювання
ЗвСК – зв'язана прямокутна система координат
ЗмСК – земна прямокутна система координат
ТІ – траєкторна інформація
ІСК – інерціальна прямокутна система координат
КА – космічний апарат
КІ – командна інформація
КІС – космічна інформаційна система
КК – космічний комплекс
КС – космічна система
КСС – космічна система спостережень
НКУ – наземний комплекс управління
НО – наземний об'єкт
НП – наземний пункт
НСК – наземний спеціальний комплекс
ОГ – орбітальне групування
ОЕСп – оптико-електронне спостереження
ОП – обслуговуючий персонал
ОрНСК – орбітальна *нерухома* система координат
ОрРСК – орбітальна *рухома* система координат
ППІ – пункт прийому інформації

ПТ – підсупутникова точка
ПЧП – просторово-часове положення
РД – робоча ділянка
РКК – ракетно-космічний комплекс
РКП – ракета космічного призначення
РЛСп – радіолокаційне спостереження
РН – ракета-носій
СК – система координат
СлІ – службова інформація
ССО – сонячно-синхронна орбіта
СтЗСК – стартова “заморожена” прямокутна система координат
СтО – стаціонарна орбіта
СтПСК – стартова початкова прямокутна система координат
СтСК – стартова прямокутна система координат
ТВРД – точка весняного рівнодення
ТМІ – телеметрична інформація
ТОП – теоретичні основи польоту
ТОРД – точка осіннього рівнодення
ТППСК – топоцентрична пунктова *прямокутна* система координат
ТПССК – топоцентрична пунктова *сферична* система координат
ЦІ – цільова інформація
ЦУП – центр управління польотом
ЦОІ – центр обробки інформації
ШвСК – швидкісна прямокутна система координат
ШСЗ – штучний супутник Землі

ВСТУП

Загальновідомо, що одним із пріоритетів провідних держав світу на сучасному етапі є активне використання космічного простору у військових цілях, а також в інтересах науки, господарської та інших видів діяльності [2, 3, 5, 9, 35, 36, 41 55, 58]. Нині “космічний клуб” нараховує кілька десятків економічно розвинених країн, провідне положення серед яких займають США, Росія, Індія, Україна, Китай та ін. При цьому космічними програмами ряду держав передбачається розробка нових або вдосконалення існуючих космічних систем (КС) розвідки, навігації, зв’язку та інших космічних інформаційних систем (КІС).

Особливе місце серед перспективних КІС займають космічні системи спостережень (КСС), зокрема, космічні системи дистанційного зондування Землі (КС ДЗЗ) та КС подвійного призначення, створювані, у першу чергу, в інтересах національної безпеки і оборони. Аналіз збройних конфліктів останніх років у Югославії, в Афганістані, в Іраку та інших країнах показав, що застосування КС є одним із пріоритетів США і країн НАТО в забезпеченні успішних бойових дій [6, 23, 24, 38].

Держави, які володіють КСС, зацікавлені в одержанні від них достовірної різноманітної цільової інформації (ЦІ) про об’єкти і явища у космічному просторі, в атмосфері, у літосфері, у гідросфері і на поверхні Землі із заданими повнотою, періодичністю, тривалістю, оперативністю, точністю та іншими істотними характеристиками при мінімальних витратах.

При цьому, якщо ЦІ представляється користувачам у формі *видимих* зображень об’єктів, то говорять про космічні системи видового спостереження (КС ВСП).

Космічна система видового спостереження – це складна супутникова інформаційна система, що формує ЦІ у вигляді *видимих для людського ока* зображень наземних об’єктів (НО). Первинним джерелом цієї інформації служить електромагнітне випромінювання (ЕМВ), що утворюється або відбивається НО в оптичному і в радіодіапазонах.

Залежно від типу джерела інформації і способу її одержання розрізняють КС: фотоспостережень (ФСп); оптико-електронного спостереження (ОЕСп); радіолокаційного спостереження (РЛСп), радіоелектронного спостереження (РЕСп) і т.п.

Крім того, інколи ОЕСп називають інфрачервоним спостереженням, підкреслюючи використовуваний при цьому тільки *інфрачервоний* піддіапазон оптичного діапазону, а РЛСп – мікрохвильовим спостереженням, указуючи на застосовуваний *мікрохвильовий* піддіапазон радіодіапазону.

При цьому термін ВСп є узагальнюючим для цих понять, причому в рамках даного підручника будемо розуміти терміни КС ВСп, КСС як синоніми.

В.1. Загальна характеристика космічних систем спостереження як об'єкта вивчення

Характерною рисою будь-яких КС є те, що вони мають у своєму складі (рис. В.1) різноманітні *технічні* орбітальні і наземні засоби з відповідним програмно-алгоритмічним забезпеченням і *обслуговуючий персонал* (ОП), а отже, відносяться до складних ергатичних (людино-машинних) систем. При цьому людині відводиться визначальна роль при керуванні цими системами, при виявленні несприятливих ситуацій і прийнятті рішень для виходу із них, а також при оцінюванні результатів обробки ЦІ.

Орбітальні засоби КСС являють собою один або декілька КА, що функціонують на навколоземних орбітах. Якщо декілька однотипних КА певним чином розміщені у просторі і в часі та виконують єдине завдання, то говорять про *орбітальне групування* (ОГ).

Зауважимо, що у *широкому* розумінні під КА розуміють будь-який технічний об'єкт, що функціонує у космічному просторі: балістична ракета, ракета-носіє, супутник, космічний корабель і т.п. У *вужькому* ж розумінні термін “КА” застосовують здебільшого до безпілотних штучних супутників Землі (ШСЗ). Саме таке поняття використовується у підручнику надалі.

КА є *носіями* бортової цільової апаратури (БЦА) оптичного і/або радіодіапазону, основна функція якої – збір і передача на Землю ЦІ. Використання КА в цій ролі забезпечує глобальність і безперервність спостережень, охоплення великих територій, високу оперативність, невразливість технічних засобів і т.п.

У той же час використання КА ускладнює КСС як інформаційну систему, вимагає значних фінансових витрат на її створення і експлуатацію, а космічний простір як зовнішнє середовище потребує спеціальних заходів для забезпечення високої надійності, живучості і перешкодостійкості космічних засобів.

Крім БЦА на КА встановлюють систему управління, забезпечувальні та допоміжні системи. Тому часто сукупність технічних і програмно-алгоритмічних засобів КА розділяють на бортовий спеціальний комплекс (БСК), бортовий комплекс управління (БКУ), бортовий забезпечувальний комплекс (БЗК) та ін.

Наземні засоби забезпечують запуски КА на орбіти, керування їх станом, а також прийом від КА бортової інформації (БІ), її оброблення і видачу споживачам. При цьому БІ являє собою сукупність ЦІ як основного виду інформації і допоміжної інформації (ДІ): телеметричної (ТМІ), траєкторної (ТІ), службової (СлІ) та ін.

Надалі, де це зручно і необхідно, склад БІ (як і склад засобів КСС) будемо представляти мовою теорії множин у вигляді:

$$БІ = \{ЦІ, ДІ\}; ДІ = \{ТМІ, ТІ, СлІ\}.$$

Відповідно до цього у складі наземних засобів створюють два, як правило, територіально рознесених і функціонально самостійних комплекси: космічний (КК) і наземний спеціальний (НСК) комплекси [35, 55, 67].

Під *космічним комплексом* розуміється сукупність наземних засобів, що забезпечують підготовку КА до запуску і вивід їх на орбіту, а також керування ними на *всіх* етапах польоту, тобто на вивідному витку, на витках очікування, на витках з корекцією орбіти, на робочих і неробочих та інших витках.

Основу **космічного комплексу** (див. рис. В.1) складають: ракетно-космічний комплекс (РКК) і наземний комплекс управ-

ління (НКУ). Ці елементи КК можуть бути територіально рознесені на значні відстані один від одного і належати різним відомствам.

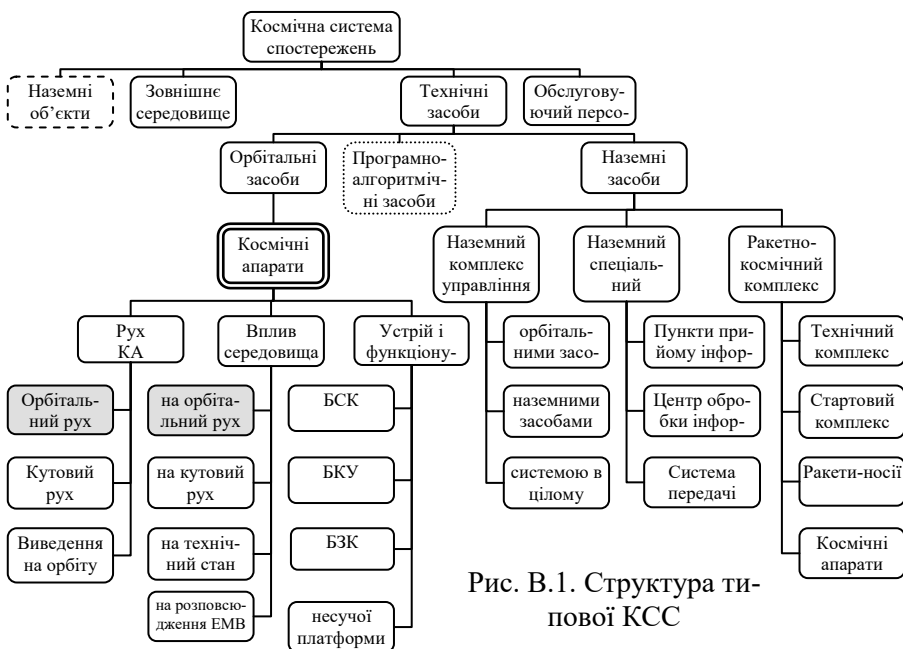


Рис. В.1. Структура типової КСС

Наземний спеціальний комплекс містить у собі тільки ті наземні засоби, які забезпечують безпосереднє одержання ЦІ з космічних апаратів та її оброблення. До них відносяться пункти прийому інформації (ППІ), центри обробки інформації (ЦОІ), а також система передачі даних, засоби зв'язку та інші елементи.

Варто відмітити, що термін “космічний комплекс” у розумінні як місце розташування засобів є не зовсім вдалим, оскільки більшу частину його компонентів становлять *наземні* засоби. Якщо ж “космічний” розуміти не з позиції дислокації засобів, а з огляду на його склад, то *космічний* фрагмент уже включений у поняття “космічна система”. Більш вдалим представляється розподіл технічних засобів КСС на орбітальний і наземний комплекси, а останнього – на РКК, НКУ і НСК.

Крім того, якщо із складу наземних засобів за функціональною ознакою виділяється НСК, то логічно було б розділити КСС на космічний і спеціальний комплекси і до останнього віднести як НСК, так і БСК.

Проте, незважаючи на неусталену термінологію, будемо надалі дотримуватися прийнятої на сьогодні такої структури КСС:

$$КСС = \{КК, ОГ, НСК, ОП\}; КК = \{РКК, НКУ\}.$$

Ракетно-космічний комплекс розміщується на *космодромі* і являє собою сукупність ракет-носіїв (РН), КА і технічних засобів, що забезпечують їх виведення у космічний простір. При цьому РН, зістиковану з КА, називають ракетою космічного призначення (РКП).

РКК, як правило, безпосередньо не входить у конкретну КСС, а періодично орендується для створення ОГ і для її відновлення. Географічне розташування РКК вибирається з урахуванням мінімальних необхідних енергетичних витрат при запусках КА на задані орбіти.

Наземний комплекс управління розміщується окремо від РКК і являє собою сукупність технічних засобів, що забезпечують прийом з КА і обробку допоміжної інформації, оцінювання стану КА, формування і видачу на борт командної інформації, тобто реалізує функцію керування орбітальними засобами. Крім того, НКУ здійснює керування наземними засобами і системою в цілому.

Допоміжна інформація передається на засоби НКУ по радіолінії “борт-Земля”. Вона містить відомості щодо просторово-часового положення (ПЧП) КА, його технічного стану і режимів роботи бортових систем, а також забезпечує синхронізацію бортових і наземних засобів, скритність і стійкість їхньої роботи.

Командна інформація (КІ) формується на підставі результатів обробки ДІ. Вона видається на КА по радіолінії “Земля-борт” у вигляді програм і команд керування. В остаточному підсумку, потоки допоміжної і командної інформації мають забезпечити одержання ЦІ заданого складу, обсягу і якості.

В.2. Роль теорії польоту космічних апаратів у задачах побудови і експлуатації космічних систем спостереження

Як уже відзначалось, особливим елементом будь-якої КС є орбітальні засоби у складі одного або декількох КА. Особливість КА як об'єктів експлуатації полягає в тому, що вони *віддалені* від ОП, *розосереджені* у просторі і в часі, здійснюють *безперервний* орбітальний (поступальний) і кутовий (обертальний) рух, мають обмежений технічний *ресурс*, функціонують у складних зовнішніх умовах космічного простору.

Найбільш істотною і принциповою *особливістю* будь-якого КА є процес його безперервного **орбітального руху**. Без орбітального руху не буває ШСЗ! Необхідна швидкість такого руху КА (орбітальна швидкість) однозначно визначається висотою і формою його орбіти. Наприклад, для КА ВР орбітальна швидкість становить $V_o \approx 7 \text{ км/с}$. Якщо змінювати величину і напрямок цієї швидкості, то відповідно будуть змінюватися висота і форма орбіти, тобто буде відбуватися її корекція, аж до падіння ШСЗ на Землю.

Таким чином, орбітальний рух КА є визначальним чинником його існування на орбіті. Отже, для організації спостережень за допомогою ШСЗ необхідно знати **закономірності** орбітального руху. Без таких знань неможливо створювати КСС, експлуатувати її засоби і використовувати ЦІ.

Дійсно, для спостережень за заданими наземними об'єктами КА повинен займати цілком певне просторове положення відносно них, тобто має бути забезпечена пряма (геометрична) видимість між КА і НО.

Отже, необхідно вирішувати завдання як запуску КА на цілком задану орбіту, так і періодично коректувати її параметри, які змінюються через вплив різних збурювальних факторів.

Більше того, положення КА, яке безупинно змінюється в часі, повинне бути з необхідною точністю відомо на Землі, щоб вирішувати принаймні такі завдання:

- а) організовувати спостереження за заданими НО;

б) визначати фактичні географічні координати НО, що потрапили у поле зору віддаленого від Землі рухомого КА;

в) наводити наземні антени на КА для організації прийому БІ і видачі на КА командної інформації.

У зв'язку з цим для фахівців з експлуатації КСС і обробки її інформації виникає необхідність у вивченні теоретичних основ польоту (ТОП) КА. При цьому зауважимо, що термін “політ” відноситься, строго кажучи, тільки до повітроплавання, тобто до руху літальних апаратів в *атмосфері* Землі. Тому стосовно до ШСЗ коректніше говорити не про їхній політ, а про їхній *рух*, причому про дві його уже згадувані складові: поступальний і обертальний рух (рис. В.2).

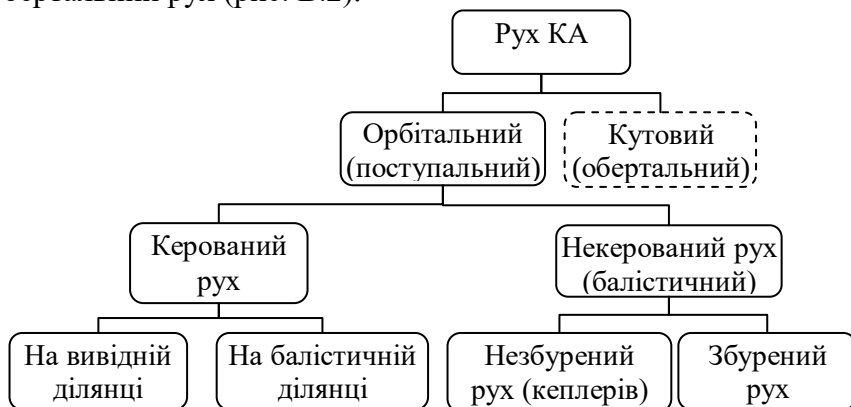


Рис. В2. Складові орбітального руху КА

Тоді і відповідну навчальну дисципліну варто було б називати “Теорія *орбітального руху* КА”. Проте через ряд певних причин багато авторів у своїх монографіях, підручниках і навчальних посібниках застосовують саме термін “політ КА”.

Отже, **теорією польоту** КА називається наука, що вивчає орбітальний рух КА на всіх ділянках його траєкторії.

Траскторією (від лат. *trajectories* – той, що має відношення до переміщення) називається уявлювана безперервна лінія, яку описує центр мас КА при його переміщенні у просторі [31, 34].

Траєкторія будь-якого КА починається з моменту старту РН. Точка старту є початком ділянки виведення КА на орбіту. Ця ділянка триває до моменту відділення КА від РН.

Орбіта – це замкнута траєкторія, по якій рухається центр мас КА після відділення від РН навколо центрального тіла, наприклад, Землі.

В.3. Історичний аспект розвитку теорії космічних польотів

Вважається, що теорія польоту КА як наука сформувалася на початку 50-х років XX століття. Цьому передувала багаторічна робота багатьох видатних учених.

Так, росіянин учений І.В. Мещерський у своїх роботах “Динаміка точки змінної маси” (1897 р.) і “Рівняння руху точки змінної маси у загальному випадку” (1904 р.) розробив найважливіші положення механіки тіл змінної маси. Основоположником теорії міжпланетних з’єднань вважається росіянин учений К.Е. Ціолковський. У своїй статті “Дослідження світових просторів реактивними приладами” (1903 р.) і в подальших роботах він показав можливість досягнення космічних швидкостей, першим висловив ідею створення навколоземних станцій і сформував нову систему понять, таких, як характеристична та ідеальна швидкість, гравітаційні й аеродинамічні втрати, оптимальна траєкторія, багатоступенева ракета і т.п.

Український дослідник Ю.В. Кондратюк у роботах “Тим, хто буде читати, щоб будувати” (1919 р.) та “Завоювання міжпланетних просторів” (1929 р.) показав можливість використання опору атмосфери для гальмування КА, запропонував використовувати при польотах до небесних тіл орбіту штучного супутника цих тіл, а для посадки на них людини – невеликий літальний спускний апарат.

Радянський учений у питаннях теорії міжпланетних польотів Ф.А. Цандер у роботі “Перельоти на інші планети” (1924 р.) і в наступних працях розробив ідею використання Місяця або попутних планет для збільшення швидкості польоту на інші планети, а також ідею плануючого спуску КА з гальмуванням в атмосфері планети.

У 1925 році німецький учений в області механіки космічного польоту В. Хоман зробив надбанням гласності роботу “Die Erreichbarkeit der Himmelskorper” (“Можливість досягнення небесних тіл”), у якій вперше в теорії космонавтики розрахував оптимальні з погляду витрат енергії траєкторії міжпланетних польотів, а також розкрив питання динаміки польоту при підйомі і спуску КА в атмосфері Землі і спуску на інші планети.

Незалежно від В. Хомана оптимальні енергетичні траєкторії польотів КА були обґрунтовані франко-радянським ученим А.А. Штернфельдом. У цей же період була розроблена теорія міжпланетної навігації французьким ученим Р. Есно-Пельтрі. В 1928–32 роках радянським ученим Н.А. Риніним видана перша робота з історії і теорії реактивного руху і космічних польотів.

30-ті роки ознаменувалися бурхливим розвитком теоретичних досліджень в області теорії польотів КА, практичними роботами в області ракетної техніки. Значний внесок у це внесли радянський учений М.К. Тихонравов, німецькі дослідники Е. Зенгер і Г. Оберт, американський учений Р. Годдард та ін.

Вагомий внесок у створення ефективних методів розв’язку задач космічної техніки і механіки космічного польоту вніс радянський академік М.В. Келдиш, який був науковим керівником Міжвідомчої балістичної групи.

Особлива роль у становленні практичної космонавтики належить Головному конструкторові ракетно-космічних систем академікові С.П. Корольову, ім’я якого з 1998 року носить Житомирський військовий інститут.

Починаючи з 30-х років, під керівництвом С.П. Корольова здійснені масштабні космічні проекти, на основі яких створювалися як ракетно-космічна техніка, так і балістичне забезпечення для її функціонування.

У підсумку 4 жовтня 1957 року ракета-носіє конструкції академіка С.П. Корольова вивела на орбіту перший у світі ШСЗ.

Значний внесок у розвиток теорії польоту КА у 80-х роках внесли вітчизняні вчені П.Є. Ельясберг, Г.М. Дубошин, П.А. Агаджанов, Б.Ф. Жданюк, Г.С. Нариманов, М.К. Тихонравов, В.П. Мішин, В.І. Левантовський, В.В. Білецький, П.А. Мамон,

Б.С. Скребушевський, К.Б. Алексєєв, Г.Г. Бебенін, В.А. Ярошевський і багато інших.

У цей же період активну участь у створенні теоретичної бази теорії польоту КА брали Д.Е. Охоцимський, Т.М. Енесєв, А.К. Платонов, Е.Л. Аким, І.М. Яцунський, І.К. Бажинов, М.Д. Кислик, Р.Ф. Аппазов, В.Н. Почукаєв, О.Г. Ситін, К.А. Абгарян, І.М. Рапопорт, О.О. Лебедев.

У теперішній час в Україні розробкою і реалізацією космічних програм займаються десятки науково-дослідних організацій, науково-виробничих об'єднань, промислових підприємств та інших структур під егідою Державного космічного агентства України (ДКАУ) як основного органу державної влади з питань космічної діяльності [22, 30].

ДКАУ створено у 1992 р. Воно тоді мало статус національного (НКАУ). Його організатором і керівником до 1995 р. був доктор технічних наук В.П. Горбулін. Потім протягом 10-ти років НКАУ очолював доктор технічних наук О.О. Негода.

Пізніше цю посаду обіймав Герой України Ю.С. Алексєєв, який до цього очолював знамените Державне підприємство “Виробниче об'єднання “Південний машинобудівний завод” ім. А.М. Макарова” (“Південмаш”) – всесвітньо відомий флагман вітчизняного ракетобудування і орбітальних засобів КС. Сьогодні Генеральним директором “Південмашу” є В.А. Щеголь.

З березня 2009 р. протягом року Генеральним директором НКАУ був кандидат фізико-математичних наук Зінченко О.О.

У теперішній час НКАУ, яке в кінці 2010 р. перейменоване у Державне, знову очолює Ю.С. Алексєєв.

Головним розробником ракетно-космічних комплексів і КС в Україні є Державне підприємство “Конструкторське бюро “Південне” ім. М.К. Янгеля” (ДКБ “Південне”), очолюване з 1991 до 2010 р. Генеральним конструктором – Генеральним директором академіком НАНУ С.М. Конюховим. З серпня 2010 р. цю посаду обіймає О.В. Десятьєв.

При ДКБ “Південне” створений і успішно функціонує Головний балістичний центр [48].

Методологія проектування в ДКБ “Південне” сформувалась провідними вченими наукової школи члена-кореспондента НАНУ професора М.Ф. Герасюти: А.А. Красовського, І.М. Ігдалова, Ю.П. Панкратова, В.В. Брикера, П.Н. Лебедева, В.М. Морозова, О.Д. Шептуна, Л.Т. Грипа та ін.

Нині українські ракетні комплекси “Циклон-2”, “Циклон-3”, “Зеніт-2”, “Зеніт-3SL”, “Дніпро” забезпечують запуски КА різного призначення з космодромів багатьох країн. Основною експлуатуючою структурою КС України є Національний центр управління і випробувань космічних засобів (НЦУВ КЗ), що базується в Криму та в інших регіонах нашої країни. Нині цей Центр очолює С.В. Малевинський.

Символічно те, що Центр почав функціонувати 4 жовтня 1957 р., коли прийняв сигнал з першого у світі ШСЗ, запущеного у Радянському Союзі. Більше того, 12 квітня 1961 р. Центр забезпечував радіозв’язок з першим у світі космічним кораблем “Восток”, пілотованим льотчиком-космонавтом Ю.О. Гагаріним.

У складі НЦУВ КЗ є ряд функціональних центрів, що виконують завдання управління польотом КА (ЦУП), прийому та обробки ЦІ і ряд інших підрозділів, що займаються, у тому числі, і питаннями орбітального руху КА.

Підготовка фахівців з експлуатації КС для ДКАУ, Міністерства оборони України й інших міністерств і відомств ведеться у ЖВІ НАУ. При цьому профілюючим навчально-науковим підрозділом інституту з питань КС є **кафедра геоінформаційних і космічних систем** [63, 64].

Ця кафедра сформована у 1979 р за ініціативою та під керівництвом тодішнього начальника військового училища генерал-майора Кузікова В.І. – колишнього командира військової частини космічного призначення, а також його заступника з навчальної та наукової роботи полковника Шматка С.О. при безпосередній участі автора.

Першим начальником кафедри був кандидат технічних наук, доцент Редько В.І. – колишній начальник відділу бойових алгоритмів і програм однієї з військових частин космічного призначення. Потім послідовно кафедрою керували офіцери з великим

практичним досвідом випробувань і експлуатації КС кандидати технічних наук, доценти Пясковський Д.В., Фриз П.В., Парфенюк В.Г., кандидат військових наук, доцент Чернявський Г.П. З 2006 р. кафедру очолює кандидат технічних наук, доцент Топольницький П.П.

У різні роки на кафедрі навчались колишні заступник начальника інституту з навчальної і наукової роботи Сашук І.М. та начальник факультету Варламов І.Д., нинішні начальники кафедр Ревенко В.Б. та Шуренок В.А. Сьогодні серед професорсько-викладацького складу кафедри плідно ведуть навчальну та наукову діяльність досвідчені вчені та педагоги професори Горшенін О.Є. та Фриз П.В., доценти Фриз С.П. та Пулеко І.В.

За час свого існування кафедра випустила більше 1300 фахівців космічного профілю, а курс теорії польоту КА на кафедрі вивчало більше 1500 чоловік. Кафедра має ряд унікальних навчально-лабораторних і науково-експериментальних комплексів, що дозволяють проводити не тільки “класичні” лабораторні роботи і наукові дослідження, а і приймати та обробляти “живу” ЦІ як з вітчизняних, так і зарубіжних КА.

В основу цих комплексів покладені реальні засоби космічної техніки, а також пристрої і моделі “власного виробництва”, серед розробників яких ветерани ракетно-космічної галузі Коротких А.П., Мукомел О.М., Франжі О.В., Рихальський О.Р. Грош С.М. та молоді науковці Токар А.М. і Федорчук Д.Л.

Органічним доповненням до навчально-матеріальної бази кафедри та інституту є реальні зразки і макети ракетно-космічної техніки Житомирського музею космонавтики ім. С.П. Корольова – унікального наукового, технічного і культурного закладу України [42]. Колектив музею, очолюваний донедавна заслуженим працівником культури України кандидатом історичних наук Копил О.А., а нині – доктором економічних наук, доцент Дячук І.Д., уже більше 40 років веде активну просвітницьку роботу серед вітчизняних та зарубіжних відвідувачів, в тому числі серед курсантів та студентів військового інституту.

В.4. Загальна характеристика підручника

Структура і зміст підручника визначені, виходячи із потреб практики, багаторічного досвіду автора у викладанні теорії польоту КА і проведення наукових досліджень, а також відомих об'єктивних факторів орбітального руху КА.

Теоретичною основою для вивчення цих факторів служать закони збереження енергії, всесвітнього тяжіння і збереження кількості руху, закони і закономірності І. Ньютона та І. Кеплера, рівняння І.В. Мещерського і К.Е. Ціолковського, відомості зі сферичної тригонометрії і аналітичної геометрії (криві другого порядку), а також цілий ряд інших закономірностей і понять, основні з яких представлені на рис. В.3.

У зв'язку з цим підручник включає п'ять логічно ув'язаних розділів.

Перший розділ містить загальні відомості про астрономічні та фізичні умови космічних польотів, космічний простір як середовище функціонування КСС. В ньому розкриті гравітаційні, геометричні та фізичні параметри Сонця, Землі і її атмосфери та Місяця, які суттєво впливають на орбітальний рух КА.

У *другому* розділі систематизовані основні закони і закономірності взаємодії небесних тіл і дана їхня інтерпретація стосовно до ШСЗ. Тут же викладені одиниці виміру і системи рахунку часу, основні системи координат і алгоритми переходу від однієї системи до іншої.

Третій розділ присвячений теорії незбуреного руху КА. В ньому обґрунтовані передумови незбуреного руху КА, даються диференціальні рівняння цього руху і результати їхнього рішення в інерціальній системі координат.

Особлива увага приділена опису орбітального руху за допомогою кеплерових елементів і параметрів еліптичного руху, а також вирішенню ряду прикладних завдань – прогнозуванню руху КА, побудові їхніх трас, розрахунку умов видимості КА із Землі та наземних пунктів і об'єктів з КА, умов освітленості КА і наземних об'єктів Сонцем, визначенню орбітальних параметрів на основі результатів траскторних вимірів.

У четвертому розділі розкриті основні збурювальні фактори орбітального руху (несферичність Землі, опір атмосфери, притягання небесних тіл), ступінь їхнього впливу на параметри орбіт та час балістичного існування КА, а також особливості врахування збурень у практиці вибору орбіт та експлуатації орбітальних засобів КСС. Тут же викладені питання створення орбітальних групувань КА.

П'ятий розділ присвячений керованому орбітальному руху КА. В ньому наведені основні відомості із теорії реактивного руху, розкриті питання корекції параметрів орбіт, міжорбітальних компланарних і некомпланарних маневрів КА, а також викладені основні відомості щодо виведення КА на орбіти.

При цьому такий складний об'єкт, як КА, при вивченні його орбітального руху представлений здебільшого лише *матеріальною точкою*.

Сама навчальна дисципліна базується на законах і закономірностях фізики, астрономії, геодезії, балістики із широким використанням математики. Для полегшення засвоєння матеріалу доцільно використовувати макети, карти, наочне приладдя, комп'ютерні моделі та інші сучасні засоби навчання.

Розділ 1

АСТРОНОМІЧНІ ТА ФІЗИЧНІ УМОВИ КОСМІЧНИХ ПОЛЬОТІВ

Космічні польоти здійснюються у складних астрономічних і фізичних умовах космічного простору.

Космос (від грец. *κοσμος* – порядок) – синонім астрономічного визначення Всесвіту [31, 32].

Всесвіт (від лат. *unibersum* – світ у цілому) – нескінченний у часі та просторі світ, безмежно різноманітний за формами, яких набуває матерія в процесі свого розвитку.

Всесвіт у широкому розумінні – предмет досліджень усього природознавства, а у вузькому – в основному астрономії.

Астрономія (від грец. *αστρο* – зірка, *νομος* – закон) – наука про будову та розвиток космічних тіл, утворених ними систем і Всесвіту в цілому.

Основними розділами астрономії є:

космогонія – наука про походження та розвиток космічних тіл і їхніх систем;

космологія – наука про еволюцію Всесвіту;

астрофізика – наука про фізичні явища у Всесвіті;

небесна механіка – наука про рух тіл Сонячної системи у загальному гравітаційному полі [27].

Незважаючи на те, що терміни “Всесвіт” і “космос” є синонімами, на практиці під **космічним простором** розуміють не весь Всесвіт, а лише його навколоземну частину за межами атмосфери.

Космічний простір умовно поділяють на навколоземний, міжпланетний та міжзоряний. Крім того, часто виділяють ближній космос, що досліджується за допомогою ШСЗ, КА та міжпланетних станцій, і далекий космос – світ зірок і галактик.

Границі ближнього космосу визначаються межами та розмірами Сонячної системи, основні відомості про яку викладені нижче [26, 31, 32, 44].

1.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВСЕСВІТ І СОНЯЧНУ СИСТЕМУ

Всесвіт містить незліченну множину *небесних тіл* – планет, зірок, комет, метеорів, їхніх систем та інших космічних утворень, які виникають у процесі руху матерії. Небесні (космічні) тіла у Всесвіті поєднуються в системи, складові частини яких зв'язані між собою силами тяжіння. Основним станом речовини у Всесвіті є *плазма*.

Плазма (від грец. *πλάσμα* – виконане, створене) – іонізований газ, що містить практично однакову кількість позитивних і негативних зарядів. У стані плазми при дуже високій температурі може перебувати будь-яка речовина. Тому плазму розглядають як *четвертий* (крім твердого, рідкого і газоподібного) агрегатний стан речовини. У стані плазми перебуває більша частина речовини Всесвіту: зірки, галактичні туманності та міжзоряне середовище.

Галактика (від грец. *γαλακτικ* – молочний) – це система зірок. У наш час відомо близько *1 млрд.* галактик. Залежно від розмірів в одній галактиці міститься близько 10^{12} зірок. Галактики спостерігаються у вигляді світлих туманних плям круглої, овальної або неправильної форми. Найближчі до Сонця галактики – Магелланові туманності.

Сукупність галактик, доступних для спостереження із Землі, називають *метагалактикою*. Кількість зірок у метагалактиці становить понад 10^{21} . До неї входить і наша Галактика, число зірок у якій складає близько 10^{11} , а їхня загальна маса перевершує масу Сонця в 10^{11} разів. Радіус нашої Галактики оцінюється приблизно в 15000 *пс* (парсек).

Парсеком називається відстань, що рівняється річному паралаксу в $1''$ (кутову секунду).

Річний паралакс – це кут, під яким можна бачити середній радіус орбіти Землі із точки, що перебуває на перпендикулярі, проведеному із центра Сонця до площини цієї орбіти.

Середній радіус орбіти Землі (середня відстань від Землі до Сонця) називається *астрономічною одиницею* (*а.о.*) і становить $r_c = 1 \text{ а.о.} = 149597000 \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$. Крім *а.о.* для виміру великих відстаней використовують і більшу одиницю – *світловий рік* (*св. рік*) – відстань, що проходить світло за 1 рік. Нагадаємо, що швидкість світла у вакуумі $C \approx 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Виходячи із цього, можна одержати такі співвідношення:

$$1 \text{ пс} = 206265 \text{ а.о.} = 3,26 \text{ св. року} = 30,8568 \cdot 10^{12} \text{ км};$$

$$1 \text{ св. рік} = 9,46053 \cdot 10^{12} \text{ км}.$$

Сонце перебуває на відстані 10000 пс від центра нашої Галактики, який розташований у напрямку сузір'я Стрілець.

Сонячна система – це множина небесних тіл, які рухаються у гравітаційному полі Сонця. До її складу входять (табл. 1.1):

- а) центральне тіло – Сонце;
- б) вісім великих планет з 34 супутниками;
- в) близько 2000 малих планет (астероїдів);
- г) більше 600 комет;
- д) безліч метеорних тіл та міжпланетний пил.

Відстань, на якій спостерігаються об'єкти Сонячної системи, обмежується орбітою Плутона.

Сонячна система рухається разом з нашою Галактикою по майже коловій орбіті зі швидкістю близько 250 км/с . Період обертання Сонячної системи навколо центра нашої Галактики становить близько 200 млн. років . Вік Сонячної системи вважається рівним близько 5 млрд. років [10].

Сонце – газоподібне розпечене небесне тіло кулястої форми, найближча до Землі “зірка”. Маса Сонця $M_c \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$. У ньому зосереджено 99,866 % маси всієї Сонячної системи. Середній радіус Сонця $R_c \approx 7 \cdot 10^5 \text{ км}$, що приблизно в 110 разів бі-

льше середнього радіуса Землі. Найменша відстань від Землі до Сонця (в перигелії, січень) $r_{cmin} = 147,1 \cdot 10^6 \text{ км}$, а найбільша (в афелії, липень) $r_{cmax} = 152,1 \cdot 10^6 \text{ км}$.

Температура Сонця перебуває в межах від 4000 до 2 млн K, при цьому його середня температура становить $\bar{T}_c = 6000 \text{ K}$. Освітленість Землі Сонцем (поза атмосферою) $E_c \approx 136000 \text{ лк}$, що у 548000 разів вище, ніж освітленість Землі Місяцем [26].

На практиці для наземних та бортових засобів КСС суттєве значення має кутовий розмір (кутовий діаметр) Сонця як небесного світила, який складає $\psi_c \approx 0,5^\circ$, що можна знайти за формулою

$$\psi_c \approx 2R_c / r_c. \quad (1.1)$$

Приклад 1.1. Розрахувати середній кутовий діаметр Сонця ψ_c для наземного спостерігача. Знайти мінімальне ψ_{cmin} та максимальне ψ_{cmax} значення цього параметру.

Розв'язання. Використовуючи значення середнього радіуса Сонця $R_c \approx 7 \cdot 10^5 \text{ км}$ і середню $r_c \approx 149,6 \cdot 10^6 \text{ км}$, мінімальну $r_{cmin} \approx 147,1 \cdot 10^6 \text{ км}$ та максимальну $r_{cmax} \approx 152,1 \cdot 10^6 \text{ км}$ відстань від Землі до Сонця, із формули (1.1) знайдемо: $\psi_c \approx 32,17'$ $\psi_{cmin} \approx 31,6'$ $\psi_{cmax} \approx 32,7'$.

Планети (від грец. *πλανητες* – блукаючий) – це “холодні” небесні тіла Сонячної системи. Більшість із планет видимі із Землі неозброєним оком завдяки *відбиваній* ними сонячній енергії.

Орбіти усіх планет за формою близькі до окружності та мають невеликий нахил одна до іншої.

Таким чином, Земля як цікавий для теорії польоту КА об'єкт, перебуває у *системі* небесних тіл. А це означає, що на ШСЗ діють як гравітаційні, так і електромагнітні сили не тільки Землі, а і усіх небесних тіл, що утворюють Сонячну систему.

1.2. ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ АСТРОНОМІЇ

Сферична астрономія розробляє математичні методи рішення завдань, пов'язаних з вивченням видимого розташування і руху світил на небесній сфері, якими вони представляються спостерігачеві, що перебуває на Землі. Для цього застосовують ряд систем небесних координат, систем рахунку часу і одиниць його вимірювання, а також зв'язків між ними.

Зауважимо, що в астрономії, у небесній механіці, а також і в теорії польоту КА зазвичай використовують одну із таких систем позначень часу: $00^c00^x00^c$ (рідко), $00^u00^m00^c$ або $00^h00^m00^s$ на відміну від звичного $00\text{год}.00\text{хв}.00\text{с}$.

1.2.1. Географічні координати наземних пунктів

Приймемо у першому наближенні форму Землі за кулю. Відомо, що при перетині кулі будь-якою площиною утворюється круг (коло). Площини, що проходять через центр кулі, дають у перетині з поверхнею кулі *великі круги*. Площини, що не проходять через центр кулі, утворюють *малі круги*.

Великий *круг*, що проходить через північний і південний полюси Землі і наземний пункт (НП) спостереження P_z , називається географічним *меридіаном* даного пункту (рис. 1.1).

Лінії, що проведені паралельно екватору, називаються географічними *паралелями* (рис. 1.2).

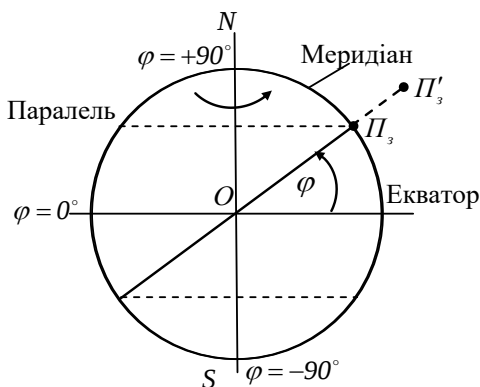


Рис. 1.2. До визначення паралелей та географічної широти

Положення будь-якого НП або точки на поверхні Землі визначається їх географічними координатами – *широтою* та *довготою*, уперше введеними давньогрецьким астрономом Гіппархом (II в. до н.е.).

Географічною широтою φ НП називається (див. рис. 1.2) кут між напрямком прямовисної лінії PP'_3 в даному пункті і площиною земного екватора.

Іншими словами, широта – це відстань даного НП від екватора, виражена в градусній мірі. Вона відлічується вздовж меридіана і умовно вважається позитивною на північ і від'ємною – на південь від екватора. Широта самого екватора $\varphi = 0^\circ$, широта північного полюса $\varphi = +90^\circ$, широта південного полюса $\varphi = -90^\circ$, широта будь-якого проміжного (між екватором і полюсом) НП за абсолютною величиною $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$.

На практиці замість знаків широт можуть застосовуватися позначення *пши* (*пдши*) – північна (південна) широта, наприклад, замість запису $\varphi = +60^\circ$ пишуть $\varphi = 60^\circ$ *пши*.

Виходячи із визначення географічної широти з урахуванням (1.2), можна знайти довжину будь-якої паралелі, розташованої на широті φ як

$$L_{\varphi} = L_{\text{з}} \cos \varphi. \quad (1.4)$$

При цьому за аналогією з (1.3) між кутовими та лінійними відстанями на широті φ існує співвідношення

$$l_{\varphi} = L_{\varphi} / 360^{\circ} = l_{\text{з}} \cos \varphi \approx 111 \cdot \cos \varphi \text{ км} / \text{град}. \quad (1.5)$$

Тоді лінійну відстань між двома НП, рознесеними на кутову відстань $\Delta \lambda_{\varphi}$ вздовж паралелі з широтою φ , можна знайти як

$$\Delta L_{\varphi} = \Delta \lambda_{\varphi} \cdot l_{\varphi} \approx 111 \cdot \Delta \lambda_{\varphi} \cdot \cos \varphi \text{ км}. \quad (1.6)$$

Географічною довготою λ НП називається (див. рис. 1.1) кут у площині екватора (або дуга екватора) між напрямком на нульовий меридіан ($\lambda = 0^{\circ}$) і меридіан даного НП.

За нульовий (початковий) меридіан прийнятий Гринвіцький меридіан – меридіан, що проходить через Гринвіцьку астрономічну обсерваторію, яка заснована у 1675 р. у Великобританії біля Лондона.

Географічна довгота НП може виражатися як у градусній мірі в межах $0^{\circ} \leq \lambda \leq 360^{\circ}$, так і в годинній мірі в діапазоні $0^h \leq \lambda^h \leq 24^h$.

При цьому зв'язок між градусною та годинною мірами однозначно встановлюється через кутову швидкість обертання Землі $\omega_{\text{з}} = 360^{\circ} / 24^h = 15 \text{ град} / \text{час}$, тобто

$$\lambda^h = \lambda / \omega_{\text{з}}. \quad (1.7)$$

При круговому способі рахунку довгот вони відлічуються від початкового меридіана на схід (у бік обертання Землі) у межах $0^{\circ} \leq \lambda \leq 360^{\circ}$. При двосторонньому способі рахунку позитивні довготи відлічуються від початкового меридіана на схід у межах $0^{\circ} \leq \lambda \leq +180^{\circ}$, а від'ємні – від початкового меридіана на захід у межах $-180^{\circ} \leq \lambda \leq 0^{\circ}$.

На практиці замість знаків довгот можуть застосовуватися позначення $схд$ ($зхд$) – східна (західна) довгота, наприклад, замість запису $\lambda = +60^\circ$ пишуть $\lambda = 60^\circ схд$.

Приклад 1.2. Розрахувати лінійну відстань між Житомиром та Києвом $\Delta L_{ж-к}$, якщо їх географічні координати відповідно складають $\varphi_{ж} \approx +50,2708^\circ$, $\lambda_{ж} \approx +28,6250^\circ$, $\varphi_{к} \approx +50,4173^\circ$, $\lambda_{к} \approx +30,5620^\circ$.

Розв'язання. Враховуючи, що $\varphi_{ж} \approx \varphi_{к}$, прийнемо, що міста Житомир і Київ розташовані на одній паралелі $\varphi = (\varphi_{ж} + \varphi_{к})/2 \approx +50,34^\circ$. Знайдемо кутову відстань між даними містами вздовж цієї паралелі як $\Delta \lambda_\varphi = |\lambda_{ж} - \lambda_{к}| \approx 1,937^\circ$. Тоді на підставі (1.5) і (1.6) отримаємо шукану відстань як $\Delta L_{ж-к} = \Delta \lambda_\varphi \cdot l_\varphi = 111 \cdot \Delta \lambda_\varphi \cdot \cos(50,34^\circ) \approx 137 \text{ км}$.

Крім географічних використовують також геодезичні та геоцентричні координати, з якими познайомимось далі.

Зауважимо, що виходячи із визначення географічної довготи довжину будь-якого меридіана можна розрахувати за формулою (1.2), а кутові та лінійні відстані на меридіані зв'язані співвідношенням, аналогічним (1.3).

Найбільш вживаними моделями Землі є глобус (рис. 1.3) та карта світу. Якраз на них наносять у певному масштабі географічну сітку (паралелі і меридіани) та ділянки суші і водної поверхні з окремими районами і об'єктами на них.



Рис. 1.3. Глобус Землі

Зауважимо, що всі точки, які розташовані на прямовисній лінії, незалежно від їх висоти над поверхнею Землі, в тому числі і небесні світила, КА та інші космічні об'єкти, матимуть одні і ті ж географічні координати – широту і довготу.

Гринвіцький меридіан та протилежний йому меридіан з довготою $\lambda = 180^\circ$ ділять Землю на дві півкулі: східну і західну.

При цьому меридіан з довготою $\lambda = 180^\circ$ називається *лінією переміни дат*. Така назва означає, що в місцеву північ на цьому меридіані починається чергова доба на Землі і її початок в подальшому переміщається у західному напрямку зі швидкістю обертання Землі. Наприклад, у Гринвічі ця ж доба почнеться тільки через 12^h після її настання на лінії переміни дат.

1.2.2. Небесна сфера

Небесною сферою називається допоміжна сфера довільного радіуса, на яку подумки проектують небесні світила для полегшення вирішення різних завдань сферичної астрономії. У повсякденному житті наземний спостерігач бачить лише частину небесної сфери (рис. 1.4), яку зазвичай називають куполом неба або просто небом.



Рис. 1.4. Північна половина небесної сфери

При цьому за *центр* небесної сфери природно прийняти око спостерігача, причому сам спостерігач може знаходитись як на поверхні Землі, що цілком природно, так і віртуально у будь-якому іншому місці, наприклад, у центрі Землі.

Кожному світилу Σ на небесній сфері відповідає точка σ , у якій цю сферу перетинає пряма, що з'єднує центр сфери зі світилом (рис. 1.5).

Точку σ називають *зображенням* світила Σ . Очевидно, що на небесній сфері можна вказати *тільки напрямок* на небесне тіло, а не відстань до нього. Взаємне розташування зірок на небі практично не змінюється з часом через велику відстань до них від центра небесної сфери.

Наприклад, найближча до Землі зірка α Центавра знаходиться на відстані $r_{\alpha} \approx 396 \cdot 10^{11} \text{ км} \approx 4,3 \text{ св. роки}$, що перевищує відстань від Землі до Сонця у $2,65 \cdot 10^5 \text{ раз}$. Через “нерухомість” зірок на небесній сфері відносно них можна стежити за рухом Сонця, Місяця та інших небесних світил.

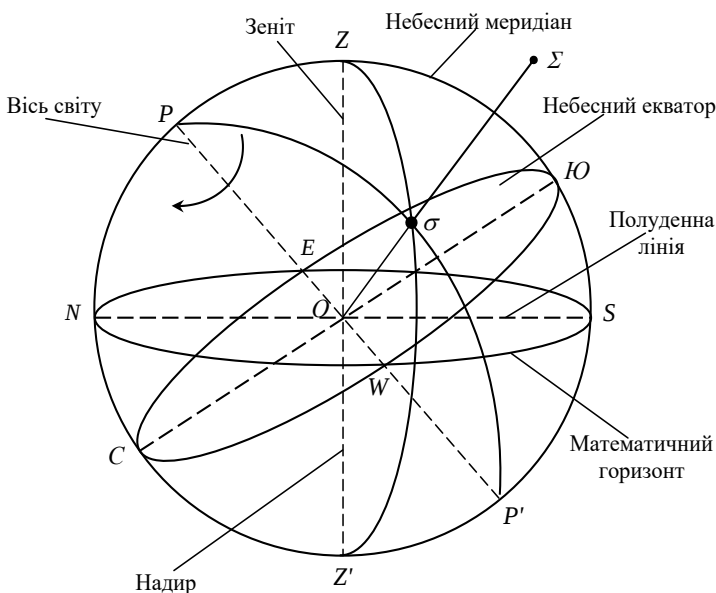


Рис. 1.5. Основні точки і лінії небесної сфери

Взаємне розташування і видимі рухи світил на небесній сфері вивчають у різних системах координат. Для вибору тієї або іншої системи координат необхідно зафіксувати основні лінії і точки на небесній сфері (див. рис. 1.5).

1.2.3. Основні точки і лінії небесної сфери

Спостерігач у будь-якому пункті земної поверхні може за допомогою виска (грузила на тонкій нитці) визначити вертикальний напрямок, а по ньому – і горизонтальну площину.

Точка перетинання вертикальної (прямовисної) лінії з небесною сферою над головою спостерігача називається *зенітом* Z , а діаметрально протилежна точка – *надиром* Z' .

Площина, що проходить через центр небесної сфери перпендикулярно прямовисній лінії, перетинає сферу по великому колу $SWNE$, названому *математичним (або істинним) горизонтом*.

том. Математичний горизонт ділить небесну сферу на *видиму* півсферу із точкою зеніту Z і *невидиму* – із точкою надира Z' .

Малий круг небесної сфери, який паралельний математичному горизонту і проходить через світило σ , називається *альмукантором* світила.

Пряма, що проходить через центр небесної сфери паралельно осі обертання Землі, називається *віссю світу*, а точки перетинання її з небесною сферою – північним P і південним P' *полюсами світу*.

Площина, що проходить через центр небесної сфери перпендикулярно осі світу, перетинає сферу по великому кругу $ЮWCE$, названому *небесним екватором*.

Площина небесного екватора ділить небесну сферу на дві півкулі – *північну* і *південну*. Великий круг небесної сфери, що проходить через полюси світу, зеніт і надир, називається *небесним меридіаном*. Небесний меридіан перетинає істинний горизонт у точках N і S .

Найближча до північного полюса світу точка N називається *точкою півночі*, а діаметрально протилежна S – *точкою півдня*.

Лінія перетинання площин небесного меридіана і істинного горизонту NS називається *полуденною лінією*. Саме по цьому напрямку опівдні падають тіні від вертикальних предметів.

Точки істинного горизонту, що відстоять на 90° від точок півночі N і півдня S , називаються точками *сходу* E і *заходу* W . В точках E і W небесний екватор перетинається з істинним горизонтом.

Точки N , S , E , W називаються *головними* точками горизонту. Площина небесного меридіана ділить небесну сферу на дві півкулі: *східну* із точкою сходу E і *західну* із точкою заходу W .

Спостерігачеві, що перебуває у будь-якому пункті на земній поверхні, здається, що зоряне небо обертається навколо осі світу в напрямку, протилежному напрямку обертання Землі.

При цьому за добу кожне світило два рази проходить через небесний меридіан. Моменти такого проходження називаються *кульмінаціями*.

Розрізняють *верхню* кульмінацію, коли світило проходить (кульмінує) через півкруг небесного меридіана, що обмежений північним і південним полюсами світу та включає точку зеніту, і *нижню*, коли світило проходить через протилежний півкруг меридіана. У момент верхньої кульмінації світило має найбільшу кутову висоту над істинним горизонтом, у момент нижньої – найменшу.

Площина, що паралельна площині орбіти Землі і проходить через центр небесної сфери, перетинає її по дузі великого круга $\text{Э}\gamma\text{Э}'\underline{\Omega}$, яка називається *екліптикою*.

Інакше кажучи, *екліптика* – великий круг небесної сфери, по якому відбувається видимий річний рух центра Сонця (рис. 1.6).

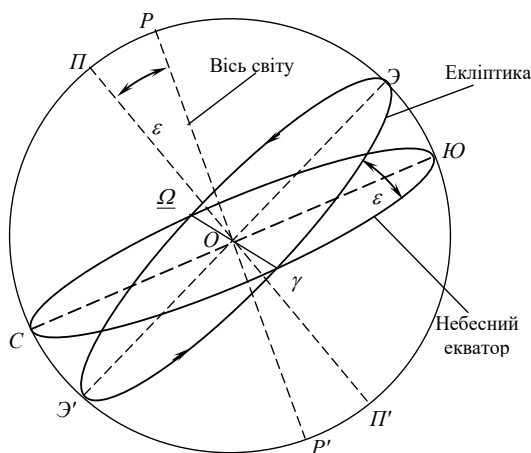


Рис. 1.6. До визначення поняття екліптики

Площина екліптики утворює із площиною небесного екватора кут ε , який дорівнює куту між віссю світу PP' і нормаллю $\Pi\Pi'$ до площини екліптики. При розв'язанні прикладних задач теорії польоту КА та у повсякденній діяльності людей цей кут вважається постійним.

Насправді ж, на великих проміжках часу, вимірюваних сторіччями, кут ε повільно змінюється. Тому в астрономічних що-

річниках дається чисельне значення кута ε на початок кожного тропічного року. Наприклад, на початок 2011 р. (для епохи $T = J2000.5$) середнє значення цього кута $\varepsilon = 23^\circ 26' 21.21''$ [8].

Екліптика перетинає небесний екватор у двох точках: γ – у точці *весняного* рівнодення (ТВРД) і $\underline{\Omega}$ – у точці *осіннього* рівнодення (ТОРД).

У ТВРД Сонце при видимому річному русі по небесній сфері переходить із південної півкулі у північну, а в ТОРД – із північної півкулі у південну. В точках γ і $\underline{\Omega}$ Сонце буває відповідно навесні і восени, що обумовлює на середніх широтах однакові тривалість дня і ночі (на екваторі вони однакові завжди).

Точки екліптики $\mathcal{E}$ і $\mathcal{E}'$, що заходяться на відстані 90° від ТВРД і ТОРД, називаються точками *літнього* і *зимового сонцестояння*. У точці $\mathcal{E}$ на небесній сфері Сонце буває для північних широт влітку, що обумовлює найбільшу тривалість дня, а в точці $\mathcal{E}'$ – взимку, що спричиняє найбільшу тривалість ночі.

Через те, що проміжок часу між двома послідовними проходженнями Сонця через ТВРД (тропічний рік) не збігається із тривалістю календарних років, моменти рівнодення рік у рік переміщуються відносно календарної доби.

Наприклад, моменти рівнодення наступають у простий рік на $5^h 48^m 46^s$ пізніше, ніж у попередній, а у високосний рік – на $18^h 11^m 14^s$ раніше. Тому моменти рівнодень можуть припадати на різні сусідні дати. У теперішній час Сонце проходить ТВРД 20 або 21 березня (цей момент вважається початком астрономічної весни у північній півкулі), а ТОРД – 23 вересня (початок астрономічної осені).

День літнього сонцестояння для північних широт приходить приблизно на 22 червня, а зимового – на 22 грудня. В ці дати Сонце при річному русі досягає максимальної північної (південної) географічної широти, чисельно рівної $|\varphi_c| = \varepsilon \approx 23^\circ$ (північний та південний тропіки).

Крім того, Гіппарх виявив, що точки рівнодень переміщуються уздовж екліптики назустріч видимому річному руху Сон-

ця. Це переміщення пояснюється прецесією осі обертання Землі і має період 26000 років.

Уздовж екліптики розташований ряд сузір'їв, який називається *поясом зодіаку*. У далекій давнині цей пояс був розділений на 12 частин (дуг) по 30° кожна, позначених відповідними знаками зодіаку. При цьому Сонце при своєму річному русі перебуває в околі кожного знака протягом одного місяця. Тому кожен календарний місяць позначається відповідним знаком зодіаку. Наприклад, березень позначається знаком Овна γ , оскільки в цьому сузір'ї близько 2000 років тому Сонце перебувало у першому весняному місяці.

У наш час ТВРД перебуває в сузір'ї Риб, але за нею зберігся знак γ сузір'я Овна, у якому вона перебувала 2000 років тому. ТОРД у теперішній час перебуває в сузір'ї Діви, але за нею залишилося позначення Ω на честь сузір'я Терезів, у якому вона перебувала колись.

1.3. КОСМІЧНИЙ ПРОСТІР ЯК СЕРЕДОВИЩЕ ФУНКЦІОНУВАННЯ КОСМІЧНИХ СИСТЕМ

Для вирішення більшості практичних завдань космонавтики використовують навколоземний космічний простір до висот $H \leq 50000 \text{ км}$. При цьому мінімальні висоти, на яких можуть здійснюватись космічні польоти, визначаються границями атмосфери Землі і прийняті за міжнародними угодами рівними $H \geq 100 \text{ км}$.

Наприклад, пілотовані космічні кораблі здебільшого запускають на орбіти з висотами $H \approx 200 \dots 400 \text{ км}$, метеорологічні КА та КА детального спостереження Землі – з висотами $H \approx 600 \dots 800 \text{ км}$, навігаційні КА – з висотами $H \approx 20000 \text{ км}$, КА для глобальних спостережень Землі – з висотами $H \approx 36000 \dots 40000 \text{ км}$.

В цих же межах і ми надалі розглядатимемо космічний простір як зовнішнє середовище, в якому функціонують орбітальні засоби КСС.

Саме в цьому специфічному середовищі здійснюється:

- а) виведення КА на орбіту;
- б) орбітальний та кутовий рух КА;
- в) функціонування КА як технічних пристроїв;
- г) спостереження із космосу за наземними об'єктами в *оптичному* діапазоні ЕМВ;
- д) спостереження із космосу за наземними об'єктами в *радіодіапазоні* ЕМВ;
- е) радіозв'язок між різними КА по радіолінії “борт-борт” у випадках використання спеціальних КА для ретрансляції ЦІ, рішення навігаційних задач та ін.;
- є) радіозв'язок між КА і наземними засобами КСС по радіолінії “борт-Земля” для передачі ЦІ та ДІ (ТМІ, ТІ, СЛІ та ін.);
- ж) радіозв'язок між наземними засобами КСС та КА по радіолінії “Земля-борт” для передачі КІ і т.п.

Узагальнюючи ці процеси, можна сказати, що космічний простір впливає на орбітальний і кутовий рух КА, їх функціонування як технічних пристроїв, а також на процеси добування і передачі ЦІ.

При цьому основними причинами такого впливу космічного простору на КСС виступають:

- механічні сили і моменти (метеорні тіла, техногенне сміття);
- гравітаційні та електромагнітні поля;
- аеродинамічні та електромагнітні сили і моменти;
- космічна радіація;
- значні перепади температури;
- невагомість та надвагомість (перевантаження);
- космічний вакуум та ін.

Варіант систематизованого переліку факторів космічного простору та їхнього впливу на функціонування КСС наведений на рис. 1.7.

Знання зазначених факторів і розуміння наслідків їх впливу на орбітальні і наземні засоби КСС сприяють вибору *раціональ-*

них організаційних, конструктивних, технічних, технологічних, алгоритмічних, ергономічних, економічних та інших рішень на етапах обґрунтування, розробки, виготовлення, розгортання у космічному просторі, експлуатації, цільового застосування КСС та подальшого удосконалення (модернізації) її засобів.

Зрозуміло, що нас у подальшому цікавитимуть здебільшого ті фактори, які впливають на орбітальний рух КА.

1.4. ОСНОВНІ ПАРАМЕТРИ ЗЕМЛІ, ЇЇ АТМОСФЕРИ ТА МІСЯЦЯ

Із наведених на рис. 1.7 факторів космічного простору на орбітальний рух КА ВСп найбільше впливають Земля, її атмосфера та Місяць.

1.4.1. Основні параметри Землі

Земля – третя за рахунком від Сонця планета. Вона має масу $M_z \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Середня щільність Землі $\rho_z \approx 5,517 \text{ г/см}^3$, середня температура поверхні Землі $\bar{t}_z^\circ = 15^\circ \text{C}$ або $\bar{T}_z^\circ \approx 290 \text{ K}$. Прискорення вільного падіння на поверхні Землі становить $g_0 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$. Радіус орбіти Землі (середня відстань від Землі до Сонця) $r_c \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$, а лінійна швидкість руху Землі по орбіті $V_0 \approx 30 \text{ км/с}$.

Кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Іноді для орієнтовних розрахунків приймають $\omega_z \approx 15 \text{ град/год} \approx 15 \text{ кут.хв/хв} \approx 15 \text{ кут.с/с}$. Середній радіус Землі $R_z = 6371 \text{ км}$ [7, 8].

Лінійна швидкість обертання Землі навколо своєї осі (швидкість поступального руху точок на її поверхні) визначається як

$$V_z(\varphi) = \omega_z R_z \cos \varphi = V_z \cos \varphi, \quad (1.8)$$

де φ – широта точки спостереження на Землі;

$V_z = \omega_z R_z$ – лінійна швидкість точок на екваторі.

Як видно із формули (1.8), лінійна швидкість обертання точок на поверхні Землі однозначно визначається їх широтою $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$ і може приймати значення $0 \leq V_z(\varphi) \leq V_z$.

Приклад 1.3. Розрахувати лінійну швидкість стартових комплексів для запуску РН, які розташовані: а) на екваторі ($\varphi_{cm} = 0^\circ$); б) на космодромі Байконур у Казахстані ($\varphi_{cm} \approx +47,5^\circ$); на російському космодромі Плесецьк ($\varphi_{cm} \approx +63^\circ$).

Розв'язання. Скористаємось формулою (1.8). У першому випадку ($\varphi_{cm} = 0^\circ$) отримаємо $V_z = \omega_z R_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \cdot 6371 \approx 465 \text{ м/с}$. У другому ($\varphi_{cm} \approx +47,5^\circ$) матимемо $V_{\varphi=47} = V_z \cos \varphi \approx 465 \cdot \cos 47,5^\circ \approx 465 \cdot 0,68 \approx 314 \text{ м/с}$. І, нарешті, при широті $\varphi_{cm} \approx +63^\circ$ знайдемо, що лінійна швидкість стартового комплексу $V_{\varphi=63} = V_z \cos \varphi \approx 465 \cdot \cos 60^\circ \approx 465 \cdot 0,45 \approx 211 \text{ м/с}$.

Отримані результати необхідно враховувати при виборі точок старту РН та азимутів їх запуску при виведенні КА на орбіти (див. розділ 5).

Внутрішня будова Землі. Вважається [33], що земна куля складається із трьох сфер: земної кори (літосфери), проміжної оболонки (мантії) і ядра (рис. 1.8).

Земна кора має різну товщину: у середньому вона дорівнює близько 5...10 км під дном океану і близько 37 км під материками, змінюючись від 15...25 км у рівнинних і прибережних районах, до 70...80 км – під гірськими областями. Вона складається із осадової, гранітної та базальтової оболонок, які в різних районах мають різні масо-габаритні характеристики і не мають суцільного поширення.

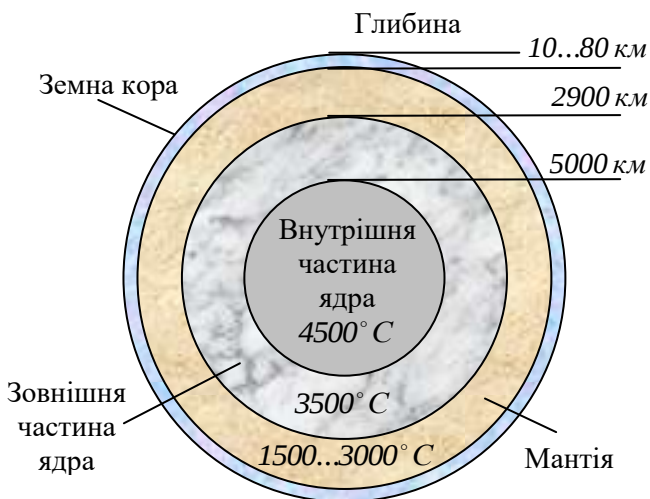


Рис. 1.8. Внутрішня будова Землі

Теплопровідність порід, що складають земну кору, дуже мала: добові коливання температури проникають на глибину менше 1...2 м, річні – не глибше 20...30 м, а далі – температура постійна весь рік. При заглибленні в земну кору її температура підвищується в середньому на $\Delta t^\circ \approx 3^\circ C$ на 100 м, а в активних вулканічних областях досягає $\Delta t^\circ \approx 20^\circ C$ на 100 м.

Будова земної кори досить неоднорідна як за формою її фізичної поверхні (гірські масиви, океанічні впадини), так і за щільністю утворюючих її гірських порід. На підставі вивчення аномалій сил тяжіння встановлено, що надлишок мас (у вигляді гір) на земній поверхні в середньому компенсується зменшенням щільності внутрішніх шарів земної кори і, навпаки, недолік мас на поверхні (впадини) компенсується надлишком щільності усередині земної кори.

Мантія Землі простягається на глибину від 100 до 2900 км, є твердою та складається переважно із кисню, магнію і кремнію. У мантії поширюються поздовжні та поперечні сейсмічні хвилі. Щільність речовини у мантії зростає від $\rho = 3,7 \text{ г/см}^3$ біля її верхньої границі, до $\rho = 5...6 \text{ г/см}^3$ – біля її нижньої границі,

тиск збільшується відповідно – від $p \approx 40000 \text{ атм}$ до $p \approx 1500000 \text{ атм}$, а температура досягає $t^\circ \approx 2500...3500^\circ \text{C}$.

Ядро Землі складається із зовнішньої та внутрішньої частин. Радіус внутрішнього ядра дорівнює приблизно 1300 км , а зовнішнього – близько 3500 км . Щільність речовини у центрі ядра досягає $\rho = 12...16 \text{ г/см}^3$, тиск – близько $p \approx 3500000 \text{ атм}$, а температура – $t^\circ \approx 4000...4500^\circ \text{C}$.

Багато вчених вважають, що ядро Землі рідке, але має властивості твердого тіла. Існує гіпотеза, що ядро – кам'яниста силікатна речовина, яка перейшла під впливом значного тиску і високих температур у металізований стан. Інші вчені вважають, що ядро складається в основному із заліза і, можливо, із кремнію з домішками нікелю.

Із надр Землі на її поверхню безупинно надходить потік тепла (приблизно 10^{21} Дж/рік), що у кілька тисяч разів менше енергії, одержуваної земною поверхнею від Сонця. Основними джерелами цього тепла є енергія від розпаду радіоактивних елементів і тепло, що виділяється при гравітаційному розшаруванні і хімічних реакціях речовини надр. Внутрішнє тепло Землі витрачається повільно, тому природно припустити, що й процес остигання нашої планети відбувається також повільно.

В областях підвищеної концентрації радіоактивних елементів або тектонічних зсувів значна кількість тепла, що виділяється, розплавляє навколишню частину кори, внаслідок чого утворюється силікатний розплав – *магма*, яка при вулканічних виверженнях виходить на поверхню Землі.

Моделі Землі і їхні параметри. Як наслідок тривалого розвитку уявлень про фігуру Землі з метою визначення її реальної форми німецький математик і фізик Іоганн Лістінг у 1873 р. запропонував представляти її *геоїдом*, під яким розуміється фігура, що має в океанах середній рівень води, а на материках – рівень води в уявлених каналах, з'єднаних з океаном [16].

При такому підході поверхня геоїда характеризується постійною величиною потенціалу сили тяжіння.

Отже, Земля не є кулею. Більше того, як показано вище, вона не однорідна за щільністю, що сприяє коливанню додаткової гравітаційної збурювальної сили, яка адитивно підсумовується із центральною силою тяжіння Землі.

Відхилення гравітаційного поля Землі від гравітаційного поля геоїда за рахунок її нерівномірної щільності називаються *аномаліями* сили тяжіння.

На сьогодні на земній кулі відомо близько 270 точок таких аномалій, але для практичного розрахунку збуреного руху КА використовують близько 40 із них.

Іншою моделлю Землі служить *еліпсоїд обертання* (рис. 1.9). Для опису такого еліпсоїда використовують [20] велику піввісь (екваторіальний радіус) a_3 , малу піввісь (полярний радіус) b_3 , середній радіус Землі R_3 , а також розраховані через них параметри: стиск α_3 та ексцентриситет e_3 .

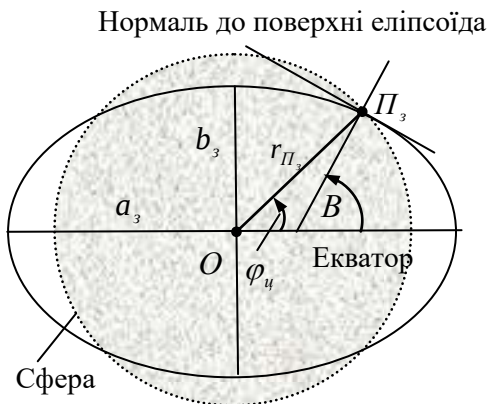


Рис. 1.9. Модель Землі (еліпсоїд Ф.М. Красовського)

У геодезії [32] та у теорії польоту КА як модель Землі можуть використовуватися *загальний* земний еліпсоїд або *часткові* моделі, названі референц-еліпсоїдами.

Якщо загальний еліпсоїд більш-менш правильно описує всю земну поверхню, то референц-еліпсоїд найкраще представляє тільки той або інший материк, частину світу або регіон Землі.

В Україні, у Російській Федерації та інших країнах колишнього Радянського Союзу здебільшого застосовують **референц-еліпсоїд** Ф.М. Красовського [33] з параметрами:

$$\begin{aligned} a_3 &= 6378,245 \text{ км} ; v_3 = 6356,863 \text{ км} ; \\ R_3 &= 6371,032 \text{ км} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Виходячи з цього, знаходять стиск Землі

$$\alpha_3 = (a_3 - b_3) / a_3 = 1 / 298,3 \quad (1.10)$$

і ексцентриситет еліпсоїда

$$e_3 = \sqrt{a_3^2 - b_3^2} / a_3 = \sqrt{2\alpha_3 - \alpha_3^2} \approx 0,082 . \quad (1.11)$$

У такому випадку модуль радіуса-вектора точки Π_3 на земному еліпсоїді (див. рис. 1.9) з похибкою $|\Delta r| \leq 80 \text{ м}$ описується виразом [43, 44]

$$r_{\Pi_3} = a_3 (1 - \alpha_3 \sin^2 \varphi_u) \neq R_3 , \quad (1.12)$$

де $\varphi_u = \arctg[(1 - e_3^2) \operatorname{tg} B]$ – геоцентрична широта точки Π_3 ;

B – геодезична широта цієї ж точки (див. розд. 2).

Очевидно, що висота КА над точкою Π_3 , яка розташована на поверхні несферичної Землі, відрізняється від висоти над сферичною Землею H та визначається як

$$h = r - r_{\Pi_3} = r - a_3 (1 - \alpha_3 \sin^2 \varphi_u) \neq H , \quad (1.13)$$

де $r = R_3 + H$ – модуль радіуса-вектора КА над сферичною Землею (відстань від центра сферичної Землі до КА).

Приклад 1.4. Розрахувати величину розходження між радіусами сферичної і несферичної Землі $\Delta r = |r_{\Pi_3} - R_3|$ в точці Π_3 з геодезичною широтою $B = +50^\circ$.

Розв'язання. Для сферичної Землі $R_3 = 6371 \text{ км}$. Для розрахунку радіуса несферичної Землі скористаємось формулою (1.12) та значеннями стиску Землі (1.10) і ексцентриситету еліпсоїда (1.11). З урахуванням цих даних знайдемо *геоцентричну* широту точки Π_3 через відому *геодезичну* широту B із формули $\varphi_u = \arctg[(1 - e_3^2) \operatorname{tg} B] \approx 49,8^\circ$, а далі розрахуємо радіус несферичної Землі в цій точці $r_{\Pi_3} = a_3(1 - \alpha_3 \sin^2 \varphi_u) \approx 6366 \text{ км}$. На підставі отриманих результатів знайдемо $\Delta r = |r_{\Pi_3} - R_3| \approx 5 \text{ км}$. Це означає, що похибка у визначенні висоти КА над точкою Π_3 на основі формули (1.13) теж становитиме $\Delta h = |h - H| = \Delta r \approx 5 \text{ км}$, яку слід враховувати в прикладних задачах.

На практиці, коли не потрібні високі точності, обмежуються ідеалізованою моделлю Землі у формі кулі, а її фізичним прототипом служить глобус.

Зазвичай конструктивно вісь обертання глобуса символізує вісь обертання Землі і нахилена відносно горизонтальної підстави на кут $\varepsilon \approx 23,5^\circ$, що відображає взаємне розташування площин екватора Землі і екліптики (див. рис. 1.3).

Іншою загальновідомою моделлю Землі є фізична карта світу або його частини з нанесеною на нею координатною сіткою.

1.4.2. Основні параметри атмосфери Землі

Атмосфера Землі (від грец. *ατμοσ* – пара та *σφαῖρα* – куля) – газове (повітряне) середовище навколо Землі, що обертається разом з нею як єдине ціле. Загальна висота атмосфери $h_a \approx 20000 \text{ км}$. Її маса дорівнює $M_a \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ кг}$. Основу сухої атмосфери складають азот N_2 (78%) і кисень O_2 (21%).

Крім того, в атмосфері містяться у малих частках: аргон Ar , вуглекислий газ CO_2 , неон Ne , гелій He , криптон Kr , ксенон Xe , водень H , окис азоту N_2O , метан CH_4 , озон O_3 , сірчистий ангідрид SO_2 , перекис азоту NO_2 , йод I_2 . При цьому кількість озону, що являє великий інтерес для життя на Землі, становить улітку всього до $7 \cdot 10^{-6} \%$, а взимку – близько $2 \cdot 10^{-6} \%$ і його

кількість згодом зменшується, що створює екологічну проблему для людства.

В атмосфері міститься також водяна пара, що утворює хмари, які залежно від *складу* та *висоти* ділять на такі типи [16]:

шарувато-купчасті, шаруваті, шарувато-дощові ($h \leq 2 \text{ км}$);

висококупчасті, високошаруваті ($h = 2...6 \text{ км}$);

пір'ясті, пір'ясто-купчасті, пір'ясто-шаруваті, що складаються із крижаних кристалів ($h \geq 6 \text{ км}$);

перламутрові ($h = 22...30 \text{ км}$);

срібlistі ($h = 75...92 \text{ км}$).

Залежно від розподілу *температури* в атмосфері розрізняють кілька шарів:

тропосфера (від 0 до 11...16 км) – температура знижується в діапазоні $T^\circ \approx 290...210 \text{ K}$;

стратосфера (від 11...16 до 50 км) – температура підвищується в діапазоні $T^\circ \approx 210...270 \text{ K}$;

мезосфера (від 50 до 80 км) – температура знижується в діапазоні $T^\circ \approx 270...180 \text{ K}$;

термосфера (від 80 до 600...800 км);

екзосфера (вище 600...800 км) – температура монотонно підвищується.

За *станом повітря* атмосфера ділиться в такий спосіб:

гомосфера (0...95 км), де відносний склад основних газів не міняється з висотою, азот і кисень – молекулярні;

озоносфера (20...55 км), де азот і кисень – молекулярні та атомарні;

гетеросфера (вище 95 км), де азот і кисень – атомарні.

Область атмосфери на висотах вище 60 км, де стає помітною концентрація іонізованих атомів і молекул, називають *іоносферою* (шар *D* на висоті 60 км, шар *E* на висотах 110...140 км, шар *F* – вище 220 км). Іоносфера впливає на поширення електромагнітного випромінювання (ЕМВ). Такий вплив особливо проявляється у радіодіапазоні, де спостерігається практично повне відбиття від іоносфери радіохвиль метрового діапазону

(ефект Кабанова). Це явище використовується у загоризонтній радіолокації, у наземному радіозв'язку, однак воно негативно впливає на радіозв'язок з КА.

Моделі атмосфери Землі. Параметри атмосфери впливають на величину аеродинамічних сил, що виникають під час руху тіл (ШСЗ) в атмосфері. Ці сили відрізняються для різних пір року, доби, широти місцевості і т.п. Тому при проведенні розрахунків цим зазвичай зневажають і за основу беруть параметри так званої *міжнародної стандартної атмосфери*, які не залежать від часу та місця.

Модель щільності ізотермічної атмосфери на висоті h над Землею можна подати залежністю [16]

$$\rho(h) = \rho_1 \exp[-(h - h_1)/H_a], \quad (1.14)$$

де ρ_1 – щільність повітря на висоті h_1 ;

$H_a = \mathfrak{R}_0 T_1^\circ / (g_1 \tilde{M}_1)$ – висота однорідної атмосфери;

$\mathfrak{R}_0 = 8,31441 \text{ Дж} / (\text{К} \cdot \text{моль})$ – універсальна газова постійна сухого повітря на рівні моря;

T_1° – абсолютна температура повітря на висоті h_1 ;

$g_1 = g_0 \cdot R_s^2 / (R_s + h_1)^2$ – прискорення вільного падіння тіл на висоті h_1 ;

$g_0 = 9,80665 \text{ м} / \text{с}^2$ – прискорення вільного падіння тіл на рівні моря ($h_1 = 0$);

$R_s = 6371 \text{ км}$ – середній радіус Землі;

$\tilde{M}_1$ – молярна маса повітря на висоті h_1 ;

$\tilde{M}_0 = 28,96442 \text{ кг} / \text{кмоль}$ – молярна маса повітря на рівні моря ($h_1 = 0$).

Щільність атмосфери на рівні моря приймають $\rho_0 = 1,225 \text{ кг} / \text{м}^3$ (стандартна атмосфера). За межу *щільної* атмосфери умовно вважають висоту $h_u = 30 \text{ км}$, де щільність зни-

жується до значення $\rho_{\text{ц}} = 0,015 \cdot \rho_0$. З висот $h_g \geq 80$ км починається вакуум, де щільність атмосфери $\rho_a = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \rho_0$.

Висотою однорідної атмосфери H_a на висоті h називають висоту, що дорівнює різниці висот $\Delta h = h_{i+1} - h_i$, при якій щільність атмосфери змінюється у 2,72 рази [19]. Фрагмент стандартної моделі атмосфери для висот низькоорбітальних ШСЗ наведений у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Модель стандартної атмосфери (фрагмент)

h , км	ρ , кг/км ³	H_a , км
200	$4,9 \cdot 10^{-1}$	32
300	$3,7 \cdot 10^{-2}$	52
400	$5,5 \cdot 10^{-3}$	65
500	$1,0 \cdot 10^{-3}$	76
600	$2,0 \cdot 10^{-4}$	84
700	$5,1 \cdot 10^{-5}$	92
800	$1,4 \cdot 10^{-5}$	100
900	$3,8 \cdot 10^{-6}$	100
1000	$1,0 \cdot 10^{-6}$	100

Розподіл молярної маси і температури повітря (молекулярної і кінетичної) залежно від висоти над поверхнею Землі подано у табл. 1.3 [61].

Таблиця 1.3

Розподіл молекулярної маси і температури повітря по висоті

Висота, км	Молекулярна маса, а.о.м.	Температура, К		Гradient молекулярної температури, К/м
		молекулярна	кінетична	
0	28,966	288,15	288,15	- 0,00651122
11	28,966	216,66	216,66	0
25	28,966	216,66	216,66	0,00276098
46	28,966	247,00	247,00	0
54	28,966	247,00	247,00	- 0,00349544
80	28,966	185,00	185,00	0
95	28,966	185,00	185,00	0,00500000
110	28,934	257,64	257,36	0,00801741

120	28,727	335,00	332,24	0,02345357
150	28,107	1010,00	980,05	0,01987408
160	27,900	1199,40	1155,26	0,00308461
170	27,700	1228,71	1175,00	0,00308461
180	27,476	1257,93	1193,20	0,00308461
190	27,245	1287,06	1210,60	0,00308461
200	27,000	1316,10	1226,80	0,00308461

Довідка. Молярна маса речовини являє собою відношення її маси m до кількості цієї речовини n , тобто $\tilde{M} = m/n$. Для будь-якої речовини $\tilde{M} = \text{const}$. Основна одиниця $[\tilde{M}] = \text{кг} / \text{моль}$.

Моль дорівнює кількості речовини, яка містить стільки ж структурних часток (атомів, молекул або ін.) цієї речовини, скільки атомів міститься у вуглеці C масою $m(C) = 12\text{г}$, а саме: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (число Авогадро).

Атомна одиниця маси (*а.о.м.*) – це $1/12$ абсолютної атомної маси вуглецю $m_a(C) = 2 \cdot 10^{-26} \text{кг}$, тобто $1\text{а.о.м.} = m_a(C)/12 = 1,667 \cdot 10^{-27} \text{кг}$. Молекулярна температура T_m° зв'язана з кінетичною T_k° залежністю $T_m^\circ = T_k^\circ \tilde{M}_0 / \tilde{M}_1$.

Використовуючи дані із табл. 1.2 та 1.3 і формулу (1.14), можна моделювати параметри атмосфери і оцінювати їх вплив на функціонування засобів КСС (див. розд. 4) та приймати відповідні рішення.

1.4.3. Основні параметри Місяця

Місяць – небесне тіло, яке є одним-єдиним природним супутником Землі. Його маса приблизно у *80 разів* менша від маси Землі та становить $M_m \approx 7 \cdot 10^{22} \text{кг}$. Прискорення вільного падіння на поверхні Місяця у *6 разів* менше, ніж на поверхні Землі, і становить $g_m \approx 1,623 \text{м} / \text{с}^2$. Середній радіус Місяця приблизно у *4 рази* менше середнього радіуса Землі та дорівнює $R_m \approx 1740 \text{км}$.

Радіус орбіти Місяця (відстань від Землі до Місяця) $r_m \approx 384000 \text{км}$. Виходячи із цього, середній кутовий розмір Місяця такий же, як і у Сонця, і становить $\psi_m \approx 31'$.

Якщо Місяць знаходиться між Сонцем і Землею на одній прямій (рис.1.10), то для спостерігачів, які знаходяться в околі точки перетинання цієї прямої з земною поверхнею, виникає явище затемнення Сонця.

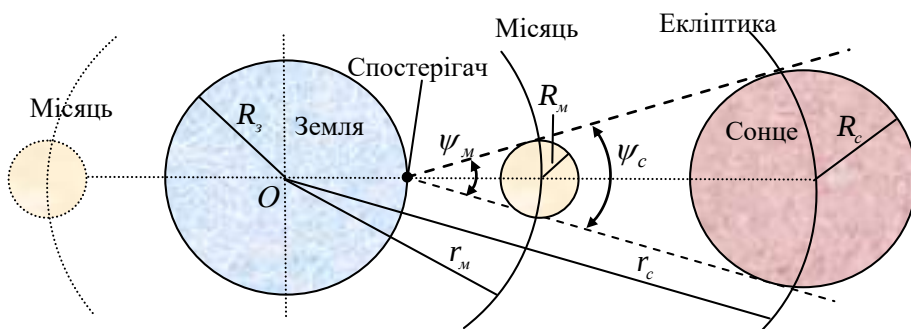


Рис. 1.10. Модель “Земля-Місяць-Сонце”

При цьому через однакові кутові розміри Місяця і Сонця може виникати повне затемнення Сонця, коли диски цих світил суміщаються, або часткове затемнення – в інших ситуаціях.

Аналогічно, якщо Земля знаходиться між Сонцем і Місяцем на одній прямій, то вона може закривати Місяць, тобто виникає явище місячного затемнення.

Період обертання Місяця навколо Землі $T_s^M \approx 29,5$ доби, а навколо своєї осі – $T_o^M \approx 27$ діб. Тому Місяць завжди повернений до Землі однією і тією ж стороною. Площина орбіти Місяця відхилена від площини екліптики на кут $\Delta\varepsilon \approx 5^\circ$, а відносно площини екватора Землі – на кут $\varepsilon_1 = \varepsilon + \Delta\varepsilon \approx 28,5^\circ$ (рис. 1.11).

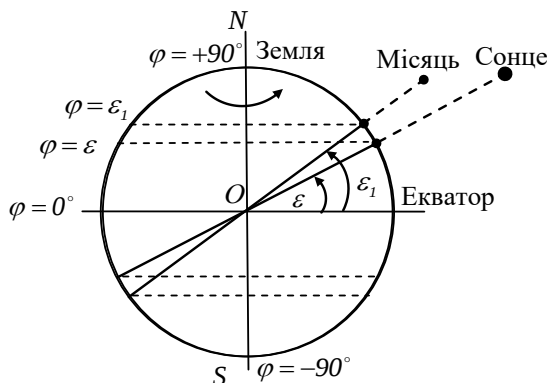


Рис. 1.11. Взаємне розташування орбіти Місяця і екліптики

Тому протягом року для спостерігачів середніх широт Місяць видно на небі нижче (ближче до екватора), ніж Сонце, а також вище від нього (майже над головою).

Максимальна денна температура поверхні Місяця на його екваторі рівняється $T_{max}^{\circ} \approx 374 K$, а мінімальна нічна становить $T_{min}^{\circ} \approx 120 K$. Освітленість Землі Місяцем уповні становить $E_m \approx 0,45 \text{ лк}$.

Таким чином, космічний простір характеризується множиною різних факторів, які утворюють як сприятливі, так і несприятливі умови для функціонування КСС. Основні відомості про небесні тіла, які суттєво впливають на орбітальний рух ШСЗ, наведені у дод.1.

Всі планети Сонячної системи рухаються навколо Сонця, а їхні супутники – навколо своїх планет відповідно до законів і закономірностей небесної механіки. За такими ж законами рухаються і ШСЗ.

Контрольні питання

1. Які небесні тіла входять в Сонячну систему і які з них найбільше впливають на рух ШСЗ і чому?
2. Чи можна стверджувати, що Сонце та планети Сонячної системи обертаються навколо Землі?

3. Які характерні точки і лінії виділяють на земній кулі?
4. Що таке географічні координати наземних пунктів?
5. Які характерні точки і лінії виділяють на небесній сфері?
6. Дайте визначення точок весняного та осіннього рівнодення, літнього та зимового сонцестояння.
7. Чим відрізняється космічний простір як середовище функціонування КА від земних умов?
8. Які моделі Землі найчастіше застосовуються на практиці та чому?
9. Чому атмосфера Землі виступає як самостійний фактор при вивченні процесів у космічних системах?
10. Що таке висота однорідної атмосфери?
11. Чому для наземного спостерігача видимі диски Сонця і Місяця бачаться за розмірами однаковими?
12. У яких випадках виникають явища затемнення Сонця і Місяця? Чи можна говорити і коли про затемнення Землі?

Розділ 2

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ

Орбітальний рух небесних тіл та КА здійснюється відповідно до законів і закономірностей фізики, небесної механіки, астрономії, аеродинаміки та інших фундаментальних положень сучасної науки, що становлять теоретичні основи орбітального руху КА.

2.1. ЗАКОНИ ВЗАЄМОДІЇ НЕБЕСНИХ ТІЛ ТА ЇХ ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДЛЯ ШТУЧНИХ СУПУТНИКІВ ЗЕМЛІ

Як ми уже відзначали, всі небесні тіла безупинно рухаються у спільному гравітаційному полі Сонячної системи, взаємодіючи між собою. Закони та закономірності цієї взаємодії мають загальний характер і їх використовують для опису руху ШСЗ та інших штучних тіл, створених людиною для своїх потреб.

При цьому визначальне місце належить закону всесвітнього тяжіння, а також таким фундаментальним поняттям, як потенційна, кінетична та повна енергія тіл у гравітаційному полі.

2.1.1. Закон всесвітнього тяжіння

Закон всесвітнього тяжіння відкритий англійським ученим І. Ньютоном наприкінці XVII століття. Він стверджує, що *два тіла взаємодіють між собою із силою, модуль якої прямо пропорційний добутку мас тіл і обернено пропорційний квадрату відстані між їхніми центрами* [16], тобто

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

де F – сила взаємодії тіл;

$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравітаційна постійна;

m_1, m_2 – маси тіл, які взаємодіють;

r – відстань між центрами взаємодіючих тіл.

Зауважимо, що гравітаційна постійна γ у формулі (2.1) – це універсальна константа, чисельно рівна силі взаємодії двох тіл з масами $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$, які знаходяться одне від одного на відстані $r = 1 \text{ м}$.

У задачах про рух ШСЗ взаємодіючими тілами виступають Земля ($m_1 = M_3$) і КА ($m_2 = m$). Тому закон всесвітнього тяжіння (2.1) зручно виражати у такому вигляді:

$$F_3 = \gamma \frac{M_3 m}{r^2} = \mu_0 \frac{m}{r^2} = g \cdot m, \quad (2.2)$$

де m – маса супутника;

$r = R_3 + H$ – модуль радіуса-вектора ШСЗ (відстань до ШСЗ від центра Землі);

H – висота ШСЗ над поверхнею Землі;

$\mu_0 = M_3 \cdot \gamma \approx 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі;

$g = \mu_0 / r^2 = \mu_0 / (R_3 + H)^2$ – прискорення тіл, обумовлене силою притягання Землі на висоті H (прискорення вільного падіння).

Зауважимо, що гравітаційний параметр Землі μ_0 у формулі (2.2) – це сила взаємодії Землі з масою $M_3 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ та тіла з масою $m_1 = 1 \text{ кг}$, що знаходяться одне від одного на відстані $r_1 = 1 \text{ км}$.

При висоті $H = 0$ одержимо значення прискорення вільного падіння на поверхні Землі $g_0 = \mu_0 / R_3^2 \approx 9,81 \text{ м} / \text{с}^2$.

Приклад 2.1. Знайти силу взаємодії сферичної Землі і ШСЗ масою $m = 100 \text{ кг}$, який знаходиться на висоті $H = 600 \text{ км}$. Чому дорівнює прискорення вільного падіння тіл на цій висоті?

Розв’язання. Скористаємось формулою (2.2). Для цього знайдемо модуль радіуса-вектора ШСЗ $r = R_3 + H = 6371 + 600 = 6971 \text{ км}$. Тоді для $H = 600 \text{ км}$ отримаємо $F_3(600) = \mu_0 m / r^2 = 3,986 \cdot 10^5 \cdot 10^2 / 6971^2 \approx 820 \text{ м} \cdot \text{кг} / \text{с}^2 = 820 H$. Для порівняння при $H = 0$ $F_3(0) = \mu_0 m / r^2 = 3,986 \cdot 10^5 \cdot 10^2 / 6371^2 \approx 982 H$.

Якщо отримані результати розділити на масу ШСЗ $m = 100\text{кг}$, то отримаємо значення $g(600) \approx 8,2\text{м/с}^2$ і $g(0) = g_0 \approx 9,82\text{м/с}^2$.

2.1.2. Потенційна та кінетична енергія тіл у гравітаційному полі Землі

Потенційна енергія тіла у гравітаційному полі Землі визначається залежністю [44]

$$\mathcal{E}_h = -\mu_0 m / r = -\mu_0 m / (R_z + H). \quad (2.3)$$

У цій формулі знак мінус означає, що при знаходженні тіла на нескінченній відстані від Землі ($r = \infty$) відповідно до закону всесвітнього тяжіння (2.1) сила їхньої взаємодії $F(\infty) = 0$, а отже, і потенційна енергія такого тіла $\mathcal{E}_h(\infty) = 0$, тобто воно не притягається Землею. Але при зближенні тіл їхня потенційна енергія має зменшуватися, оскільки за її рахунок виконується робота, тобто повинна виконуватися умова $\mathcal{E}_h(r) < \mathcal{E}_h(\infty)$. Ця умова саме і враховується знаком мінус у формулі (2.3).

У загальному ж випадку, для переміщення тіла в гравітаційному полі Землі із точки 1 у точку 2 потрібно виконати роботу

$$A_{12} = \mathcal{E}_{h2} - \mathcal{E}_{h1},$$

де $\mathcal{E}_{h1}$ та $\mathcal{E}_{h2}$ – потенційна енергія тіла в точках 1 і 2 відповідно.

Отже, поняття потенційної енергії та роботи еквівалентні між собою, вимірюються в одних і тих самих одиницях ($H \cdot m$), а в окремому випадку, наприклад при $\mathcal{E}_{h1} = 0$, чисельно рівні.

Принципова різниця між ними полягає в тому, що термін “потенційна енергія” свідчить лише про *можливість* тіла виконувати роботу, а термін “робота” – це вже *реалізована* потенційна можливість.

Можна показати, що коли тіло (ракета, КА) з вагою $G = mg$ підняте над Землею на висоту H , то його потенційна енергія

$$\mathcal{E}_h = -\mu_0 m / R_z + mgH. \quad (2.4)$$

При цьому, якщо прийняти, що на поверхні Землі (при $H = 0$) потенційна енергія тіла $\mathcal{E}_{h0} = -\mu_0 m / R_z = 0$, то у тіла, піднятого на висоту H над Землею, вона складатиме

$$\mathcal{E}_h = mgH. \quad (2.5)$$

Такий підхід виправданий для тих випадків, коли нас цікавить не абсолютне значення потенційної енергії, а різниця енергій, тобто виконана робота.

Наприклад, для підйому тіла з поверхні Землі на висоту H потрібно виконати роботу, чисельно рівну різниці енергій на цій висоті та на поверхні Землі. Однак якщо врахувати умову $\mathcal{E}_{h0} = 0$, то одержимо:

$$A_h = \mathcal{E}_h - \mathcal{E}_{h0} = \mathcal{E}_h.$$

Далі. Якщо прийняти масу тіла рівною $m_t = 1 \text{ кг}$, то із формули (2.3) одержимо значення потенційної енергії, яка являє собою **потенціал** сили притягання *сферичної* Землі [44]:

$$U_0 = -\mu_0 / r = -g \cdot r. \quad (2.6)$$

Кінетична енергія притаманна тільки *рухомим* тілам. Наприклад, для поступального руху вона визначається як

$$\mathcal{E}_v = mV^2/2, \quad (2.7)$$

де V – лінійна швидкість тіла.

Якщо розглядається орбітальний рух ШСЗ на *колових* орбітах, то його лінійна швидкість V_0 однозначно визначається висотою такої орбіти H_0

$$V_0 = \sqrt{\mu_0 / r_0} = \sqrt{\mu_0 / (R_z + H_0)}. \quad (2.8)$$

Як видно із виразів (2.3), (2.4) і (2.7), потенційна та кінетична енергія тіл може змінюватися залежно від їхньої висоти або швидкості руху відносно Землі.

У той же час, якщо прийняти, що система “Земля – ШСЗ” є замкнутою (знехтувати притяганням небесних тіл і впливом інших зовнішніх сил), то для ШСЗ виконуватиметься *закон збереження повної енергії* $\mathcal{E}$, тобто

$$\mathcal{E}_h + \mathcal{E}_v = \mathcal{E} = \text{const} . \quad (2.9)$$

Вирази (2.1)...(2.9) є фундаментальними і поряд з іншими законами динаміки дозволяють описувати рух ШСЗ та інших КА.

Приклад 2.2. Знайти потенційну енергію ШСЗ масою $m = 100 \text{ кг}$, який рухається по коловій орбіті з висотою $H_o = 600 \text{ км}$ над сферичною Землею. Чому дорівнює кінетична енергія такого ШСЗ?

Розв'язання. Потенційну енергію ШСЗ знайдемо безпосередньо із виразу (2.3) $\mathcal{E}_h(600) = -\mu_o m / (R_z + H_o) \approx -5,718 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = -5,718 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Для знаходження кінетичної енергії ШСЗ розрахуємо його лінійну швидкість на висоті $H_o = 600 \text{ км}$ за формулою (2.8) $V_o(600) = \sqrt{\mu_o / (R_z + H_o)} \approx 7,56 \text{ км} / \text{с}$. Тоді із виразу (2.7) $\mathcal{E}_v(600) = 0,5 m V_o^2 \approx 2,86 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = 2,86 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

2.1.3. Закони небесної механіки Кеплера

Мова йде про три закони незбуреного руху планет, відкритих німецьким астрономом І. Кеплером на початку 17-го століття [32]. При цьому він розглядав тільки *два* взаємодіючих небесних тіла – Сонце і одна із планет (так звана *задача двох тіл*). Це часткова задача небесної механіки, що полягає у визначенні руху двох тіл (планет), які взаємно притягаються відповідно до закону всесвітнього тяжіння І. Ньютона (2.1) або (2.2).

У такому випадку вплив інших планет не враховується, а планети, що притягаються, розглядаються як матеріальні точки. Ці умови приблизно виконуються для Сонячної системи, а також для штучних супутників планет, у тому числі для ШСЗ [50]. Такий рух називають незбуреним або кеплеровим.

Перший закон Кеплера. *Під час незбуреного руху орбіта рухомої планети є плоска крива другого порядку, в одному із фокусів якої перебуває центр сили притягання – Сонце.*

Крива другого порядку – це для планет один з конічних перетинів: окружність або еліпс, а для інших космічних об'єктів – може бути також парабола або гіпербола.

У нерухомій плоскій *полярній* системі координат r і ϑ рівняння незбуреної орбіти можна подати еліпсом як функцією часу t у вигляді:

$$r(t) = p / [1 + e \cos \vartheta(t)] , \quad (2.10)$$

де r – модуль радіуса-вектора рухомої планети (ШСЗ);

$p = a(1 - e^2)$ – фокальний параметр еліпса;

$e = c / a$ – ексцентриситет еліпса;

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – половина міжфокусної відстані еліпса;

a , b – велика та мала півосі еліпса;

ϑ – істинна аномалія (кутове положення) планети (ШСЗ).

Зміст цих понять пояснюється рис. 2.1, а детальне тлумачення наводиться у наступних розділах підручника.

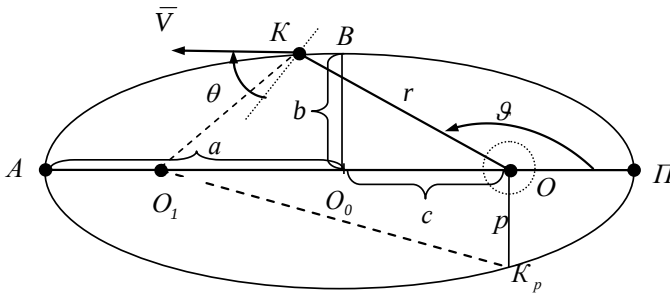


Рис. 2.1. Елементи еліптичної орбіти:

AP – лінія апсид; A – апогей (афелій); P – перигей (перигелій); O – один із фокусів еліпса; O_0 – центр орбіти; $\bar{V}$ – вектор лінійної швидкості планети (ШСЗ); θ – кут місцевого горизонту

Другий закон Кеплера. Під час незбуреного руху площа, що описується радіусом-вектором рухомої планети, змінюється пропорційно часу.

Цей закон формулюють ще як **закон площ**: радіус-вектор планети за рівні проміжки часу окреслює рівні площі.

Геометрична інтерпретація даного закону подана на рис. 2.2.

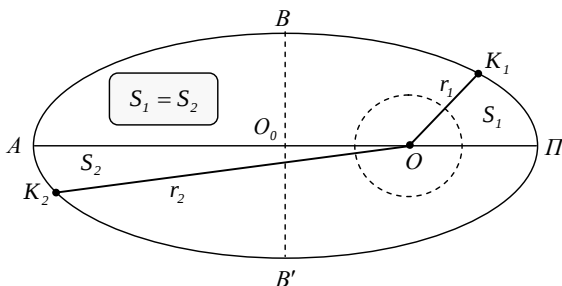


Рис. 2.2. До питання щодо секторної швидкості

При цьому передбачається, що деяка планета переміщається із точки Π в точку K_1 за час Δt_1 , а із точки A в точку K_2 – за час $\Delta t_2 = \Delta t_1$. Тоді площа сектора OOK_1 S_1 буде дорівнювати площі сектора OAK_2 S_2 . Площу такого сектора, окреслювану в одиницю часу, називають *секторною* (іноді *секторіальною*) швидкістю та позначають символом σ .

З урахуванням цього можна стверджувати, що для даної орбіти секторна швидкість є величиною незмінною.

Математично другий закон Кеплера можна подати як

$$r^2(t) \cdot \dot{\theta}(t) = r(t) \cdot V(t) \cdot \cos \theta(t) = 2\sigma = \text{const}, \quad (2.11)$$

де $V(t) = r(t) \dot{\theta}(t)$ – лінійна швидкість планети навколо Сонця;

$\dot{\theta}(t) = d\theta(t)/dt$ – кутова швидкість планети навколо Сонця;

$\theta(t)$ – кут місцевого горизонту (див. рис. 2.1) – кут нахилу вектора лінійної швидкості планети $\bar{V}$ до місцевого горизонту.

Зауважимо, що площу будь-якого еліпса можна розрахувати за формулою [15]

$$S_{el} = \pi a b. \quad (2.12)$$

З урахуванням цього можна стверджувати, що справедлива формула (див. рис. 2.2)

$$S_{el} / T = S_1 / \Delta t_1 = S_2 / \Delta t_2, \quad (2.13)$$

де T – період обертання планети навколо Сонця.

Третій закон Кеплера. Під час незбуреного руху двох планет навколо центрального тіла – Сонця добуток квадратів періодів їхнього обертання на суми мас Сонця та цих планет співвідносяться як куби великих півосей їхніх орбіт, тобто

$$\frac{T_1^2(M_c + M_1)}{T_2^2(M_c + M_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

де T_1 та T_2 – періоди обертання планет;

M_c , M_1 і M_2 – маси Сонця і планет відповідно;

a_1 і a_2 – великі півосі орбіт планет.

Нехтуючи масами планет M_1 і M_2 у порівнянні з масою Сонця M_c , одержимо третій закон Кеплера у його первісній формі:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \approx \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (2.14)$$

тобто квадрати періодів обертання двох планет навколо Сонця співвідносяться як куби великих півосей їх еліптичних орбіт.

Можна показати, що період обертання будь-якої j -ї планети навколо Сонця відносно далекого орієнтира, наприклад зірки (сидеричний період), обчислюється за формулою

$$T_j = 2\pi\sqrt{a_j^3 / \mu_j}. \quad (2.15)$$

де a_j – велика піввісь орбіти j -ї планети;

$\mu_j = M_j \cdot \gamma$ – гравітаційний параметр j -ї планети;

M_j – маса j -ї планети.

Приклад 2.3. Користуючись даними із табл. 1.1, переконатись у справедливості дії третього закону Кеплера відносно планет Венери і Марса.

Розв'язання. Оскільки в третьому законі Кеплера фігурують відношення величин, то для розрахунків достатньо оперувати з відносними значеннями періодів обертання планет і розмірів їх орбіт. Приймаючи для Венери $T_1 = 0,615$, $a_1 \approx 0,5r_1 = 0,3615$, а для Марса $T_2 = 1,881$, $a_2 \approx 0,5r_2 = 0,762$, отримаємо $T_1^2 \approx 0,378$, $a_1^3 \approx 0,047$, $T_2^2 \approx 3,538$, $a_2^3 \approx 0,442$. Тоді відношення

квадратів періодів планет $T_1^2/T_2^2 \approx 0,107$, а відношення кубів великих півосей їх орбіт $a_1^3/a_2^3 \approx 0,106$.

Закони Кеплера мають універсальний характер і тому стосуються руху як природних, так і штучних тіл, у тому числі ШСЗ. Вони тісно пов'язані з іншими законами і закономірностями класичної механіки та взаємно доповнюють один одного.

2.1.4. Основні закони і закономірності класичної механіки

До основних законів і закономірностей класичної механіки з огляду на орбітальний рух КА віднесемо закон збереження кількості руху, а також три закони класичної механіки Ньютона для поступального руху тіл [16].

Кількість руху – це міра механічного руху *матеріальної точки*, яка дорівнює добутку її маси m на швидкість її руху v :

$$Q = m \cdot v.$$

Кількість руху *механічної системи* дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх її k точок $m_k v_k$ або добутку маси всієї системи M_Σ на швидкість її центра мас $v_{цм}$:

$$\bar{Q}_\Sigma = \sum_k m_k \bar{v}_k = M_\Sigma \cdot \bar{v}_{цм}.$$

Зміна кількості руху відбувається під дією тільки *зовнішніх сил*, тобто сил, що діють на цю систему з боку тіл, що не входять до неї. Такі системи вважаються *розімкнутими*.

Відповідно до теореми щодо зміни кількості руху розімкнутої системи [16] справедливе таке співвідношення:

$$Q_1 - Q_0 = \sum_k \mathfrak{I}_k^3,$$

де Q_0 та Q_1 – кількість руху системи на початку та наприкінці деякого проміжку часу $\Delta t = t_1 - t_0$;

$\mathfrak{I}_k^3 = \int_{t_0}^{t_1} F_k^3 dt$ – імпульс *зовнішніх* сил F_k^3 за цей же проміжок.

У диференціальній формі ця теорема виражається рівнянням

$$dQ/dt = \sum_k F_k^3.$$

Для *замкнутої* системи, тобто для системи, на яку не діють зовнішні впливи, має місце **закон збереження кількості руху**:

$$\overline{Q}_\Sigma = \sum_k m_k \overline{v}_k = \text{const}.$$

Цей закон пояснює такі явища, як *реактивний рух ракет*, віддача зброї при пострілі і т.п. Наприклад, для зброї після пострілу закон збереження кількості руху приймає вид алгебраїчного рівняння

$$m_0 \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1, \quad (2.16)$$

де $m_1 \cdot v_1$ – кількість руху кулі, наданого їй пороховими газами;

$m_0 \cdot v_0$ – відповідна кількість руху зброї після пострілу, яка обумовлена тими ж причинами.

Приклад 2.4. Оцінити початкову швидкість руху (віддачу) пістолета Макарова в момент пострілу із нього. Прийняти початкову масу пістолета $m_\Sigma = 810\text{ г}$, масу кулі $m_1 = 6\text{ г}$, а її початкову швидкість $v_1 = 315\text{ м/с}$.

Розв'язання. Якщо знехтувати масою порохових газів, то на основі (2.16) запишемо $(m_\Sigma - m_1) \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1$, звідки $v_0 = m_1 \cdot v_1 / (m_\Sigma - m_1) \approx 2,35\text{ м/с}$.

Як видно із виразу (2.16) і отриманих результатів, підбираючи маси кулі m_1 і зброї m_0 , можна регулювати величину швидкості (віддачу) зброї v_0 , що має практичне значення. Щось подібне відбувається і при стартах ракет, при керуванні рухом КА за допомогою реактивних двигунів і т.п.

Імпульс сили – міра дії сили за деякий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$. Величина імпульсу сили дорівнює добутку середнього значення сили F_{cp} на час її дії Δt :

$$\mathfrak{I} = F_{cp} \cdot \Delta t .$$

За час дії сили Δt кількість руху матеріальної точки з масою m збільшиться на величину

$$m \cdot v_1 - m \cdot v_0 = \mathfrak{I} . \quad (2.17)$$

Поняття імпульсу сили використовується в механіці, в задачах корекції орбіти КА, при розрахунках дії збурювальних факторів, (зіткнення з метеорами, травлення газу або палива і т.п.).

Три **закони класичної механіки** сформульовані англійським ученим І. Ньютоном у 1867г [16] . Вони з'явилися як результат узагальнення численних спостережень, дослідів і теоретичних досліджень як самого І. Ньютона, так і італійського вченого Г. Галілея, голландського вченого Х. Гюйгенса та ін.

Зауважимо, що закони І. Ньютона перестають діяти при дослідженнях об'єктів дуже малих розмірів (елементарних часток), а також при їхньому русі зі швидкістю світла.

Перший закон Ньютона. *Усьяке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху, поки і оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити цей стан.*

Формально цей закон можна представити як

$$\overline{Q} = \begin{cases} m \cdot \overline{v} = const, \text{ якщо } \overline{F} = 0; \\ m \cdot \overline{v} = var, \text{ якщо } \overline{F} \neq 0. \end{cases}$$

При цьому стан спокою означає, що $\overline{v} = 0$, а рівномірний і прямолінійний рух виражений як $\overline{v} \neq 0 = const$.

Другий закон Ньютона. *Зміна кількості руху тіла пропорційна прикладеній до нього рушійній силі та відбувається у напрямку тієї прямої, вздовж якої ця сила діє.*

Як бачимо, відповідно до другого закону Ньютона внаслідок дії сили змінюється кількість руху тіла:

$$dQ/dt = F \text{ або } mdv/dt = m \cdot \dot{v} = F .$$

Відповідно до сучасних уявлень і термінології у першому та другому законах під тілом варто розуміти матеріальну точку, а під рухом – рух відносно деякої інерціальної системи відліку.

Якщо врахувати причинно-наслідкові зв'язки, то для горизонтального руху тіла зручніше представити цей закон у вигляді

$$a = F / m,$$

де $a = \dot{v}$ – прискорення поступального руху.

Крім того, при описі руху тіл у вертикальній площині, наприклад, у задачах виведення КА на орбіту, другий закон Ньютона виражає вагу G тіла (КА, ракети) через його масу m і прискорення вільного падіння g

$$G = mg. \quad (2.18)$$

Приклад 2.5. Розрахувати необхідну початкову тягу P_n ракети-носія (РН) типу “Зеніт”, якщо її стартова маса $m_n = 460 \cdot 10^3$ кг.

Розв'язання. Зрозуміло, що для успішного старту РН необхідно щоб тяга її двигунів перевищувала початкову вагу ракети G_n , тобто $P_n > G_n$. Якщо стартовий комплекс розташований на рівні моря, то $g = g_0 \approx 9,8$ м/с². Тоді згідно із формулою (2.18) $P_n > G_n = g_0 m_n \approx 460 \cdot 10^4$ кг · м/с² $\approx 460 \cdot 10^4$ Н.

Третій закон Ньютона. *Дії завжди є рівна та протилежна протидія. Інакше, взаємодії двох тіл одне на одного між собою рівні та спрямовані у протилежні сторони.*

Інтерпретація третього закону Ньютона показана на рис. 2.3. Математичний запис закону для моделі “локомотив – вагон” (рис. 2.3, а) має вигляд:

$$F_{12} = -F_{21},$$

де F_{12} – сила, яка прикладена до тіла 2 (вагон) з боку тіла 1 (локомотив);

F_{21} – сила, яка прикладена до тіла 1 з боку тіла 2 (сила реакції тіла 2).

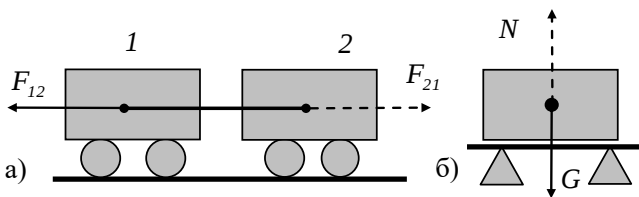


Рис. 2.3. До питання взаємодії тіл

Для моделі “вантаж – опора” (рис. 2.3, б) аналогічно можна записати:

$$G = -N,$$

де G – сила ваги (вага) тіла; N – сила реакції опори (стола).

Закон всесвітнього тяжіння, закони небесної та класичної механіки становлять теоретичну основу орбітального руху небесних тіл і КА.

Їхнє знання та розуміння дозволяє грамотно створювати та правильно експлуатувати орбітальні засоби КСС і будь-яких інших космічних систем.

2.1.5. Сили, що діють на космічні апарати в орбітальному польоті

У загальному випадку на КА в орбітальному польоті діють три основні групи сил [26, 27, 44, 49]:

результуюча сила притягання небесних тіл $\bar{F}_{\Sigma}$;

збурювальні сили зовнішнього середовища $\bar{Q}_e$;

реактивні сили двигунів керування рухом КА $\bar{P}$.

Відповідно до другого закону Ньютона рух КА під дією цих сил можна описувати диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m d^2 \bar{r} / dt^2 = \bar{F}_{\Sigma} + \bar{Q}_e + \bar{P}, \quad (2.19)$$

де m – маса КА; $\bar{r}$ – радіус-вектор КА.

Доданок у правій частині рівняння (2.19) $\bar{F}_\Sigma$ є результуючим вектором сил, обумовлених притяганням КА всіма небесними тілами, але насамперед тілами Сонячної системи (рис. 2.4).

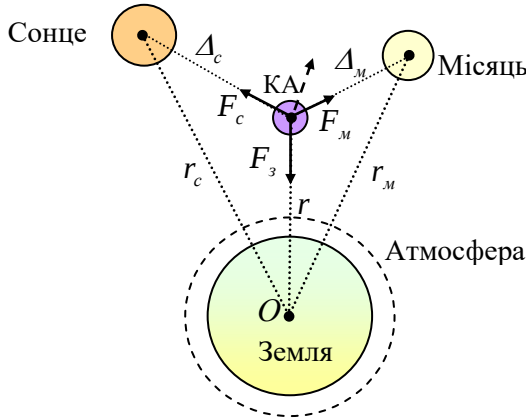


Рис. 2.4. Сили, що діють на КА в орбітальному польоті

У цьому випадку відповідно до закону всесвітнього тяжіння

$$\bar{F}_\Sigma = \gamma m \sum_{j=0}^J \frac{M_j}{\Delta_j^3} (\bar{r} - \bar{r}_j), \quad (2.20)$$

де $j = 0, 1, \dots, J$ – ідентифікатор небесного тіла, наприклад, для Сонця $j = 0$, для Землі $j = 3$;

M_j – маса j -го небесного тіла;

$\bar{r}_j$ – радіус-вектор j -го небесного тіла відносно Землі;

Δ_j – відстань між КА та j -м небесним тілом.

На практиці для КА, що функціонують на низьких орбітах, впливом на їхній рух Сонця, Місяця та планет можна нехтувати, оскільки відстані від КА до них значно перевищують відстань між КА та Землею. У такому випадку на КА діє в основному тільки сила притягання Землі $\bar{F}_3$, тобто $\bar{F}_\Sigma \approx \bar{F}_3$.

Приклад 2.6. Розрахувати результуючу силу притягання ШСЗ масою $m = 100 \text{ кг}$, який знаходиться на прямій “Земля-Сонце” на висоті $H = 600 \text{ км}$. Притяганням ШСЗ Місяцем знехтувати.

Розв’язання. Оскільки ШСЗ знаходиться на прямій “Земля-Сонце”, то результуючу силу притягання такого ШСЗ можна розрахувати як $F_{\Sigma} \approx F_s - F_c$ (див. рис. 2.4). В свою чергу, відповідно до закону всесвітнього тяжіння (2.2) для висоти $H_1 = 600 \text{ км}$ отримаємо (див. приклад 2.1) $F_s(600) \approx 820 \text{ Н}$. Для розрахунків сили F_c приймемо, що відстань між центрами Землі і Сонця $r_c = 150 \cdot 10^6 \text{ км}$. Тоді відстань між КА і Сонцем $\Delta_c = r_c - H - R_s$. З урахуванням цього за аналогією з формулою (2.2) для Сонця з масою $M_c \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ отримаємо $\mu_c = \gamma \cdot M_c \approx 13,344 \cdot 10^{10} \text{ км}^3 / \text{с}^2$. Тоді для висоти КА $H = 600 \text{ км}$ при $R_s = 6371 \text{ км}$ знайдемо $F_c(600) = \mu_c m / \Delta_c^2 \approx 0,6 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = 0,6 \text{ Н}$. Як бачимо $F_c(600) \ll F_s(600)$, тобто притяганням Сонця на таких висотах можна нехтувати і вважати, що $F_{\Sigma} \approx F_s$.

Крім того, якщо рух КА відбувається за межами атмосфери Землі, то її опором можна теж нехтувати та прийняти $\bar{Q}_e \approx 0$, оскільки інші складові цього вектора досить малі.

Тоді з урахуванням цих двох обмежень рівняння (2.19) для низьких орбіт набуде вигляду:

$$m d^2 \bar{r} / dt^2 \approx \bar{F}_s + \bar{P}. \quad (2.21)$$

Рух КА, описуваний рівнянням (2.21), називається **керуванням**, тому що на нього можна впливати шляхом зміни вектора $\bar{P}$. За відсутності реактивних сил ($\bar{P} = 0$) рух КА називається **некеруванням** (пасивним) або **балістичним**.

Якщо при **некеруваному** русі КА враховують сили притягання небесних тіл $\bar{F}_{\Sigma}$ і збурювальні сили $\bar{Q}_e$, то формула (2.19) приймає вид рівняння **збуреного** руху

$$m d^2 \bar{r} / dt^2 = \bar{F}_{\Sigma} + \bar{Q}_e. \quad (2.22)$$

При цьому джерелами збурень є не тільки небесні тіла та зовнішнє середовище, а і несферичність Землі та неоднорідність її щільності, тобто вектор

$$\overline{F}_3 = \overline{F} + \Delta\overline{F},$$

де $\overline{F}$ – вектор сили притягання *сферичної однорідної* за щільністю Землі (центральної сили Землі);

$\Delta\overline{F}$ – вектор збурювальних сил, обумовлених *несферичністю* Землі, її *неоднорідністю* за щільністю і т.п.

Якщо у наведених рівняннях покласти $\overline{Q}_g = 0$ і врахувати тільки дію центральної сили Землі $\overline{F}$ (тобто прийняти $\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_3 = \overline{F}$), то матимемо модель *незбуреного* орбітального руху КА

$$m d^2 \overline{r} / dt^2 = \overline{F}. \quad (2.23)$$

Відповідно до розглянутих ситуацій будемо розрізняти далі незбурений, збурений та керований орбітальний рух КА.

2.2. ЧАС

Усі небесні тіла, а також космічні об'єкти *безупинно рухаються* у часі та у просторі. Тому для опису такого руху необхідно знати одиниці виміру та системи обчислення часу.

При цьому під **часом** розуміють величину, яка характеризує послідовну зміну явищ і станів матерії, що визначає тривалість їх буття [16].

Для виміру часу користуються природними або штучними періодичними процесами зі стабільним періодом повторення.

До *природних* процесів належать обертання Землі навколо своєї осі та її орбітальний рух навколо Сонця.

Найпоширенішими *штучними* процесами є коливання маятника, резонансні коливання кварцової пластинки (кварцові годинники), коливальні процеси в атомах і молекулах (атомні годинники, молекулярні годинники).

Історично людство віддавна використовує дві *основні одиниці* виміру часу, обумовлені:

- обертанням Землі навколо власної осі – **добу**;
- рухом Землі по екліптиці навколо Сонця – **рік**.

2.2.1. Одиниці часу, що обумовлені обертанням Землі навколо своєї осі

У небесній механіці використовують такі одиниці виміру часу, обумовлені обертанням Землі навколо своєї осі (добовим обертанням): *зоряна доба*; *істинна сонячна доба*; *середня сонячна доба* [19, 26, 27, 39].

Доба – це проміжок часу, за який Земля робить повний оберт навколо своєї осі відносно якої-небудь точки на небесній сфері.

Як *опорна точка* (орієнтир) небесної сфери під час виміру часу можуть використовуватися:

точка весняного рівнодення (ТВРД);

центр істинного Сонця;

середнє екваторіальне Сонце.

Нагадаємо, що ТВРД перебуває в центрі Сонця 20 або 21 березня кожного року. В інші дати її можна задати напрямком на зірку, що у ці дні лежить на лінії весняного рівнодення.

Під **істинним Сонцем** розуміють видимий диск Сонця, тобто те реальне Сонце, яке ми спостерігаємо щодня. Оскільки кутовий розмір видимого Сонця становить $\psi_c \approx 32'$ (див. розд. 1), то його диск не можна приймати за точковий об'єкт. Тому в астрономії використовують *центр* цього диска.

Крім того, оскільки істинне Сонце рухається відносно Землі по екліптиці, а отже, нерівномірно через еліптичність орбіти і її нахил до площини екватора Землі, то істинне Сонце виявляється незручним для виміру часу. У зв'язку з цим на практиці використовують поняття середнього екваторіального Сонця.

Середнє екваторіальне Сонце – це *уявлюване Сонце* (фіктивна точка на небесній сфері), що рухається не по екліптиці, а в *площині екватора* Землі з постійною швидкістю відносно нерухомих зірок. Воно починає рухатися із ТВРД (як і реальне Сонце по екліптиці) і повертається знову у ТВРД через так званий *тропічний рік* одночасно з істинним Сонцем.

Відповідно до цього залежно від опорної точки (світила) на небесній сфері розрізняють *зоряний* і *сонячний* час:

зоряний час (опорна точка – ТВРД);

істинний сонячний час (опорна точка – центр видимого диска Сонця);

середній сонячний час (опорна точка – середнє екваторіальне Сонце).

Зоряна доба – це час повного оберту Землі навколо своєї осі відносно ТВРД або деякої зірки. Іншими словами – це проміжок часу між двома послідовними однойменними кульмінаціями ТВРД на одному і тому ж географічному меридіані (меридіані спостерігача). Зоряна доба починаються в момент верхньої кульмінації ТВРД.

Зоряний час – це час, що відлічується від моменту верхньої кульмінації ТВРД до будь-якого іншого її положення та виражений у частинах зоряної доби.

Істинна сонячна доба – це час повного оберту Землі навколо своєї осі відносно центра істинного Сонця. По-іншому – це проміжок часу між двома послідовними однойменними кульмінаціями центра видимого Сонця на одному і тому ж меридіані. За початок істинної сонячної доби приймається момент нижньої кульмінації центра видимого диска Сонця (істинна північ).

Істинний сонячний час – це час, що відлічується від моменту нижньої кульмінації істинного Сонця до будь-якого іншого його положення та виражається в частинах істинної сонячної доби – годинах, хвилинах, секундах і т.д. Оскільки Земля рухається навколо Сонця не по колу, а по еліпсу (тобто нерівномірно) і площина екватора Землі нахилена до площини екліптики, то істинна сонячна доба коливається протягом року в межах приблизно ± 15 хв. Це незручно, тому за одиницю виміру часу вводять середню сонячну (середньосонячну) dobu.

Середньосонячна доба – це час повного оберту Землі відносно середнього екваторіального Сонця. Інше визначення – це проміжок часу між двома послідовними верхніми (або нижніми)

кульмінаціями середнього екваторіального Сонця на одному і тому ж меридіані.

За початок середньосонячної доби приймають момент нижньої кульмінації середнього Сонця (середня північ). Середня північ і середній південь (полудень) збігаються із істинними чотири рази на рік: 15 квітня, 13 червня, 1 вересня та 25 грудня. В інші дні року середня північ і середній полудень настигають то трохи раніше, то трохи пізніше істинних, але це розходження не перевищує $16,5 \text{ хв}$ [31].

Все людство живе саме за **середньосонячним часом**. Тому для стислості, де це припустимо, будемо говорити просто про *сонячний* або *середній* час, про *сонячну* або *середню* добу. Дрібнішими одиницями виміру часу є години (год , h), хвилини (хв , m), секунди (s , s), мілісекунди (мс , ms) і т.д.

Тривалість середньосонячної доби (сд) у *сонячному* масштабі часу прийнята рівною

$$T_{\text{сд}} = 24^h = 1440^m = 86400^s. \quad (2.24)$$

Тривалість зоряної доби (зд) менше сонячної і становить у *сонячному* масштабі часу

$$T_{\text{зд}} = 23^h 56^m 04^s = 86164^s. \quad (2.25)$$

Отже, різниця в тривалості середньосонячної і зоряної діб дорівнює

$$\delta T = T_{\text{сд}} - T_{\text{зд}} = 3^m 56^s = 236^s. \quad (2.26)$$

Аналогічно можна виразити тривалість зоряної доби у *зоряному* масштабі часу $T_{\text{зд}} = 24^h = 1440^m = 86400^s$, а тривалість середньосонячної доби складе $T_{\text{сд}} = T_{\text{зд}} + \delta T = 24^h 03^m 56^s = 86636^s$, хоча на практиці при експлуатації КСС такий підхід використовується вкрай рідко.

Причина виникнення розходження між тривалістю зоряних і середньосонячних діб наочно зображена на рис. 2.5.

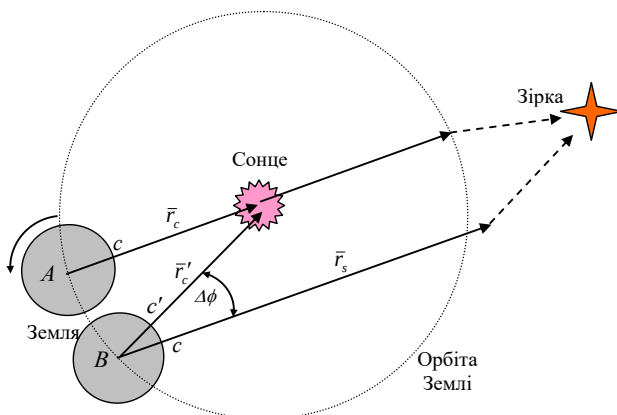


Рис. 2.5. До пояснення розходжень між середньосонячним та зоряним часом

Вона визначається такими геометричними та фізичними факторами:

а) відстань від Землі до зірки r_s набагато більше відстані від Землі до Сонця $r_c \approx 150 \cdot 10^6$ км, тобто $r_s \gg r_c$. Наприклад, найближча до Землі зірка α Центавра перебуває на відстані $r_s = 396 \cdot 10^{11}$ км $\approx 4,3$ св. року, що перевищує відстань від Землі до Сонця у $2,65 \cdot 10^5$ разів;

б) Земля, рухаючись навколо Сонця по орбіті, одночасно обертається навколо своєї осі;

в) за час повного оберту Земля переміститься із позиції A в позицію B . Відстань $AB = 2\pi \cdot r_c / 365 \approx 2,6 \cdot 10^6$ км занадто мала у порівнянні з відстанню r_s ;

г) при використанні зоряного масштабу часу точка c на земній поверхні, відносно якої здійснювався відлік доби в позиції A , буде, як і раніше, належати радіусу-вектору $\vec{r}_s$ при переміщенні Землі в позицію B ;

д) для середньосонячної доби відстань AB порівнянна з відстанню r_c . Отже, Земля повинна обернутися більш ніж на 360° для того, щоб точка відліку c' лежала на радіусі-векторі $\vec{r}_c'$, що

з'єднає центри Землі та Сонця. При цьому необхідний кут повороту становить $\Delta\phi \approx 1^\circ$;

е) для подолання цього кута Землі необхідно додатковий час $\Delta t \approx \Delta\phi / \omega_s \approx 4^m$, що і є розбіжністю між середньосонячними та зоряними добами.

Коефіцієнт пропорційності між сонячним і зоряним масштабами часу розраховується як

$$q = T_{co} / T_{zo} = 86400^s / 86164^s \approx 1,002738. \quad (2.27)$$

Цей коефіцієнт показує, у скільки разів тривалість сонячної одиниці часу (наприклад, секунди) більше тривалості зоряної одиниці. А це означає, що один і той же часовий інтервал містить зоряних одиниць більше, ніж сонячних (рис. 2.6). Отже, його слід застосовувати для перерахунків сонячних інтервалів часу в зоряні.



Рис. 2.6. До масштабів сонячного і зоряного часу

Для зворотних перерахунків, тобто для перерахунків зоряних інтервалів часу в сонячні, слід користуватись коефіцієнтом

$$q' = 1 / q \approx 0,997269. \quad (2.28)$$

Зоряний час є більш універсальним, ніж сонячний, для опису незалежних процесів у вселенських масштабах. З огляду на це його використовують в астрономії, в небесній механіці, в динаміці космічних польотів і т.п.

Однак він незручний для виміру часу у повсякденному житті людей, оскільки не узгоджується із чергуванням дня та ночі. Тому для опису процесів на Землі у практичній діяльності людства використовують сонячний час.

2.2.2. Одиниці часу, що обумовлені рухом Землі навколо Сонця

Основною одиницею рахунку часу, обумовленою рухом Землі навколо Сонця, є рік (річний рух Землі). Інакше кажучи, рік відповідає проміжку часу, протягом якого Сонце завершує повний круг по небесній сфері. При цьому залежно від опорної точки, відносно якої вимірюється цей проміжок, розрізняють зоряний (сидеричний), тропічний, аномалістичний, драконічний, місячний і календарний роки [7, 26, 47, 55].

Зоряний рік – це час повного оберту Сонця по небесній сфері відносно однієї та тієї ж зірки. Він дорівнює $\Gamma_s = 365,25636 \text{ сд} = 366,25636 \text{ зд}$.

Тропічний рік – це час між двома послідовними проходженнями центра Сонця через ТВРД. Він дорівнює $\Gamma_{tr} = 365,2422 \text{ сд} = 366,2422 \text{ зд}$. До речі, коефіцієнт (2.27) часто визначають, виходячи із тривалості тропічного року як

$$q = 366,2422 / 365,2422 \approx 1,002738.$$

Аномалістичний рік – проміжок часу між двома послідовними проходженнями центра Сонця через перигей його видимої геоцентричної орбіти. Тривалість аномалістичного року $\Gamma_{an} = 365,2596 \text{ сд} = 366,2596 \text{ зд}$.

Драконічний рік – проміжок часу між двома послідовними проходженнями Сонця через один і той же (висхідний або низхідний) вузол орбіти Місяця на екліптиці. Тривалість драконічного року $\Gamma_{op} = 346,6200 \text{ сд} = 347,6200 \text{ зд}$.

Місячний рік складається з 12 синодичних місяців. Тривалість місячного року $\Gamma_m = 354,3671 \text{ сд} = 355,3671 \text{ зд}$.

Крім того, для виміру часу між двома датами, віддаленими одна від одної, застосовують **юліанські дні (JD)** – дні, які безупинно відлічуються від 1 січня 4713 р. до н.е., та **юліанські цикли**.

Наприклад, на початок 1 січня 2011 р. число юліанських днів склало $JD = 2455197$.

Юліанський цикл – проміжок часу у 7980 років ($7980 = 28 \times 19 \times 15$), через який збігаються початки циклів: сонячного (28 років), метона (19 років) і індікціона (15 років).

Довідка. Метонів цикл – проміжок часу, рівний 19 тропічним сонячним рокам, або 235 синодичним місяцям, або 6940 добам, який покладений в основу місячно-сонячного грецького календаря. Його запропонував у 433 р. до н.е. давньогрецький астроном, математик та інженер Метон Афінський (род. близько 460 р. до н.е. – рік смерті невідомий).

Індікціон або Індікт (від лат. *indictio* – оголошення, вказівка) – період в 15 років, що використовувався в літочисленні Римської імперії та її наступницях, і увійшов у побут Православної Церкви.

Тропічний рік лежить в основі сучасного календаря. Однак він містить не ціле число діб, що незручно для практики. Тому вводять поняття **календарного року**, який за григоріанським календарем містить 365 *сд*, а кожний четвертий (високосний) – 366 *сд*.

Календарний **григоріанський** рік (новий стиль) починається раніше **юліанського** (старий стиль) на 13 діб (1 січня та 14 січня відповідно). Тривалість григоріанського року складає $G_{gp} = 365,2425 \text{ сд} = 366,2425 \text{ зд}$, а тривалість юліанського року – $G_{ю} = 365,2500 \text{ сд} = 366,2500 \text{ зд}$.

Довідка. Юліанський календар введено в 46 р. до н.е. римським верховним жерцем і полководцем Гаєм Юлієм Цезарем. В основу календаря покладено той факт, що рік має тривалість $G_{ю} = 365,25 \text{ сд}$. Тому кожний четвертий рік (рік, який ділиться на 4 без остачі) названо високосним. Він містить 366 діб, а звичайні роки – 365 діб. День весняного рівнодення тоді припадав на 21 березня.

Проте внаслідок того, що тривалість юліанського року більше тропічного на величину $\delta_{ю} = G_{ю} - G_{гр} = 0,0078 \text{ сд}$, то за кожні 128 років накопичувалась похибка в одну добу ($128 \cdot \delta_{ю} = 0,9984 \text{ сд} \approx 1 \text{ сд}$) і дата весняного рівнодення наближалася ближче до зими. До 1582 р. ця дата наблизилась на 10 діб і день весняного рівнодення припадав на 11 березня. Це викликало незручності із

святкуванням Пасхи, розрахунок дати якої проводиться від дня весняного рівнодення.

Тому у 1582 р римський папа Григорій XIII провів реформу календаря. Він вилучив із нього лишніх 10 діб та повернув день весняного рівнодення на 21 березня, а також змінив систему визначення високосних років. З цією метою за один цикл літочислення був прийнятий 400-річний період. При цьому високосними вважались ті сторіччя, які діляться на 4 без остачі. Наприклад, 1600 р., 2000 р. та 2400 р. – високосні, а 1700 р., 1800 р., 1900 р., 2100 р. – звичайні.

Таким чином, у 400-річному циклі налічується 97 високосних та 303 звичайних років. Внаслідок цього середня тривалість року григоріанського календаря зменшилась відносно юліанського і складає $\Gamma_{gp} = 365,2425 \text{cd}$. Вона відрізняється від тривалості тропічного року $\Gamma_{tp} = 365,2422 \text{cd}$ на величину $\delta_{gp} = \Gamma_{gp} - \Gamma_{tp} = 0,0003 \text{cd} \approx 26^s$. Тому похибка в одну добу накопичується тільки через 3300 років ($3300 \cdot \delta_{gp} = 0,99 \text{cd} \approx 1 \text{cd}$).

Отже, на момент введення григоріанського календаря різниця між ним (новим стилем) і юліанським (старим стилем) становила 10 діб. Але оскільки 1700 р., 1800 р. та 1900 р. були високосними в юліанському та звичайними в григоріанському календарях, то різниця між цими стилями 1 березня 1900 р. становила 13 діб. З тієї ж причини 1 березня 2100 р. вона складатиме 14 діб.

Дробовими одиницями календарного року можуть виступати півріччя ($1/2$ року), квартал ($1/4$ року), місяць ($1/12$ року), тиждень (7 діб або приблизно $1/52$ року) та ін.

Місяць – проміжок часу, близький до періоду обертання Місяця навколо Землі.

Зоряний (сидеричний) місяць – час повного обертання Місяця навколо Землі відносно нерухомих зірок. Тривалість зоряного місяця $M_s = 27,3217 \text{cd}$.

Синодичний місяць – період зміни місячних фаз. Тривалість синодичного місяця $M_{син} = 29,5306 \text{cd}$.

Драконічний місяць – проміжок часу між двома послідовними проходженнями Місяця через один і той же (висхідний або низхідний) вузол власної орбіти. Тривалість драконічного місяця $M_{op} = 27,2122 \text{cd}$.

Календарний місяць – проміжок часу, який не залежить від фаз Місяця, а його тривалість коливається від 28 до 31 cd.

2.2.3. Системи обчислення часу

Під *системою обчислення часу* будемо розуміти упорядковану сукупність категорій часу, які в певних сполученнях між собою дозволяють описувати процеси в різних системах.

Варіант класифікації систем обчислення часу стосовно до сучасних КСС зображений на рис. 2.7.

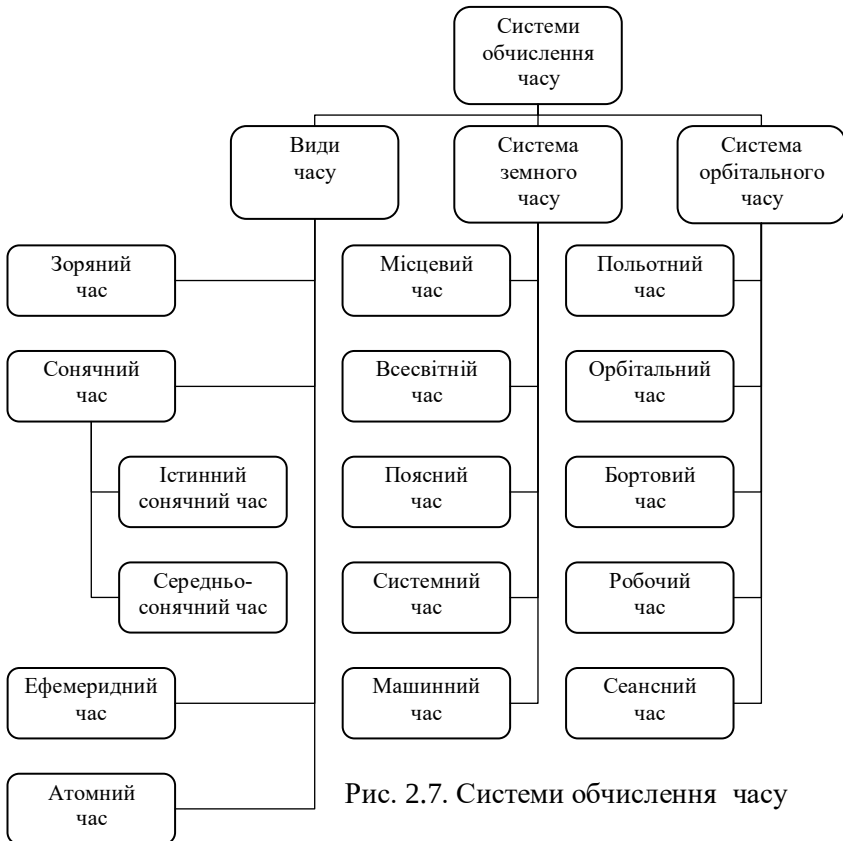


Рис. 2.7. Системи обчислення часу

При цьому *види часу* виділені на основі таких класифікаційних ознак, як опорні точки (орієнтири) відліку часу і його масштаб. Стосовно зоряного і сонячного часу мова йшла вище.

Новим елементом у цьому ряду виступає так званий *ньютонівський* або **ефемеридний час** t_{ef} . Цей час на відміну від зоряного і сонячного тече винятково *рівномірно*. Він визначається на основі руху Місяця та планет.

Ефемеридний час використовується в астрономії при розрахунках положення небесних тіл і прогнозуванні їхнього руху (обчисленні ефемерид). Зокрема, саме ефемеридний час входить у диференціальні рівняння небесної механіки, механіки космічних польотів і т.п.

Основною одиницею ефемеридного часу є *ефемеридна секунда*, яка дорівнює середньосонячній секунді за 1900 тропічний рік [47], що налічував $\Gamma_{тр}^{1900} = 365,2421988 \text{ сд} = 31\,556\,925,9747^s$.

Зауважимо, що швидкість обертання Землі навколо своєї осі поступово зменшується, а тому кожна сонячна доба сьогодні трохи довша, ніж ефемеридна доба у 1900 р.

Атомний час – це еталонний час, відлічуваний за допомогою високоточних атомних цезієвих годинників, прийнятий всіма країнами світу для повсякденного використання з 1 січня 1972 р. Він не зв'язаний безпосередньо ні з обертанням Землі, ні з її рухом навколо Сонця. За домовленістю відхилення атомного часу від ефемеридного не повинне перевищувати $\Delta t \leq 0,7^s$ за рік. Помилка ходу сучасних атомних годинників становить усього $\delta t = 1^s$ за $10000...100000$ років.

Під системою *земного часу* будемо розуміти сукупність тих категорій часу, які пов'язані з добовим обертанням і річним рухом Землі і якими користується людство на всій земній кулі.

При цьому визначальними поняттями служать географічний меридіан і годинний круг світила (Сонця, зірки) або годинний круг ТВРД (див. розд. 1).

Нагадаємо, що меридіани, які розташовані на схід від Гринвіча ($\lambda_e < \lambda < \lambda_\pi$) належать до східної півкулі Землі і їх називають *східними*. Меридіани, які розташовані на захід від Гринвіча

($\lambda_\pi < \lambda < \lambda_e$) належать до західної півкулі Землі і їх називають *західними*.

Той меридіан, де розташовані об'єкти, наземні пункти, точки спостереження, які цікавлять нас, називають *меридіаном спостерігача*.

Годинний круг світила (або ТВРД) – це великий круг небесної сфери, що проходить через полюси світу та зображення світила (або ТВРД).

Отже, двогранний кут між площинами географічного меридіана та годинного круга світила, названий *годинним кутом*, може служити мірою часу.

Місцевий час – це зоряний s або сонячний t_m час на даному географічному меридіані. Точки, які лежать на одному і тому ж меридіані, в один і той же момент мають однаковий місцевий час.

Світовий або всесвітній час t_0 – це місцевий *сонячний* час Гринвіцького (нульового) меридіана. З урахуванням всесвітнього часу місцевий сонячний час на меридіані спостерігача визначається за формулою

$$t_m = t_0 + \lambda_m^h, \quad (2.2 \quad 9)$$

де $\lambda_m^h = \lambda_m / \omega_z$ – географічна довгота меридіана спостерігача в годинній мірі (годинний кут);

λ_m – географічна довгота меридіана спостерігача в градусах;

$\omega_z \approx (360^\circ + 1^\circ) / T_{co} \approx 360^\circ / T_{zo} \approx 15 \text{ град} / \text{год}$ – кутова швидкість обертання Землі.

Місцевий час строго відповідає кутовому положенню будь-якого пункту на Землі відносно годинного круга Сонця (зірки).

Інакше кажучи, на будь-якій широті кожна точка із їхньої незліченної множини має свій місцевий час.

Приклад 2.7. Знайти відстань між двома точками на екваторі ($\varphi = 0$) і на широті Києва ($\varphi = +50^\circ$), в яких місцевий час відрізняється на $\Delta t = 1^s$.

Розв'язання. Прийmemo, що Земля сферична і її радіус $R_z = 6371 \text{ км}$. Тоді довжина окружності на екваторі $L_z = 2\pi \cdot R_z \approx 40000 \text{ км}$. Оскільки Земля робить один оберт за зоряну добу $T_{\text{зо}} = 86164^{\text{с}}$, то за інтервал $\Delta t = 1^{\text{с}}$ точка на екваторі переміститься на відстань $\Delta L_z(1^{\text{с}}) = L_z / T_{\text{зо}} \approx 465 \text{ м}$. Якщо пункти розташовані на широті φ , то $\Delta L_{\varphi}(1^{\text{с}}) = L_z(1^{\text{с}}) \cdot \cos \varphi$. Тоді для широти Києва $\Delta L_k(1^{\text{с}}) \approx 465 \cdot \cos(50^{\circ}) \approx 300 \text{ м}$.

Цю задачу можна розв'язати і іншим способом. Відомо, що кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega_z \approx 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. А це означає, що за час $\Delta t = 1^{\text{с}}$ Земля повернеться на кут $\Delta \phi(1^{\text{с}}) = \Delta t \cdot \omega_z \approx 7,292115 \cdot 10^{-5}$. Цьому куту на поверхні Землі на екваторі відповідає дуга $\Delta L_z(1^{\text{с}}) = \Delta \phi(1^{\text{с}}) \cdot R_z \approx 465 \text{ м}$.

Для практики такий результат є незручним і зайвим. Тому вдаються до “загрубіння” шкали часу, виходячи, наприклад, із принципу “на всій території адміністративного утворення однаковий час”. Для цього використовують поняття годинного пояса та поясного часу.

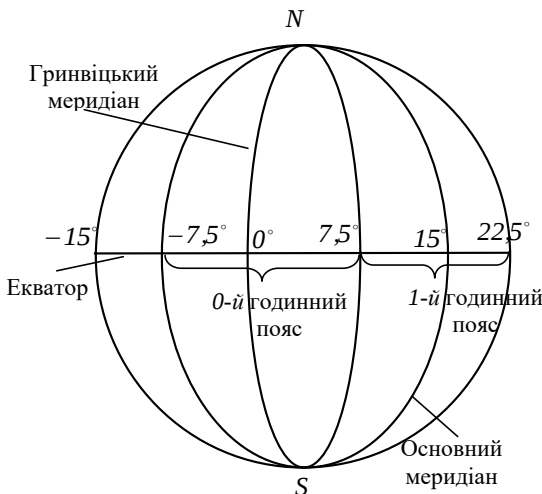


Рис. 2.8. До пояснення структури годинних поясів

Годинні пояси – це 24 ділянки земної поверхні (рис. 2.8) уздовж меридіанів, ширина яких теоретично дорівнює $\Delta\lambda = 360^\circ / 24 = 15^\circ$.

На практиці границі годинних поясів для зручності “прив’язують” до адміністративних границь регіонів, установлюють уздовж рік і т.п. Для всіх пунктів у межах одного пояса в кожний момент прийнято однаковий (поясний) час, а в сусідніх поясах час відрізняється рівно на одну годину.

Меридіани, які проходять по середині годинних поясів, називаються *основними меридіанами* цих поясів. Ці меридіани знаходяться на відстані один від іншого по довготі точно на величину $\Delta\lambda = 15^\circ$.

З урахуванням цього **поясний час** t_n наземного пункту – це місцевий середньосонячний час **основного** географічного меридіана того годинного пояса, в якому розташований даний пункт

$$t_n = t_0 + \mathcal{C}_*,$$

де $\mathcal{C}_* = 0...23$ – номер годинного пояса.

Розходження поясного часу двох пунктів дорівнює різниці номерів їхніх часових поясів:

$$\Delta t_n = t_{n2} - t_{n1} = \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1,$$

де t_{ni} та $\mathcal{C}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ – поясний час і номер i -го часового пояса.

Наприклад, Україна займає по довготі весь *другий* годинний пояс $\mathcal{C}_2 = 2$, а Київ перебуває приблизно в центрі цього пояса. Тому поясний **київський час** t_κ завжди більше всесвітнього на 2^h (схід Сонця для України починається раніше, ніж для Великобританії), тобто

$$t_\kappa = t_0 + \mathcal{C}_2 = t_0 + 2^h.$$

Примітка. Останнім часом у суспільно-виробничому житті під *місцевим* часом розуміється час, за яким живе дана місцевість, тобто фактично *поясний*, а *місцевий* називають просто *середнім* часом.

У весняно-літньо-осінній період у багатьох країнах, у тому числі і в Україні, з метою більш раціонального використання світлої пори доби застосовують поясний (наприклад, київський) *літній час*. Цей час вводиться на всій території України в останню неділю березня, а відміняється в останню неділю жовтня кожного року. При цьому **київський літній час** $t_{кл}$ зміщений уперед на одну годину відносно “звичайного” київського, тобто $t_{кл} = t_{к} + 1^h$.

Примітка: З огляду на те, що переведення часу два рази на рік може негативно впливати на здоров’я людей, а виграш від таких маніпуляцій в інших сферах діяльності людства поки не доведений, у керівництва ряду країн виникають сумніви щодо доцільності застосування літнього часу.

Крім розглянутих понять у соціальних, біологічних, людиномашинних (ергатичних), технічних та інших системах можуть використовуватися поняття **системного** та **машинного** часу, пов’язаного з етапами або режимами їхнього функціонування.

Наприклад, час життєвого циклу технічної системи, розклад занять у навчальному закладі, розпорядок роботи військової частини, робочий час на підприємстві і т.п.

За аналогією із земним часом, що базується на добовому та річному русі Землі, у теорії польоту КА можна говорити про систему *середньо-сонячного орбітального часу*, обумовленого орбітальним рухом КА навколо Землі. При цьому розрізняють поняття польотного, орбітального та бортового часу. Іноді можуть застосовувати поняття робочого та сеансного часу.

Польотний час – це час польоту КА, що відлічується від деякого характерного моменту, наприклад, від моменту старту РН при виводі КА на орбіту.

Орбітальний час – це час, що характеризує положення КА на даному витку орбіти. Наприклад, якщо за початок витка орбіти прийняти точку перигею $П$, то і відлік орбітального часу зручно вести від цієї точки, тобто від початку витка.

Бортовий час – це час, що відлічується від характерних подій або етапів на борту КА, наприклад, від початку спостереження за земною поверхнею, після закінчення етапу корекції

орбіти і т.п. Рахунок цього часу ведеться в бортовому комп'ютері або в іншому програмно-часовому пристрої.

При цьому ті інтервали бортового часу, де КА безпосередньо виконує цільове завдання, іноді називають **робочим** (робоча ділянка орбіти). Як правило, для повного просторово-часового опису руху КА бортовий час “прив’язують” до польотного або орбітального, а також до земного, наприклад, до київського.

Сеансний час – це час, відлічуваний від початку сеансу зв’язку з даним КА. Цей час застосовують особливо тоді, коли в КСС функціонує декілька КА та необхідно планувати роботу орбітальних і наземних засобів системи.

2.2.4. Перерахування часу із однієї системи в іншу

Перерахунок часу застосовують тоді, коли необхідно погодити процеси в часі в різних, наприклад, технічних системах або їхніх підсистемах. Якщо такі системи використовують одні і ті ж одиниці часу (зоряний або сонячний) і відомо початок відліку часу, то особливих проблем не виникає. Зазвичай труднощі виникають тоді, коли необхідно перерахувати інтервали зоряного часу в сонячний час і навпаки.

Зв’язок між одиницями зоряного та сонячного часу. Якщо проміжок сонячного часу позначити як Δt , а зоряного – як Δs , то з урахуванням (2.27) одержимо очевидні співвідношення, використовувані на практиці

$$\Delta t = \Delta s \cdot q', \quad \Delta s = \Delta t \cdot q. \quad (2.30)$$

При цьому, щоб уникнути помилок, доцільно ці інтервали часу попередньо виразити в секундах, а після перерахування перевести до необхідного виду.

Якщо ж інтервали часу виражені цілими числами годин, то з урахуванням співвідношення (2.30) одержимо, що інтервал зоряного часу $\Delta s = 1^h$ коротше інтервалу сонячного часу $\Delta t = 1^h$ на величину $\delta t = \delta T / 24 = 9,86^s$.

Визначення місцевого зоряного часу. Під місцевим зоряним часом s розуміється зоряний час на меридіані спостерігача. Основою для перерахувань служить *початковий* зоряний час S_0 у Гринвічі ($\lambda_s = 0$). Цей час відповідає середньосонячній гринвіцькій півночі за всесвітнім часом ($t_0 = 0^h$). Він приводиться в щорічних астрономічних календарях [7, 8] на будь-яку дату календарного року, причому тільки раз на рік 22 або 23 вересня на момент $t_0 = 0^h$ зоряний час $S_0 \approx 0^h$.

При відсутності астрономічного календаря для орієнтовних розрахунків можна скористатися табл. 2.1 [7].

Таблиця 2.1

Орієнтовні значення часу S_0

Дата	S_0	Дата	S_0	Дата	S_0
22 вересня	0^h	21 січня	8^h	23 травня	16^h
22 жовтня	2^h	21 лютого	10^h	22 червня	18^h
22 листопада	4^h	23 березня	12^h	23 липня	20^h
22 грудня	6^h	22 квітня	14^h	22 серпня	22^h

При цьому для розрахунків за допомогою табл. 2.1 враховують, що зоряний час S_0 за добу збільшується на величину

$$\Delta S_0 = \delta T = 236^s = 3^m 56^s \approx 4^m. \quad (2.31)$$

Рекомендація. Для уникнення помилок необхідно перед виконанням арифметичних операцій над часовими інтервалами, заданими у форматі $00^h 00^m 00^s$, перевести їх у секунди з урахуванням співвідношень $1^h = 60^m = 3600^s$, $0,1^h = 6^m$, $0,1^m = 6^s$ і т.п. Це тим більше важливо, якщо розрахунки проводяться за допомогою калькулятора чи комп'ютера.

Приклад 2.8. Знайти суму $t_s = t_1 + t_2$ двох часових інтервалів $t_1 = 2^h 18^m 42^s$ і $t_2 = 1^h 12^m 32^s$.

Розв'язання. Переведемо задані інтервали у секунди за алгоритмом:

$$t_1 = 2^h 18^m 42^s = 2 \cdot 3600^s + 18 \cdot 60^s + 42^s = 7200^s + 1080^s + 42^s = 8322^s.$$

$t_2 = 1^h 12^h 32^s = 1 \cdot 3600^s + 12 \cdot 60^s + 32^s = 3600^s + 720^s + 32^s = 4352^s$. Далі знайдемо значення $t_{\Sigma} = t_1 + t_2 = 8322^s + 4352^s = 12674^s$. Для повернення до початкового формату необхідно послідовно виконати операції за алгоритмом: $t_{\Sigma} = 12674^s : 3600^s = 3^h + (12674^s - 3 \cdot 3600^s) = 3^h + 1874^s : 60^s = 3^h 31^m + (1874 - 31 \cdot 60^s) = 3^h 31^m 14^s$.

Приклад 2.9. Знайти початкове значення зоряного часу 12 квітня 2011 р. $S_0(12.04)$, якщо відоме його значення 23 березня цього ж року $S_0(23.03) = 12^h 00^m 32^s$.

Розв'язання. Між цими датами проміжок часу складає $\Delta d = 20 \text{ днів}$. Згідно із виразом (2.31) за кожну добу зоряний час зростає на величину $\Delta S_0 \approx 4^m$. Тоді $S_0(12.04) \approx S_0(23.03) + \Delta d \cdot \Delta S_0 \approx 12^h 00^m 32^s + 20 \cdot 4^m \approx 13^h 20^m 32^s$. Якщо ж необхідно отримати більш точний результат то треба взяти $\Delta S_0 = 236^s$. Тоді $S_0(12.04) \approx S_0(23.03) + \Delta d \cdot \Delta S_0 \approx 12^h 00^m 32^s + 20 \cdot 236^s \approx 13^h 19^m 14^s$. На справді ж більш точні розрахунки показали, що $S_0(12.04) = 13^h 19^m 23^s$.

Поточний зоряний час на Гринвіцькому меридіані в будь-який момент всесвітнього часу t_0 заданої дати з урахуванням співвідношень (2.30) складатиме величину

$$S = S_t = S_0 + t_0 \cdot q. \quad (2.32)$$

Приклад 2.10. Знайти поточне значення зоряного часу 12 квітня 2011 р. опівдні на Гринвіцькому меридіані $S_{12}(12.04)$, тобто в момент всесвітнього часу $t_0 = 12^h$.

Рішення. Скористаємось результатом, отриманим в *прикладі 2.9*, звідки маємо $S_0(12.04) = 13^h 19^m 23^s$. Тоді на підставі формул (2.32) і (2.27) знайдемо $S_{12}(12.04) = S_0(12.04) + t_0 \cdot q = 13^h 19^m 23^s + (12 \cdot 3600^s) \cdot 1.002738 \approx 13^h 19^m 23^s + 43318^s \approx 13^h 19^m 23^s + 12^h + (43318^s - 12 \cdot 3600^s) \approx 25^h 19^m 23^s + 118^s = 25^h 21^m 21^s$.

Враховуючи те, що зоряна доба $T_{\text{зо}} = 23^h 56^m 04^s$, а знайдене значення більше доби, то отримаємо поточний зоряний час уже на наступну дату, тобто на 13 квітня $S(13.04) = S(12.04) - T_{\text{зо}} = 25^h 21^m 21^s - 23^h 56^m 04^s = 1^h 25^m 17^s$.

Використовуючи формулу (2.32) з урахуванням виразу (2.29), можна знайти *поточний* місцевий зоряний час для меридіана *спостерігача* s на момент місцевого сонячного часу t_m

$$s = s_0 + t_m \cdot q = s_0 + (t_0 + \lambda_m^h) \cdot q, \quad (2.33)$$

де s_0 – початковий місцевий зоряний час на меридіані спостерігача, тобто в сонячну північ на цьому меридіані (при $t_m = 0^h$).

Оскільки в астрономічних календарях [7, 8] приводиться тільки початковий зоряний час у Гринвічі S_0 , то необхідно знайти зв'язок між цим часом і часом s_0 . Для цього врахуємо, що поточний зоряний час на меридіані спостерігача відрізняється від гринвіцького на величину годинного кута цього меридіана λ_m^h . Наприклад, для східних довгот цей час обчислюється як

$$s = S + \lambda_m^h. \quad (2.34)$$

Дорівнявши праві частини виразів (2.33) і (2.34) за умови $t_0 = 0^h$, одержимо

$$s_0 = S_0 + \lambda_m^h(1 - q). \quad (2.35)$$

З урахуванням залежності (2.35) для меридіана *спостерігача* на момент місцевого сонячного часу t_m *поточний* місцевий зоряний час (2.33) дорівнює

$$s = s_0 + t_m \cdot q = S_0 + t_0 \cdot q + \lambda_m^h. \quad (2.36)$$

Із формули (2.35) видно, що зворотний зв'язок між сонячним і зоряним часом визначається за формулою

$$t_m = (s - s_0) \cdot q'.$$

Для наближених розрахунків з похибкою $\Delta t \approx \Delta s \leq 5^m$ використовують співвідношення

$$s \approx S_0 + t_m; \quad t_m \approx s - S_0. \quad (2.37)$$

При цьому для будь-якої іншої дати, що віддалена від заданої на d сонячних діб, зоряний час відрізняється на величину

$$s_d \approx s \pm d(\delta T \cdot q), \quad (2.38)$$

де “+” береться при рахунку діб назад, а “–” – при рахунку вперед;

$\delta T \approx 236^s$ – розбіжність у тривалості середньосонячної і зоряної діб у сонячному часі.

Примітка. У деяких астрономічних довідниках середньосонячний час позначають великими буквами, наприклад, T_0 , T_m , T_n і т.д.

Геометричне тлумачення отриманих залежностей для всесвітнього t_0 та київського $t_\kappa = t_0 + 2^h$ часу пояснюється рис. 2.9. При цьому місцевий час t_m узятий рівним поясному t_n . У свою чергу, як поясний прийнято київський час t_κ , тобто для конкретного прикладу прийнято, що $t_m = t_n = t_\kappa$.

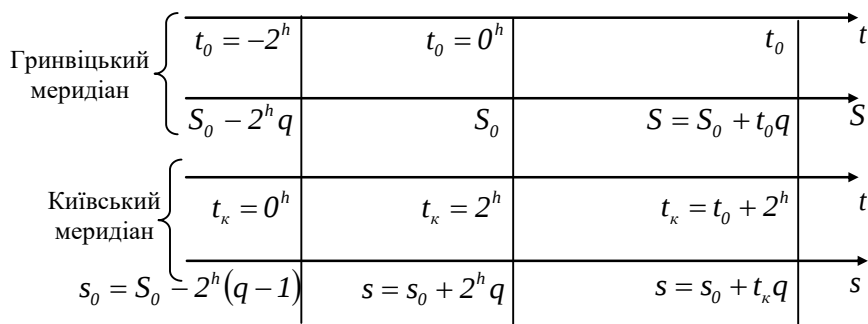


Рис. 2.9. До пояснення перерахунків сонячного та зоряного часу

Таким чином, в основі перерахунків часу із однієї системи в іншу лежить урахування розбіжності (масштабу) між сонячними та зоряними одиницями його виміру.

У цілому, розглянуті одиниці виміру та системи обліку часу дозволяють описувати часові процеси, що відбуваються як у небесній механіці, так і при функціонуванні КСС.

Оскільки ми маємо справу з орбітальним рухом КА, то надалі необхідно вивчити способи та закономірності не тільки часового, а і просторового опису цього руху. А це потребує вивчення відповідних систем координат, можливих підходів до їхнього вибору для цільового застосування та методик перерахування координат із однієї системи в іншу.

2.3. ОСНОВНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Відомо, що для *просторового* опису положення та руху космічних об'єктів будь-якого походження та призначення використовують цілий ряд систем координат (СК). Вибір із цього ряду конкретної СК роблять, виходячи із можливостей їхньої фізичної реалізації, зручностей використання, простоти математичних розрахунків і наочності одержуваних результатів.

З урахуванням цього для обґрунтованого вибору СК при описі орбітального руху КА проведемо класифікацію відомих СК за найбільш характерними для них ознаками.

2.3.1. Класифікація систем координат

Загальна класифікація СК (рис. 2.10) передбачає їхній поділ за формою на такі види [26, 44]:

- а) прямолінійні (*прямокутні* та *косокутні*);
- б) криволінійні (*циліндричні*, *сферичні*, *еліпсоїдальні*, *параболоїдальні*);
- в) оскулюючі.

При цьому в теорії польоту КА найчастіше застосовують прямокутні та сферичні СК. Для опису *прямокутних* (декартових) СК необхідно, а іноді і достатньо:

- а) указати їхній початок;
- б) задати опорний напрямок;
- в) вибрати основну площину;
- г) задати масштаб на відповідних осях СК (за необхідності точних розрахунків).

Положення *сферичних* СК найчастіше задають за допомогою довжини (модуля) радіуса-вектора, проведеного із початку СК через задану точку простору, і його кутового положення відносно якого-небудь напрямку відліку.

Поняття “оскулюючі СК” застосовують рідко. Вони частіше використовуються під назвою “кеплерові елементи орбіти”. Ми називатимемо їх ще *комбінованими*.

Залежно від потреб і перерахованих умов у небесній механіці найбільш уживані СК, *початок* яких розташовується:

- а) у центрі Землі (геоцентричні СК);
- б) у точці стояння спостерігача (топоцентричні СК);
- в) у центрі Сонця, Місяця та планет (геліо-, селено- та планетоцентричні СК відповідно);
- г) у центрі мас РН, КА (барицентричні СК).

Для геоцентричних і геліоцентричних СК потрібно вказувати момент часу (епоху), до якого відноситься прийнята СК.

Епоха – це момент часу, для якого достатньо *точно* відомі значення будь-яких величин, що безперервно змінюються у часі, які визначають орієнтацію СК або положення небесного світила.

Як *опорний напрямок* часто використовують:

- а) напрямок на ТВД;
- б) напрямок на деякий меридіан;
- в) вісь обертання Землі;
- г) вертикальний або горизонтальний напрямок;
- д) перпендикуляр до відомої площини;
- е) орієнтацію вектора швидкості КА;
- є) вісь симетрії КА і т.п.

За *основну площину* СК приймають:

- а) площину екватора (екваторіальні СК);
- б) площину екліптики (екліптичні СК);
- в) площину горизонту (горизонтальні СК);
- г) площину орбіти (орбітальні СК);
- д) площину симетрії РН, КА.

Якщо *орієнтація* осей СК не міняється з часом, то таку систему називають *інерціальною* або *абсолютною*. Якщо осі СК переміщуються (обертаються), то її називають *відносною*. Відповідно параметри руху, розглянуті в цих СК, називають абсолютними або відносними.

СК, що мають початок у центрі мас (центрі тиску) КА та орієнтовані вздовж його характерних осей (найчастіше осей симетрії), називають *зв'язаними*. Крім того, залежно від опорного на-

прямку та орієнтації осей виділяють стартові, пунктові, швидкісні та інші СК, які будуть розглянуті окремо.

У задачах орбітального руху КА та космічних спостережень найчастіше застосовують такі типи (види) СК [34, 44, 66]:

- геоцентричні прямокутні та сферичні СК;
- топоцентричні прямокутні та сферичні СК;
- екліптичні прямокутні та сферичні СК;
- барицентричні прямокутні СК;
- комбіновані (оскулюючі) СК.

Далі ми обмежимося здебільшого геоцентричними та топоцентричними СК, які є найбільш загальними як у теорії польоту КА, так і в інших дисциплінах. Крім того, оскільки при просторовому описі об'єктів їхні координати та швидкості представляються багатомірними масивами, то оперувати з ними інколи простіше в матричній формі запису [26].

2.3.2. Матричний запис формул перетворення координат

Матриця $[A]$ – прямокутна таблиця, утворена з елементів a_{ij} деякої множини, які утворюють m рядків і n стовпців [15].

Залежно від потреб матриці записують у компактній або розгорнутій формі у вигляді

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ik}].$$

Оскільки під час опису руху КА в прямокутних СК використовується, як правило, три координати, то відповідні матриці мають форму матриці-стовпця та позначаються $[A] = \bar{A}$.

Для двох абстрактних СК $Ox_1x_2x_3$ і $O\xi_1\xi_2\xi_3$, що мають загальний початок O , можна записати формулу перерахування

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [A^{x \leftarrow \xi}] \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

або у скороченій формі

$$\bar{x} = [A^{x \leftarrow \xi}] \cdot \bar{\xi}.$$

У цьому прикладі $\bar{x}$ та $\bar{\xi}$ – матриці-стовпці складових одного і того ж вектора у відповідних СК;

$$[A^{x \leftarrow \xi}] \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця напрямних косинусів, елементи } a_{ij} \text{ якої визначаються за відомими кутами повороту СК навколо якої-небудь осі;}$$

індекс $x \leftarrow \xi$ означає перехід від СК $O\xi_1\xi_2\xi_3$ до СК $Ox_1x_2x_3$.

При перерахуванні координат найчастіше застосовуються такі дії над матрицями, як додавання (віднімання), перемноження, транспонування та обернення матриць. Тому нагадаємо правила виконання цих дій стосовно до перерахувань просторових координат [15].

Сума двох матриць $[A] \equiv [a_{ik}]$ і $[B] \equiv [b_{ik}]$ розміру $m \times n$ є матриця розміру $m \times n$:

$$[A] + [B] = [a_{ik}] + [b_{ik}] \equiv [a_{ik} + b_{ik}].$$

Добуток матриці $[A] \equiv [a_{ik}]$ розміру $m \times n$ на скаляр α є матриця розміру $m \times n$:

$$\alpha[A] = \alpha[a_{ik}] \equiv [\alpha a_{ik}].$$

Добуток матриці $[A] \equiv [a_{ik}]$ розміру $m \times n$ на матрицю $[B] \equiv [b_{ik}]$ розміру $n \times r$ є матриця $[C] \equiv [c_{ik}]$ розміру $m \times r$:

$$[C] = [A] \cdot [B] \equiv [a_{ij}] \cdot [b_{jk}] \equiv [c_{ik}], \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Як видно із цієї формули, за таким правилом можна перемножувати матриці тільки тоді, коли кількість стовпців у першій із них дорівнює кількості рядків у другій.

Транспонованою називають матрицю, яку можна одержати з матриці $[A] \equiv [a_{ik}]$, якщо в ній замінити рядки стовпцями:

$[A]^T \equiv [a_{ik}]^T = [a_{ki}]$. Наприклад, якщо $[A] \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, то

$[A]^T \equiv \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Операцію транспонування застосовують, напри-

клад, для заміни вектора-стовпця вектором-рядком, що робить

запис більше компактним: $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$.

Оберненою називають матрицю $[\gamma]^{-1}$, що забезпечує повернення від матриці $[B]$ до матриці $[A]$, якщо остання отримана шляхом перетворення $[A] = [\gamma] \cdot [B]$, тобто $[B] = [\gamma]^{-1} \cdot [A]$.

У загальному випадку процедура знаходження обернених матриць досить складна. Однак, коли мова йде про ортогональні перетворення координат (наприклад, при переході від однієї прямокутної до іншої прямокутної СК), то обернена матриця збігається із транспонованою.

У теперішній час дії над матрицями виконуються, як правило, за допомогою добре налагоджених комп'ютерних програм, що істотно полегшує роботу фахівців.

2.3.3. Основні системи небесних координат

У загальному випадку для визначення положення точки на сфері застосовують системи координат, в яких положення цієї точки задають двома кутовими або сферичними координатами. Для цього на сфері вибирають основний круг, що проходить через її центр. Із цього центра проводять перпендикуляр до пло-

щини основного круга, котрий перетинається зі сферою в точках G і G' (рис. 2.11, а), які називаються *полюсами*.

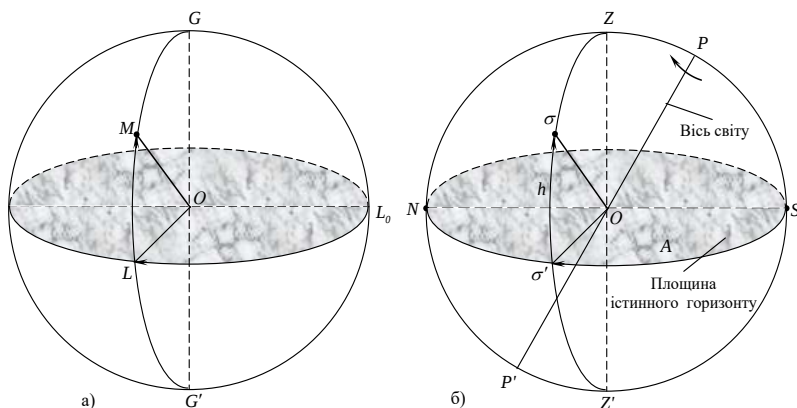


Рис. 2.11. Принцип визначення координат точок на сфері (а) і горизонтальна система координат (б)

На основному крузі вибирають фіксовану точку L_0 для відліку однієї із координат. Для визначення положення точки M на сфері через неї і полюси G і G' проводять великий круг. Тоді положення точки M на сфері визначиться дугами L_0L і LM або ж кутами L_0OL і LOM .

В астрономії для визначення положення світил і допоміжних точок на небесній сфері (див. розд. 1) застосовують *системи небесних координат*, які залежно від вибору основного круга називаються горизонтальною, екваторіальною, екліптичною і т.п.

Горизонтальна система координат. Основним кругом у цій системі служить *круг математичного (або істинного) горизонту*, а за фіксовану точку на ньому приймають точку півдня S (рис. 2.11, б).

Положення зображення світила σ на небесній сфері визначається дугами $S\sigma'$ і $\sigma'\sigma$. Великий круг небесної сфери, що проходить через зеніт Z , світило σ і надир Z' , називають *кругом висоти* (вертикальним кругом або просто *вертикалом* світила).

Кутова відстань $S\sigma'$ по математичному горизонту від точки півдня S до вертикала світила називається *азимутом* світила і позначається через A , тобто $A = S\sigma'$. Азимут світила відлічується від точки півдня S в напрямку обертання небесної сфери (за годинниковою стрілкою для спостерігача, що знаходиться на північній півкулі Землі). Азимут може приймати значення $0^\circ \leq A \leq 360^\circ$.

Дуга $\sigma'\sigma$ круга висоти називається *висотою* світила над горизонтом і позначається через h . Висота світила може приймати значення від 0° до $+90^\circ$ при її відліку від горизонту до зеніту Z та від 0° до -90° при її відліку до надира Z' .

Іноді замість висоти h розглядають *зенітну відстань* світила, тобто дугу $Z\sigma$, і позначають його через z . Зенітна відстань z і висота світила h зв'язані співвідношенням $z + h = 90^\circ$.

Перша екваторіальна система координат. Основним кругом у цій системі служить *круг небесного екватора*, а за фіксовану (початкову) точку на ньому обрана південна точка екватора $Ю$ (рис. 2.12). Положення зображення світила σ на небесній сфері визначається дугами $Ю\zeta$ і $\zeta\sigma$. Великий круг небесної сфери $P\sigma P'$, що проходить через полюси світу і світило, називається *годинним кругом* світила або *кругом схилення* світила.

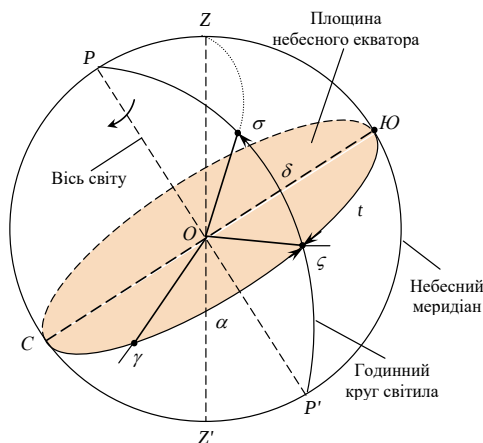


Рис. 2.12. Перша та друга екваторіальні системи координат

Кутова відстань $Ю\zeta$ від південної точки екватора $Ю$ до годинного круга світила називається *годинним кутом* світила і позначається через t .

Годинний кут дорівнює двогранному куту між площинами небесного меридіана і годинного круга. Він відлічується у бік обертання небесної сфери від 0° до 360° у градусній мірі або від 0^h до 24^h – у годинній мірі.

При цьому між градусною і годинною мірами існують очевидні тотожності: $1^h \equiv 15^\circ$, $1^m \equiv 15'$, $1^s \equiv 15''$. Крім того, для переходу від кутової міри до годинної і навпаки в астрономічних щорічниках приводяться спеціальні таблиці.

Кутова відстань $\zeta\sigma$ по годинному кругу світила називається *схиленням* світила і позначається буквою δ . Схилення світила відлічується від 0° до $+90^\circ$ у бік північного полюса світу P і від 0° до -90° в бік південного полюса світу P' . Іноді замість схилення δ використовують *полярну відстань* p , яка дорівнює дузі круга схилення від північного полюса до світила. Схилення δ і полярна відстань p зв'язані співвідношенням $\delta + p = 90^\circ$.

Перша екваторіальна і горизонтальна системи координат є *місцевими*, тому що значення координат небесних тіл у них залежать від розташування пункту спостережень.

Годинний кут t нерухомого світила змінюється протягом доби від 0° до 360° через обертання Землі, тоді як схилення δ залишається постійним. Якщо ж світило змінює своє положення у світовому просторі, то це приведе до зміни з часом схилення δ і додаткової зміни годинного кута t .

Друга екваторіальна система координат. У цій системі координат, як і в першій екваторіальній, основним *кругом* служить *небесний екватор*, але за фіксовану точку на ньому приймають ТВРД γ (див. рис. 2.12). Положення зображення світила σ на небесній сфері визначається дугами $\gamma\zeta$ і $\zeta\sigma$.

Дуга $\gamma\zeta$, тобто кутова відстань по небесному екватору від ТВРД до годинного круга світила (круга схилення світила), називається *прямим піднесенням* світила і позначається буквою α . Пряме піднесення світила відлічується у напрямку, протилежному обертанню небесної сфери від 0° до 360° у градусній мірі або від 0^h до 24^h – у годинній мірі.

Оскільки точка γ є точкою небесної сфери і обертається разом з нею, то обидві координати α і δ досить віддаленого і нерухомого світила в цій системі *не залежать* від місця пункту спостережень.

Екліптична система координат. Основним *кругом* у цій системі служить *екліптика*, а за фіксовану точку на ній прийнята ТВРД γ (рис. 2.13). Положення зображення світила σ визначається дугами $\gamma\xi$ і $\xi\sigma$. Великий круг $П\sigma\Pi'$, що проходить через зображення світила σ і полюси екліптики Π і Π' , називається *кругом широти* світила.

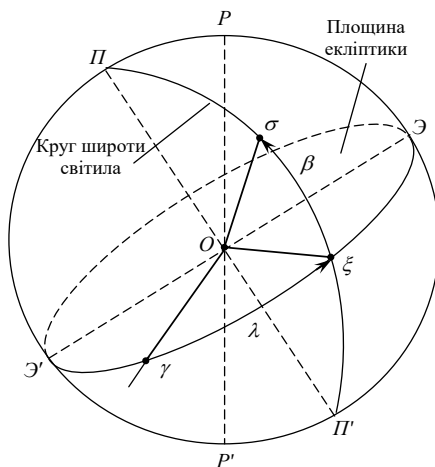


Рис. 2.13. Екліптична система координат

Кутова відстань $\gamma\xi$ по екліптиці від ТВРД до круга широти світила називається *астрономічною довготою* світила і позначається буквою λ .

Вона відлічується від ТВРД γ уздовж екліптики в напрямку видимого річного руху Сонця до круга широти світила і змінюється від 0° до 360° .

Кутова відстань $\xi\sigma$ по кругу широти світила від екліптики до світила називається *астрономічною широтою* світила і позначається буквою β .

Астрономічна широта β відлічується від 0° до $+90^\circ$ в напрямку від екліптики до її північного полюса і 0° до -90° в напрямку її південного полюса. У цій системі координати λ і β нерухомих світил *не міняються* з часом і *не залежать* від місця пункту спостережень.

2.3.4. Перехід від однієї системи небесних координат до іншої

Для одержання формул переходу від однієї системи небесних координат до іншої розглядають (див. рис. 2.12) сферичний трикутник $ZP\sigma$, який називається *паралактичним*, та використовують математичний апарат сферичної тригонометрії [7], основні співвідношення якої наведені у додатку 1.

При цьому вивід відповідних формул можна знайти в літературі по астрономії [7, 8]. Ми ж наведемо їх у кінцевому вигляді.

Перехід від екваторіальних координат до горизонтальних.

1. Якщо відома широта місця спостереження φ , схилення δ і годинний кут світила t , то горизонтальні координати – зенітна відстань z і азимут A обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t; \\ \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t;\end{aligned}\tag{2.39}$$

$$\sin z \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t.$$

2. Якщо відома широта місця спостереження φ , схилення δ і пряме піднесення світила α , то для переходу до горизонтальних координат z і A необхідно користуватися формулами (2.39), попередньо обчисливши значення годинного кута світила

$$t = s - \alpha,\tag{2.40}$$

де s – зоряний час на меридіані спостерігача в момент спостережень.

Перехід від горизонтальних координат до екваторіальних.

При відомих значеннях z , A і φ екваторіальні координати δ і t обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A; \\ \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A; \\ \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Пряме піднесення світила α визначають із формули (2.40), попередньо обчисливши зоряний час на меридіані спостерігача в момент спостережень s .

Перехід від екваторіальних координат до екліптичних. Із сферичного трикутника $P\sigma\Pi$ (див. рис. 2.13) можна одержати такі формули для переходу між цими системами:

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta;$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha;$$

$$\cos \beta \sin \lambda = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon,$$

де $\varepsilon \approx 23,5^\circ$ – кут нахилу екліптики до екватора.

Перехід від екліптичних координат до екваторіальних. Цей перехід здійснюється за формулами:

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \beta;$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda;$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon.$$

Небесні координати знаходять широке застосування в астрономії, в небесній механіці, а також у теорії орбітального руху КА. Однак в останньому випадку виникає необхідність у використанні поряд з відзначеними і інших СК.

2.3.5. Основні системи координат для опису орбітального руху космічних апаратів

Для опису орбітального руху КА, РН та інших космічних об'єктів найчастіше використовуються такі СК [20, 26, 44]:

інерціальна геоцентрична прямокутна екваторіальна СК (ІСК);

гринвіцька геоцентрична прямокутна екваторіальна СК (ГрСК);

геоцентрична сферична СК (ГцССК);

геодезична сферична СК (ГдССК);

географічна сферична СК (ГгССК);

топоцентрична пунктова *прямокутна* СК (ТППСК);

топоцентрична пунктова *сферична* СК (ТПССК).

Геоцентричні прямокутні екваторіальні системи координат

ІСК $OX_H Y_H Z_H$ (рис. 2.14). Її початок перебуває у центрі Землі. Основна площина – площина екватора. Опорний напрямок – ТВРД. Осі X_H та Y_H лежать в основній площині, причому вісь X_H спрямована у ТВРД. Вісь Z_H орієнтована уздовж осі обертання Землі на Північний полюс. Вісь Y_H доповнює систему до правої.

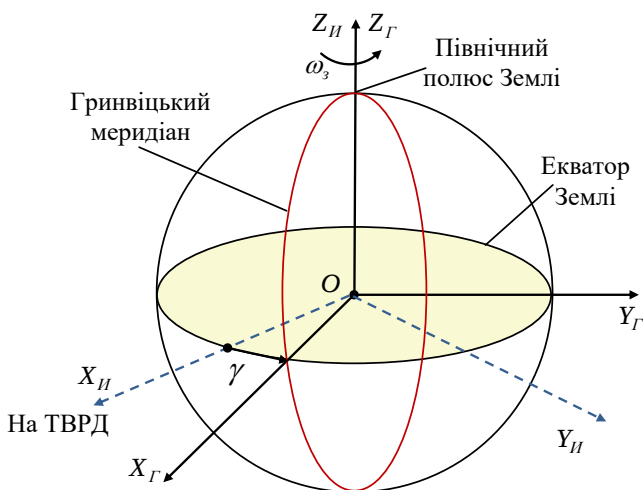


Рис. 2.14. Інерціальна та гринвіцька СК

Положення об'єктів у даній СК задається поточними значеннями їхніх координат X_H , Y_H , Z_H , що утворюють радіус-вектор об'єкта, записаний у матричній формі:

$$\bar{r}_H = [X_H \quad Y_H \quad Z_H]^T, \quad r_H = \sqrt{X_H^2 + Y_H^2 + Z_H^2}, \quad (2.42)$$

і значеннями проекцій вектора лінійної швидкості $V_{xH} = \dot{X}_H$, $V_{yH} = \dot{Y}_H$, $V_{zH} = \dot{Z}_H$ на координатні осі, що утворюють матрицю-стовпець:

$$\bar{V}_H = \begin{bmatrix} V_{xH} & V_{yH} & V_{zH} \end{bmatrix}^T, \quad V_H = \sqrt{V_{xH}^2 + V_{yH}^2 + V_{zH}^2}. \quad (2.43)$$

За необхідності для зручності можна ввести узагальнюючий вектор (множину) просторово-часового положення (ПЧП) об'єкта в ІСК

$$\tilde{R}_H = \{\bar{r}_H, \bar{V}_H\}. \quad (2.44)$$

Зазначимо, що ІСК зв'язана із Землею, але *не з обертанням* Землі навколо своєї осі, а тільки з її центром і площиною екватора. Тому положення осей ІСК практично не залежить від часу. Через це її ще називають абсолютною або нерухомою СК.

ГрСК $OX_G Y_G Z_G$ (див. рис. 2.14) на відміну від ІСК *обертається* разом із Землею з кутовою швидкістю $\omega_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$. Початок і основна площина цієї СК – такі ж, як і в ІСК. Опорний напрямок – напрямок із центра Землі на Гринвіцький меридіан. У цьому напрямку орієнтують вісь X_G . Таким чином, осі X_G та Y_G збігаються з однойменними осями ІСК *один раз на добу*, коли Гринвіцький меридіан перетинає ТВРД. Вісь Z_G збігається з віссю Z_H постійно ($Z_G \equiv Z_H$).

Положення ГрСК в ІСК задається кутом її повороту за інтервал зоряного часу s

$$\gamma = \omega_z s = \omega_z [S_0 + q(t_m - \mathcal{C}_*)] , \quad (2.45)$$

де S_0 – зоряний час у середню північ на Гринвіцькому меридіані в дату, що цікавить нас;

t_m – поточний місцевий сонячний час на меридіані спостерігача в ту ж дату;

$\mathcal{C}_*$ – номер годинного пояса спостерігача.

Положення об'єктів у даній СК задається поточними значеннями їхніх координат X_Γ , Y_Γ , Z_Γ і значеннями проекцій вектора лінійної швидкості $V_{x\Gamma} = \dot{X}_\Gamma$, $V_{y\Gamma} = \dot{Y}_\Gamma$, $V_{z\Gamma} = \dot{Z}_\Gamma$ на координатні осі, що утворюють за аналогією з виразами (2.42) і (2.43) вектори:

$$\bar{r}_\Gamma = [X_\Gamma \quad Y_\Gamma \quad Z_\Gamma]^T, \quad r_\Gamma = \sqrt{X_\Gamma^2 + Y_\Gamma^2 + Z_\Gamma^2}; \quad (2.46)$$

$$\bar{V}_\Gamma = [V_{x\Gamma} \quad V_{y\Gamma} \quad V_{z\Gamma}]^T, \quad V_\Gamma = \sqrt{V_{x\Gamma}^2 + V_{y\Gamma}^2 + V_{z\Gamma}^2}. \quad (2.47)$$

За необхідності можна за аналогією з ІСК ввести узагальнюючий вектор

$$\tilde{R}_\Gamma = \{\bar{r}_\Gamma, \bar{V}_\Gamma\}. \quad (2.48)$$

Геоцентричні сферичні системи координат

ГЦССК $Or\varphi_\Gamma\lambda$ також обертається разом із Землею. Її початок і основна площина – такі ж, як в ІСК та в ГрСК (рис. 2.15).

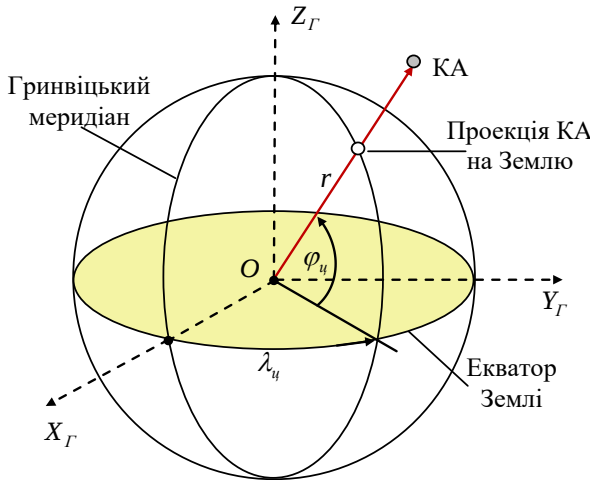


Рис. 2.15. Геоцентрична сферична СК

Цю систему використовують для опису положення як наземних, так і космічних об'єктів.

Положення наземних пунктів (НП) у ній задається відстанню (радіусом-вектором) r від центра Землі до НП, *геоцентричною* широтою φ_u (кутом між радіусом-вектором і площиною екватора) і геоцентричною довготою λ_u (кутом між Гринвіцьким меридіаном і меридіаном НП). При цьому позитивний напрямок відлічується від Гринвіча на схід.

Очевидно, що для опису положення КА в цій системі досить замість радіуса-вектора НП використовувати радіус-вектор проєкції КА на поверхню Землі (див. рис. 2.15).

ГдССК *OrBL* застосовується для задання координат НП у тих випадках, коли за модель Землі прийнята не сфера, а еліпсоїд обертання. Вона відрізняється від ГцССК тільки способом задання широти НП $B \neq \varphi_u$.

Тут B – *геодезична* широта (кут між нормаллю до поверхні еліпсоїда та площиною екватора Землі); $L = \lambda_u$ – геодезична довгота.

ГгССК *Orφλ* відрізняється від ГцССК тільки широтою $\varphi \neq \varphi_u$. Тут φ – *географічна* широта – кут між напрямком сили ваги (прямовисною лінією) у пункті спостереження та площиною екватора; $\lambda = \lambda_u$ – географічна довгота.

Надалі, коли мова йде про будь-яку із цих СК або коли в конкретній ситуації не має значення, яка із цих систем використовується, будемо говорити просто про широту φ та довготу λ .

Положення об'єктів у цих СК за аналогією з виразами (2.44) і (2.48) можна задавати вектором

$$\tilde{R}_\varphi = \{r, \varphi, \lambda\}. \quad (2.49)$$

Топоцентричні пунктові системи координат

ТППСК $\Pi_3 X_T Y_T Z_T$ (рис. 2.16). Основна площина – площина місцевого горизонту, тобто площина, дотична до поверхні Землі у точці розташування НП Π_3 .

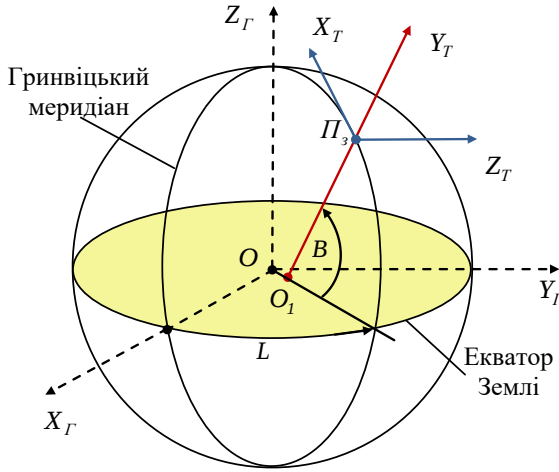


Рис. 2.16. Топоцентрична пунктова прямокутна СК

Вісь X_T спрямована по дотичній до меридіана НП у бік Північного полюса, вісь Y_T – уздовж радіуса-вектора із центра Землі в точку розташування НП Π_3 , вісь Z_T доповнює систему до правої.

Дислокація НП задається геодезичною широтою B та геодезичною довготою $L = \lambda$.

Положення об'єктів у даній СК задається поточними значеннями їхніх координат X_T, Y_T, Z_T і значеннями проекцій вектора лінійної швидкості $V_{xT} = \dot{X}_T, V_{yT} = \dot{Y}_T, V_{zT} = \dot{Z}_T$ на координатні осі за допомогою векторів:

$$\bar{r}_T = [X_T \quad Y_T \quad Z_T]^T, \quad r_T = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2}, \quad (2.50)$$

$$\bar{V}_T = [V_{xT} \quad V_{yT} \quad V_{zT}]^T, \quad V_T = \sqrt{V_{xT}^2 + V_{yT}^2 + V_{zT}^2}, \quad (2.51)$$

а також узагальненим вектором (множиною)

$$\tilde{R}_T = \{\bar{r}_T, \bar{V}_T\}. \quad (2.52)$$

ТПССК $P_{\alpha\beta D}$ (рис. 2.17) відрізняється від ТППСК тим, що положення об'єкта (КА) у ній задається кутом місця β , азимутом α і нахилоною дальністю D .

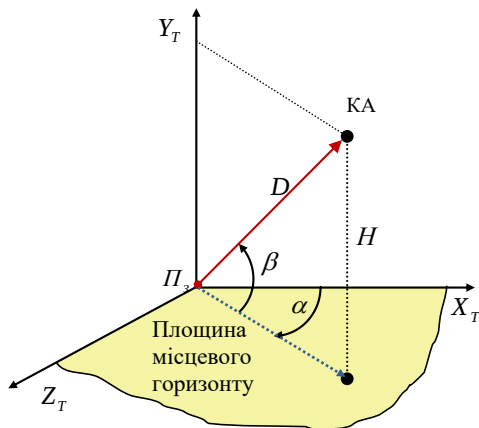


Рис. 2.17. Топоцентрична пунктова сферична СК

Кутом місця називається плоский кут у *вертикальній* площині між проекцією радіуса-вектора КА на площину місцевого горизонту та напрямком на КА. Цей кут змінюється у межах $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$.

Азимутом називається плоский кут у *горизонтальній* площині між напрямком на північ і напрямком на проекцію радіуса-вектора КА на площину місцевого горизонту. Він відлічується за годинниковою стрілкою і змінюється у межах $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

Нахилена дальність – це найкоротша відстань від НП до КА. Вона обмежується висотою КА H та модулем його радіуса-вектора $r = H + R_\text{з}$ і лежить у діапазоні $H \leq D < r$.

Для опису руху КА в ТПССК часто використовуються також похідні від кута місця $\dot{\beta}$, азимута $\dot{\alpha}$ та нахиленої дальності $\dot{D}$.

Оскільки значення кутів, нахиленої дальності та їхніх похідних використовуються насамперед для формування цілевказівок наземним радіотехнічним станціям, що забезпечують супровід КА, керування ними, то ці параметри називають *станційними*.

Тому можна говорити про узагальнюючий вектор (множину) станційних координат і його елементів:

$$\tilde{R}_c = \{\tilde{R}_\alpha, \tilde{R}_{\dot{\alpha}}\}, \quad \tilde{R}_\alpha = \{\alpha, \beta, D\}, \quad \tilde{R}_{\dot{\alpha}} = \{\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{D}\}. \quad (2.53)$$

2.3.6. Перерахування координат із однієї системи в іншу в задачах теорії польоту космічних апаратів

У теорії польоту КА при розрахунках параметрів їх орбіт, а також траєкторій РН користуються зазвичай тією СК, у якій математичні вирази, що описують їх рух, мають найбільш простий і зручний для розрахунків вид. Однак у ряді випадків вихідні дані (початкові умови) можуть бути задані в одній системі, розрахунки зручніше вести в іншій, а результати необхідно знати в третій. Тому важливо вміти переходити від однієї СК до іншої.

У загальному випадку перерахування координат із однієї системи в іншу є складним завданням, а кількість варіантів таких перерахувань – досить великою. Тому обмежимося прикладами перерахування тільки між окремими СК.

Перерахування координат з ІСК у ГрСК і навпаки. Як уже відзначалось, основною відмінністю між цими СК є те, що ГрСК обертається разом із Землею відносно ІСК. Цей факт і необхідно мати на увазі при перерахуваннях.

Виходячи зі сказаного, перехід від ІСК до ГрСК і назад здійснюється з урахуванням виразів (2.42)...(2.48) шляхом таких перетворень [26, 44]:

$$\bar{r}_G = [\gamma] \cdot \bar{r}_H; \quad \bar{V}_G = [\gamma] \cdot \bar{V}_H + \omega_s \begin{bmatrix} Y_G \\ -X_G \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.54)$$

$$\bar{r}_H = [\gamma]^{-1} \cdot \bar{r}_T; [\bar{V}_H] = [\gamma]^{-1} \cdot [\bar{V}_T] + \omega_3 \begin{bmatrix} -Y_H \\ X_H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

де $[\gamma] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv [A^{\Gamma \leftarrow H}]$ – матриця напрямних косинусів;

$$[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv [A^{H \leftarrow \Gamma}]$$
 – обернена матриця, що дорівнює у даному разі транспонованій початковій матриці.

Для переходу від ГрСК до ГцССК:

а) знаходять відстань від центра Землі до КА

$$r_T = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2};$$

б) обчислюють географічну широту проекції КА на Землю

$$\varphi = \arcsin(Z_T / r_T); \quad (2.56)$$

в) розраховують географічну довготу проекції КА на Землю

$$\lambda = \arccos(X_T / \sqrt{X_T^2 + Y_T^2}), \quad (2.57)$$

причому $\lambda \in [0^\circ \dots 180^\circ]$, якщо $Y_T \geq 0$, та $\lambda \in [180^\circ \dots 360^\circ]$, якщо $Y_T \leq 0$.

Перехід від ГрСК до ТППСК здійснюється шляхом таких перетворень [44]:

$$\bar{r}_T = [\lambda] \cdot [\bar{r}_T - \bar{r}_{T_0}]; \bar{V}_T = [\lambda] \cdot \bar{V}_T, \quad (2.58)$$

$$\text{де } [\lambda] = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ \cos B \cos L & \sin L \cos B & \sin B \\ -\sin L & \cos L & 0 \end{bmatrix} \equiv [A^{T \leftarrow \Gamma}] - \text{матриця}$$

напрямних косинусів;

$$\bar{r}_{\Pi_3} = [X_{\Pi_3}, Y_{\Pi_3}, Z_{\Pi_3}]^T, \quad r_{\Pi_3} = \sqrt{X_{\Pi_3}^2 + Y_{\Pi_3}^2 + Z_{\Pi_3}^2}; \quad (2.59)$$

$X_{\Pi_3}, Y_{\Pi_3}, Z_{\Pi_3}$ – координати НП у ГрСК.

Для розрахунку цих координат використовують параметри несферичної Землі та користуються такими залежностями:

$$X_{\Pi_3} = (R_3 / A_{\Pi_3} + h) \cos B \cos L; \quad (2.60)$$

$$Y_{\Pi_3} = (R_3 / A_{\Pi_3} + h) \cos B \sin L; \quad (2.61)$$

$$Z_{\Pi_3} = [R_3(1 - \alpha_3) / A_{\Pi_3} + h] \sin B; \quad (2.62)$$

$$A_{\Pi_3} = \sqrt{1 - \alpha_3(2 - \alpha_3) \sin^2 B}, \quad (2.63)$$

де $\alpha_3 = 1 / 298,3$ – коефіцієнт полярного стиску Землі;

$R_3 = 6378,131$ км – екваторіальний радіус Землі;

h – висота НП над рівнем моря;

B і L – геодезичні широта та довгота НП.

Перехід від ТППСК до ТПССК здійснюється шляхом таких перетворень:

$$D = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2}; \quad (2.64)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arccos(X_T / \sqrt{X_T^2 + Z_T^2}), \text{ якщо } Z_T \geq 0; \\ 360^\circ - \arccos(X_T / \sqrt{X_T^2 + Z_T^2}), \text{ якщо } Z_T < 0; \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\beta = \arcsin(Y_T / D); \quad (2.66)$$

$$\dot{D} = \frac{1}{D} [V_{x\Gamma}(X_\Gamma - X_\Pi) + V_{y\Gamma}(Y_\Gamma - Y_\Pi) + V_{z\Gamma}(Z_\Gamma - Z_\Pi)]; \quad (2.67)$$

$$\dot{\alpha} = (X_T V_{z\Gamma} - Z_T V_{x\Gamma}) / (X_T^2 + Z_T^2); \quad (2.68)$$

$$\dot{\beta} = (V_{y\Gamma} D - Y_T \dot{D}) / D \sqrt{X_T^2 + Z_T^2}. \quad (2.69)$$

Таким чином, ми розглянули тільки основні СК, які найбільш вживані при розв'язанні практичних завдань, і порядок перерахування координат із однієї СК в другу. Інші СК і перерахування координат між ними вивчатимуться у наступних розділах.

Контрольні питання

1. Що загального між рухом небесних тіл і рухом КА?
2. Як змінюється потенційна та кінетична енергія тіл у гравітаційному полі Землі? Як змінити повну енергію тіла?
3. Сформулюйте перший закон Кеплера. Що таке криві другого порядку?
4. Сформулюйте другий закон Кеплера. Що таке секторна швидкість?
5. Сформулюйте третій закон Кеплера. Що таке період обертання планети?
6. Сформулюйте перший закон Ньютона. Як він проявляється у повсякденному житті?
7. Сформулюйте другий закон Ньютона. Коли і чому виникає явище невагомості?
8. Сформулюйте третій закон Ньютона. Де і як він використовується в ракетно-космічній техніці?
9. Які сили діють на КА в орбітальному польоті? Чому і коли можна нехтувати силами притягання Сонця і Місяця?
10. Навіщо знадобилося застосовувати крім сонячного ще і зоряний час? У чому між ними відмінності?
11. Що таке всесвітній час? Чому його мало використовують у повсякденному житті?
12. Що таке часові пояси? Чим відрізняється поясний час від місцевого?
13. Чим обумовлена велика кількість систем координат, застосовуваних у небесній механіці та динаміці польоту КА?
14. У чому принципова відмінність між прямокутними та сферичними СК?
15. Назвіть основні точки і лінії на небесній сфері. Де знаходиться центр небесної сфери?
16. Що таке пряме піднесення і схилення небесного світила?
17. Де знаходиться точка весняного рівнодення? Як можна запам'ятати напрям на ТВРД?
18. Опишіть інерціальну і гринвіцьку системи координат. Чим вони розрізняються між собою?
19. Опишіть геоцентричні сферичні системи координат. Чим відрізняються між собою географічна і геодезична СК?
20. Опишіть топоцентричні системи координат. Чим відрізняються між собою ТПССК і ТППСК?

Розділ 3

НЕЗБУРЕНИЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Під незбуреним або кеплеровим рухом розуміють ідеалізований випадок, коли на КА діє одна-єдина сила притягання *сферичної Землі* при відсутності її *атмосфери* і *притягання* інших небесних тіл. Крім того, вважається, що сам КА не притягає Землю (так звана обмежена задача двох тіл).

Насправді ж на КА в орбітальному польоті діє множина сил, які є збурювальними факторами. Однак для спрощення вивчення орбітального руху вдаються до моделі незбуреного руху, а потім розглядають реальні умови функціонування КА.

3.1. УМОВИ НЕЗБУРЕНОГО ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ

Якщо прийняти, що Земля не еліпсоїд обертання, а куля з однорідною щільністю (щільність розподілу маси убуває пропорційно відстані від центра Землі) і знехтувати впливом інших збурювальних факторів (див. розд. 2), то можна говорити про *незбурений (кеплеровий) рух* КА.

При цьому вважають, що радіус земної кулі дорівнює середньому радіусу Землі $R_z = 6371 \text{ км}$, її середня щільність становить $\rho_z = 5,52 \text{ г/см}^3$, а отже, центр мас Землі збігається з її геометричним центром (центром кулі).

У такому випадку силу притягання Землі $\vec{F}_z = \vec{F}$ називають *центральною*. Це означає, що лінія дії цієї сили проходить через центри мас Землі і КА.

Таким чином, під **незбуреним** рухом КА будемо розуміти таку модель орбітального руху КА в полі тяжіння Землі, коли вважається, що:

- а) сила тяжіння Землі – *центральна*;
- б) збурювальні сили *відсутні*;
- в) керування рухом КА *не здійснюється*.

У цьому випадку рух КА описується рівнянням [39]

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \text{ або в компактній формі } m \cdot \ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \quad (3.1)$$

де центральна сила $\bar{F}$ визначається на основі закону всесвітнього тяжіння як

$$\bar{F} = -\gamma \frac{M_3 \cdot m}{r^3} \cdot \bar{r} = -\mu_0 \frac{m}{r^3} \cdot \bar{r}; \quad (3.2)$$

$M_3 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ – маса Землі;

$\mu_0 = \gamma \cdot M_3 \approx 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі.

Знак мінус у формулі (3.2) означає, що центральна сила спрямована протилежно радіусу-вектору КА $\bar{r}$. Якщо потрібно розрахувати величину цієї сили, то слід скористатися модулем вектора (3.2)

$$F = \gamma \frac{M_3 \cdot m}{r^2} = \mu_0 \frac{m}{r^2}. \quad (3.3)$$

Отже, під час незбуреного (кеплерового) руху на КА, що рухається після виводу на орбіту по інерції, діє одна-єдина сила – центральна сила гравітаційного притягання Землі, величина якої прямо пропорційна масі КА і обернено пропорційна квадрату відстані від нього до центра Землі.

Якби ця сила зникла, то КА рухався б рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\bar{V}_n$ у напрямку, заданому РН при виводі КА на орбіту в момент закінчення роботи її двигунів (рис. 3.1).

За рахунок же центральної сили КА одержує додаткову швидкість, спрямовану до центра Землі, – радіальну швидкість $\bar{V}_r$.

У підсумку результуючий вектор швидкості $\bar{V} = \bar{V}_n + \bar{V}_r$ забезпечує рух КА по орбіті. При цьому форма, розміри і поло-

ження орбіти у просторі визначаються координатами точки виводу КА у космічний простір і вектором $\bar{V}_n$.

Надалі за рахунок *навмисної* зміни величини і орієнтації цього вектора можна *керувати* орбітальним рухом КА, тобто здійснювати міжорбітальні маневри, проводити корекцію параметрів орбіти, забезпечувати стиковку в космосі, посадку пілотованих КА на Землю і т. ін.

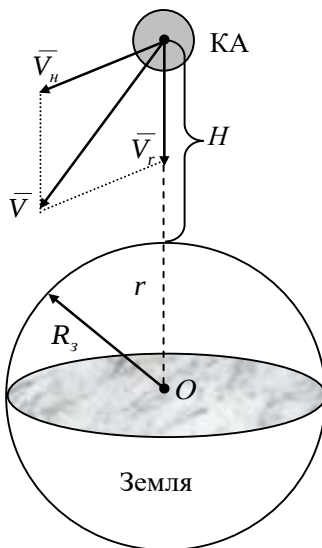


Рис. 3.1. Механізм орбітального руху КА

Зазначимо, що подібний ефект викликають і збурювальні фактори у реальних умовах, змінюючи параметри орбіти КА ненавмисно, причому їхній вплив стосується як вектора $\bar{V}_n$ (наприклад, гальмування КА атмосферою), так і вектора $\bar{V}_r$ (наприклад, за рахунок несферичності Землі). Однак вплив цих факторів – це предмет вивчення збуреного руху КА.

3.2. РІВНЯННЯ НЕЗБУРЕНОГО ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ В ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Найбільш універсальною за своєю суттю системою для вивчення процесів орбітального руху КА є ІСК $OX_{II}Y_{II}Z_{II}$. Для спрощення записів координати КА і його швидкостей в ІСК будемо позначати без індексу “и”, а саме: X , Y , Z і V_x , V_y , V_z .

Нагадаємо також, що швидкість являє собою першу похідну від координат, а прискорення – другу похідну від координат або першу похідну від швидкості КА.

Підставляючи значення центральної сили (3.2) у рівняння (3.1), одержимо диференціальне рівняння руху КА в ІСК у векторній формі [21, 44, 68]:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu_0}{r^3} \cdot \vec{r} = 0. \quad (3.4)$$

Векторне рівняння (3.4) для зручності аналізу і аналітичних розрахунків можна подати і у скалярній формі, спроектувавши радіус-вектор КА на відповідні осі ІСК. При цьому одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\mu_0 X / r^3; \\ \ddot{Y} = -\mu_0 Y / r^3; \\ \ddot{Z} = -\mu_0 Z / r^3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = V_x; \\ \dot{Y} = V_y; \\ \dot{Z} = V_z. \end{cases} \quad (3.5)$$

Зауважимо, що в рівняннях (3.5) завжди виконуються умови:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Відомо [15], що для розв’язання системи *шести* диференціальних рівнянь другого порядку (3.5) необхідно задати не менше *шести* початкових умов. На практиці ці початкові умови задають у вигляді координат кінця активної ділянки траєкторії РН (точки виводу КА на орбіту) X_κ , Y_κ , Z_κ і їх похідних $\dot{X}_\kappa$, $\dot{Y}_\kappa$, $\dot{Z}_\kappa$. При цьому інтегрування рівнянь (3.5) дає такі важливі залежності (перші інтеграли):

1. Інтеграл енергії (скаляр), що свідчить про те, що повна енергія КА $\mathcal{E}$ відносно Землі постійна, тобто

$$\mathcal{E}_h + \mathcal{E}_v = \mathcal{E} = \text{const}, \quad (3.6)$$

де $\mathcal{E}_h$ – потенційна енергія КА з масою m , що перебуває на відстані r від центра Землі.

Її можна обчислювати, використовуючи вирази (2.3) ... (2.5), наприклад, як

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h(r) = -\mu_0 m / r; \quad (3.7)$$

$\mathcal{E}_v$ – кінетична енергія КА з масою m , що рухається з лінійною швидкістю V .

Вона розраховується за формулою (2.7), наприклад, у такому виді:

$$\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_v(V) = mV^2 / 2. \quad (3.8)$$

Крім того, можна показати, що для замкнутих, тобто еліптичних орбіт з великою піввіссю a , справедливе співвідношення

$$\mathcal{E} = -\mu_0 m / 2a. \quad (3.9)$$

Тоді, підставляючи вирази (3.7)...(3.9) у рівняння (3.6), одержимо формулу *інтеграла енергії*

$$V^2 - 2\mu_0 / r = h_s = \text{const}, \quad (3.10)$$

де $h_s = -\mu_0 / a$ – константа енергії (постійна інтегрування).

Аналіз отриманих результатів показує, що для різних типів орбіт виконуються різні умови, а саме [39]:

для еліптичних орбіт $h_s < 0$, $a > 0$;

для параболічних орбіт $h_s = 0$, $a = \infty$;

для гіперболічних орбіт $h_s > 0$, $a < 0$.

Інакше кажучи, чим більше розміри орбіти, тим більше інтеграл енергії. Це положення використовуватимемо при вивченні міжорбітальних маневрів КА (розд. 5).

Із формули (3.10) неважко одержати вираз для лінійної швидкості КА, що рухається по еліптичній орбіті з великою піввіссю a .

2. Інтеграл площ (вектор), який свідчить про те, що площа, описувана радіусом-вектором КА за одиницю часу, є постійною (другий закон Кеплера). Це можна подати векторним добутком

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{C} = \text{const} \quad (3.11)$$

або у скалярній формі

$$r^2 \cdot \dot{\theta} = r \cdot V \cdot \cos \theta = C = 2\sigma = \text{const}, \quad (3.12)$$

де $\dot{\theta}$ (тета альтернативна) – кутова швидкість руху КА навколо центра Землі;

θ (тета) – кут нахилу вектора лінійної швидкості КА до місцевого горизонту (кут місцевого горизонту);

$\bar{C}$ – вектор кінетичного моменту КА;

σ – секторна швидкість КА.

Площина руху КА в ІСК при цьому визначається рівнянням

$$C_1 X + C_2 Y + C_3 Z = 0, \quad (3.13)$$

де C_1, C_2, C_3 – компоненти (проекції на осі ІСК) вектора $\bar{C}$, причому $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$.

Очевидно, що вектор $\bar{C}$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\bar{r}$ і $\bar{V}$, а отже, він *однозначно* її задає [15]. Ця площина називається **площиною орбіти** КА (рис. 3.2). Оскільки вектор $\bar{C} \in \text{постійним}$, то постійна і площина орбіти.

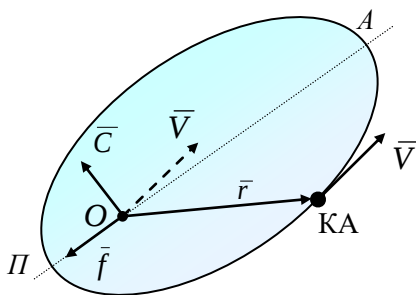


Рис. 3.2. Геометрична інтерпретація векторів:

A – апогей; P – перигей; AP – лінія апсид; O – центр Землі

Таким чином, орбіта КА лежить у нерухомій відносно інерціального простору площині, що проходить через центр Землі. Можна показати, що для двох будь-яких точок положення КА $X_1 Y_1 Z_1$ і $X_2 Y_2 Z_2$ справедливі вирази [44]:

$$\begin{cases} C_1 = Y_1 \dot{Z}_1 - Z_1 \dot{Y}_1 = Y_2 \dot{Z}_2 - Z_2 \dot{Y}_2; \\ C_2 = Z_1 \dot{X}_1 - X_1 \dot{Z}_1 = Z_2 \dot{X}_2 - X_2 \dot{Z}_2; \\ C_3 = X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1 = X_2 \dot{Y}_2 - Y_2 \dot{X}_2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Наведені залежності для інтеграла площ дозволяють задати в ІСК площину орбіти і положення КА в цій площині.

3. Інтеграл Лапласа (вектор) встановлює зв'язок між векторами $\bar{r}$, $\bar{V}$, $\bar{C}$:

$$-\mu_0 \bar{r}/r + (\bar{V} \times \bar{C}) = \bar{f} = \text{const} \quad (3.15)$$

або у скалярній формі

$$\begin{cases} X \cdot V^2 - \mu_0 X/r - r \cdot \dot{r} \cdot \dot{X} = f_1; \\ Y \cdot V^2 - \mu_0 Y/r - r \cdot \dot{r} \cdot \dot{Y} = f_2; \\ Z \cdot V^2 - \mu_0 Z/r - r \cdot \dot{r} \cdot \dot{Z} = f_3, \end{cases} \quad (3.16)$$

де f_1 , f_2 , f_3 – компоненти (проекції на осі ІСК) вектора $\bar{f}$, причому $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$.

Вектор Лапласа $\bar{f}$ лежить у площині орбіти (див. рис. 3.2). Він є віссю її симетрії, збігається з лінією апсид *АП* еліпса і завжди спрямований в перигей *П*. Отже, інтеграл Лапласа показує орієнтацію орбіти КА в ІСК і у власній площині.

Таким чином, у результаті розв'язку рівнянь (3.5) отримані вирази для семи постійних параметрів: $h_3, C_1, C_2, C_3, f_1, f_2, f_3$, за допомогою яких можна повністю описати незбурену орбіту КА.

Між цими параметрами існують такі *взаємозв'язки*:

по-перше, вектор Лапласа $\bar{f}$ і вектор $\bar{C}$ взаємно ортогональні і визначають незмінну площину Лапласа, тобто

$$\bar{f} \cdot \bar{C} = 0 \text{ або } f_1 C_1 + f_2 C_2 + f_3 C_3 = 0; \quad (3.17)$$

по-друге, між вектором Лапласа, енергією руху КА і вектором $\bar{C}$ існує зв'язок у вигляді

$$\bar{f} \cdot \bar{f} = f^2 = C^2 h_3 + \mu_0^2. \quad (3.18)$$

З урахуванням цих зв'язків *незалежних* постійних інтегрування залишається тільки *п'ять*. Оскільки для повного розв'язання системи диференціальних рівнянь другого порядку (3.5) потрібно *шість* констант, а проблема полягає не тільки в заданні орбіти, а і в описі орбітального руху КА, то як шоста константа повинен бути *час*. Він визначається з рівняння Кеплера, яке наведено далі.

На основі викладеного можна показати [44], що незбурений рух КА в ІСК описується рівнянням (3.13) та залежністю

$$\mu_0 r + f_1 X + f_2 Y + f_3 Z = C. \quad (3.19)$$

Однак на практиці описувати незбурений орбітальний рух КА за допомогою формул (3.13) і (3.19) не завжди зручно і недостатньо наочно. Тому, де це необхідно і можливо, вдаються до опису цього руху в інших СК, однозначно зв'язаних з ІСК.

3.3. КЕПЛЕРОВІ ЕЛЕМЕНТИ ОРБИТ

Практика показала, що в ІСК зручно описувати рух КА тоді, коли необхідно одночасно визначати положення КА, Сонця, Землі і об'єктів спостереження на ній. При цьому термін “описати рух КА” в ІСК означає визначити для будь-якого моменту часу **шість** параметрів: координати КА X_{II} , Y_{II} , Z_{II} і їхні похідні (швидкості КА) $V_{xII} = \dot{X}_{II}$, $V_{yII} = \dot{Y}_{II}$, $V_{zII} = \dot{Z}_{II}$.

Інакше кажучи, необхідно визначити для будь-якого моменту часу множину (2.44) та її елементи (2.42) і (2.43).

Якщо ж необхідно описати тільки незбурений орбітальний рух КА, то це більш зручно і наочно можна зробити в інших, спеціальних СК.

3.3.1. Спеціальні системи координат

Для вирішення практичних завдань теорії орбітального руху КА використовують такі спеціальні СК:

- орбітальну нерухому СК (ОрНСК);
- комбіновану СК.

ОрНСК $OX_\omega Y_\omega Z_\omega$ (рис. 3.3) має початок у центрі Землі. Основна площина – площина орбіти. Опорна вісь Y_ω спрямована в перигей орбіти Π , вісь X_ω лежить у площині орбіти і спрямована у бік руху КА в перигеї, вісь Z_ω доповнює систему до правої.

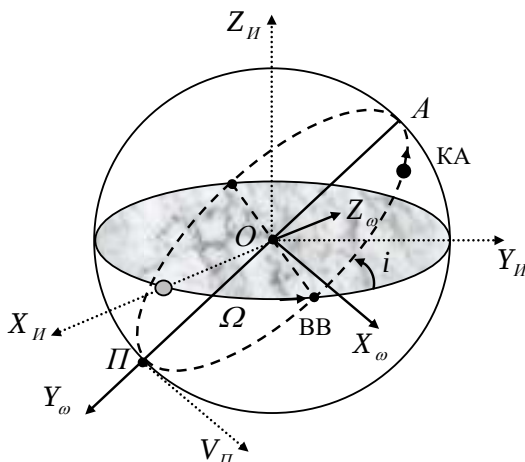


Рис. 3.3. Орбітальна нерухома СК

Положення ОрНСК в ІСК $OX_\Pi Y_\Pi Z_\Pi$ визначається кутами Ω , i , ω , зміст яких буде розкритий нижче. Для переходу від ОрНСК до ІСК використовується матриця [26]

$$[A^{\Pi \leftarrow \omega}] = [0,5\pi Z_\Pi] \cdot [0,5\pi X_\Pi] \cdot [\Omega X_\Pi] \cdot [i Y_\Pi] \cdot [-\omega Z_\Pi]. \quad (3.20)$$

На основі ОрНСК і ІСК можна ввести **комбіновану** (орбітально-інерціальну) СК. Її іноді називають *оскулюючою* [44].

Початок **комбінованої СК** – у центрі Землі. Основні площини – площина екватора Землі і площина орбіти КА. Опорні напрямки (орієнтири для осей) – ТВРД, лінія апсид і лінія вузлів.

Лінія апсид – це лінія, що з'єднує апогей A і перигей Π орбіти (див. рис. 3.3).

У такій комбінованій СК для опису положення (але не руху!) КА використовують вектор (множину) орбітальних параметрів або *вектор кеплерових елементів* еліптичної орбіти виду

ЗМІСТ КОМПОНЕНТІВ ЯКОГО РОЗКРИВАЄТЬСЯ НИЖЧЕ.

Елементи вектора (3.21) можна розділити на три групи:

- Розміри і форма орбіти.** Нагадаємо, що ми вивчаємо орбітальний рух КА по замкнутих (еліптичних і колових) орбітах. При цьому еліпс (рис. 3.4) як загальний випадок замкнутих кривих другого порядку описується на площині у деякій декартовій системі координат oxy канонічним рівнянням [15] виду

де a і b – велика і мала півосі еліпса.



Рис. 3.4. До визначення елементів орбіти

Довжина півосей еліпса характеризує його розміри, а їхнє співвідношення – форму еліпса.

На головній лінії еліпса $АП$, названою *лінією апсид*, розташовується ряд особливих точок:

центр еліпса O_0 ;

фокуси еліпса O_1 і O_2 ;

апсидальні точки – апогей A і перигей $П$.

Через фокуси перпендикулярно до лінії апсид проведемо прямі $P_1P'_1$ і $P_2P'_2$, які назвемо *фокальними лініями*, а пряму $ВВ'$, проведену через центр еліпса, – *центральною лінією*.

Нагадаємо також основну *властивість еліпса*: сума відстаней від фокусів еліпса до будь-якої довільної точки на ньому K є величиною постійною і рівною великій осі, тобто

$$O_1K + KO_2 = 2a.$$

У теорії орбітального руху зазвичай за основу приймають велику піввісь еліпса a і один із його фокусів, наприклад O_1 , який збігається із центром Землі O .

Отже, *розмір орбіти* будемо задавати *великою піввіссю* еліпса a – відстанню від центра еліпса до однієї з його вершин: апогею A або перигею $П$.

Стосовно до реальних умов велика піввісь еліптичної орбіти обчислюється (див. рис. 3.4) як

$$a = 0,5 (r_A + r_{\Pi}) = 0,5 (H_A + H_{\Pi} + 2R_z), \quad (3.22)$$

де $r_A = R_z + H_A$ – відстань від центра Землі до апогею орбіти A ;

$r_{\Pi} = R_z + H_{\Pi}$ – відстань від центра Землі до перигею орбіти $П$;

H_A і H_{Π} – висота апогею і перигею над Землею.

Форму орбіти характеризує *ексцентриситет* еліпса e . Він у загальному випадку обчислюється як

$$e = 2c/2a = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a,$$

де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – половина міжфокусної відстані еліпса. Ця формула витікає із трикутника $\Delta O_1 O_2 B'$ (див. рис. 3.4) з урахуванням того, що $O_1 B' = B' O_2 = a$.

На практиці міжфокусну відстань зручно обчислювати за однією із таких формул:

$$2c = r_A - r_{II} = H_A - H_{II}; \quad c = 0,5(r_A - r_{II}) = 0,5(H_A - H_{II}). \quad (3.23)$$

Тоді для розрахунків ексцентриситету можна користуватись залежностями

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{r_A - r_{II}}{r_A + r_{II}} = \frac{H_A - H_{II}}{H_A + H_{II} + 2R_3}. \quad (3.24)$$

Значення ексцентриситету для замкнутих орбіт лежать у межах $0 \leq e < 1$. При цьому у випадку $e = 0$ одержимо коло (колову орбіту). Якщо $e \approx 0$, то говорять про майже колову орбіту. При $0,5 \leq e < 1$ маємо значно витягнуту орбіту.

Крім великої півосі і ексцентриситету для характеристики *розмірів і форми* орбіти використовують *фокальний параметр* $p = O_1 P_1 = O_1 P'_1 = O_2 P_2 = O_2 P'_2$, що обчислюється за формулою

$$p = a(1 - e^2). \quad (3.25)$$

Довідка. Формулу (3.25) можна отримати із таких міркувань. Із прямокутного трикутника (див. рис. 3.4) $O_2 P_1 O_1$ випливає, що $p^2 = (O_2 P_1)^2 - (2c)^2$. В той же час за визначенням еліпса маємо $O_2 P_1 + p = 2a$, звідки $O_2 P_1 = 2a - p$. Підставимо це значення у попередню формулу та врахуємо, що на основі (3.24) $c = ae$. Провівши відповідні математичні дії, знайдемо формулу (3.25).

На основі формул (3.22)...(3.25) можна показати, що для еліптичних орбіт справедливі і такі співвідношення:

$$r_A = a(1 + e) = p / (1 - e); \quad (3.26)$$

$$r_{II} = a(1 - e) = p / (1 + e); \quad (3.27)$$

$$r_{P_1} = a(1 - e^2) = p; \quad (3.28)$$

$$r_{P_2} = a(1 + e^2); \quad r_B = a.$$

Крім того, для *колових* орбіт (при $e = 0$) отримаємо:

$$H_A = H_{II} = H_o; \quad (3.29)$$

$$r_A = r_{II} = r_o;$$

$$a = H_o + R_s = r_o = p.$$

Приклад 3.1. Знайти велику піввісь орбіти a , її ексцентриситет e і фокальний параметр p , якщо відомі висота апогею $H_A = 800$ км і перигею $H_{II} = 300$ км.

Розв'язання. Прийнемо, що середній радіус Землі $R_s = 6371$ км. Тоді із формули (3.22) $a = 0,5(H_A + H_{II} + 2R_s) = 0,5(800 + 300 + 2 \cdot 6371) = 6921$ км. Далі на основі (3.23) знайдемо $c = 0,5(H_A - H_{II}) = 0,5(800 - 300) = 250$ км, а потім $e = c/a = 250/6921 \approx 0,036$. Використовуючи отримані результати та формулу (3.25), знайдемо $p = a(1 - e^2) = 6921(1 - 0,036^2) \approx 6912$ км.

Положення орбіти у просторі. Просторове положення орбіти найчастіше задають трьома кутами: інерціальною довготою висхідного вузла (ВВ) орбіти Ω , нахиленням орбіти i (див. рис. 3.3) та аргументом перигею ω .

Інерціальна довгота ВВ орбіти Ω – це кут у площині екватора, що відлічується по ходу обертання Землі від напрямку на ТВРД до напрямку на ВВ. По-іншому, це пряме піднесення ВВ у другій екваторіальній СК (див. рис. 2.12).

Висхідний вузол – це точка перетинання площини орбіти із площиною екватора за умови, що КА переходить із південної півкулі Землі у північну. Протилежна точка називається низхідним вузлом. Пряма, що з'єднує висхідний і низхідний вузли орбіти, називається **лінією вузлів**.

Межі зміни інерціальної довготи ВВ орбіти $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$. Як бачимо, цей параметр характеризує положення площини орбіти в ІСК.

Якщо ж спроектувати орбіту КА на обертову Землю, то в момент перетинання КА площини екватора при його переході із південної півкулі Землі у північну одержимо **географічну довготу ВВ** $\lambda_{\text{вв}}$, тобто координати ВВ у ГрСК. Значення цього параметра залежать від інерціальної довготи ВВ, періоду обертан-

ня КА, нахилення орбіти і моменту знаходження КА в перигеї орбіти.

Нахилення орбіти i – двогранний кут між площиною екватора і площиною орбіти, відлічуваний від площини екватора проти ходу годинникової стрілки для спостерігача, що перебуває у ВВ орбіти. Діапазон зміни нахилення орбіти $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$.

Якщо $0^\circ < i < 90^\circ$, то орбіта називається *прямою*, якщо $90^\circ < i < 180^\circ$, то орбіта *зворотна*. При $i = 90^\circ$ орбіта *полярна*, при $i = 0^\circ$ або $i = 180^\circ$ – *екваторіальна*.

Зауважимо, що при $i = 180^\circ$ КА рухається проти обертання Землі. Це *не вигідно* як з огляду на енергетичні витрати при запуску КА на такі орбіти, так і через велику швидкість взаємного переміщення КА і Землі, що затрудняє спостереження за нею. Тому такі орбіти практично не застосовуються.

Отже, параметри Ω та i характеризують положення орбіти в ІСК. Для екваторіальних орбіт (при $i = 0^\circ$ або $i = 180^\circ$) інерціальна довгота ВВ втрачає смисл. Тому, наприклад, для так званих стаціонарних орбіт (див. далі) використовують географічну довготу точки “зависання” КА над екватором.

Аргумент перигею ω – кут між лінією вузлів і напрямком на перигей, відлічуваний у площині орбіти від ВВ по ходу руху КА (рис. 3.5).

Аргумент перигею характеризує положення еліпса у власній площині. Діапазон його можливих значень $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

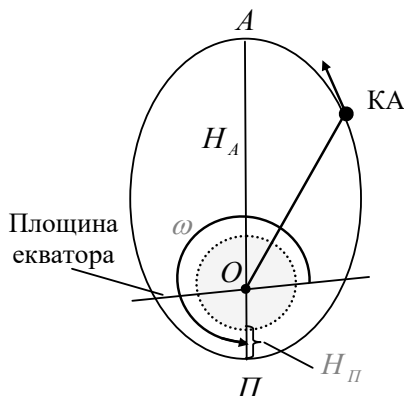


Рис. 3.5. Аргумент перигею

Наприклад, якщо для полярних орбіт аргумент перигею $\omega = 90^\circ$, то перигей перебуває над Північним полюсом Землі, а якщо $\omega = 270^\circ$, то – над південним.

Для колових орбіт аргумент перигею втрачає смисл. Тому для них за характерну точку замість перигею приймають висхідний вузол орбіти.

Положення КА на орбіті. Для вирішення цільових завдань КІС має бути відомим положення КА на орбіті у будь-який момент часу. Цього можна досягти, якщо заданий деякий початок відліку, а також відомі закони руху КА у часі.

На практиці для *еліптичних* орбіт за початок відліку часто приймають час проходження КА через перигей t_{Π} . Тоді значення будь-якого параметра орбітального руху буде описуватися деякою функцією поточного польотного часу t

$$\phi = \phi(t - t_{\Pi}).$$

Інтервал часу між двома послідовними проходженнями КА точки перигею складає *сидеричний* (зоряний) *період обертання* КА T – інтервал часу, за який КА робить повний оберт по орбіті відносно ТВРД або нерухомої зірки.

Його можна обчислити на основі III закону Кеплера як

$$T = 2\pi\sqrt{a^3 / \mu_0} . \quad (3.30)$$

Для колових орбіт формула (3.30) з урахуванням залежностей (3.29) набуває виду

$$T_o = 2\pi\sqrt{(H_o + R_s)^3 / \mu_0} = 2\pi\sqrt{r_o^3 / \mu_0} . \quad (3.31)$$

Із сидеричним періодом обертання однозначно зв'язана середня кутова швидкість КА, названа в теорії польоту **середнім рухом** КА, яка для еліптичних орбіт обчислюється за формулою

$$n = 2\pi/T = \sqrt{\mu_0 / a^3} , \quad (3.32)$$

а для колових з урахуванням виразу (3.31) як

$$n_o = 2\pi/T_o = \sqrt{\mu_0 / (H_o + R_s)^3} = \sqrt{\mu_0 / r_o^3} . \quad (3.33)$$

Приклад 3.2. Розрахувати сидеричний період обертання КА T і його середній рух n , якщо відомі висоти апогею орбіти $H_A = 800$ км і перигею $H_{II} = 600$ км.

Розв'язання. Знайдемо значення великої півосі із формули (3.22) $a = 0,5(H_A + H_{II} + 2R_s) = 0,5(800 + 600 + 2 \cdot 6371) = 7071$ км. Тоді на основі формули (3.30) отримаємо сидеричний період обертання КА $T = 2\pi\sqrt{a^3 / \mu_0} = 2\pi\sqrt{7071^3 / 3,986 \cdot 10^5} \approx 5917^s \approx 98,6^m$, а із виразу (3.32) – середній рух КА $n = 2\pi/T = 2\pi/5917 \approx 10^{-3} c^{-1} \approx 0,6$ град/с.

Приклад 3.3. Розрахувати сидеричний період обертання КА по коловій орбіті T_o і його середній рух n_o , якщо висота орбіти $H_o = 800$ км.

Розв'язання. Скористаємось формулами (3.31) і (3.33), звідки з урахуванням (3.29) знайдемо радіус колової орбіти $r_o = 800 + 6371 = 7171$ км, а через нього розрахуємо сидеричний період обертання КА $T_o = 2\pi\sqrt{r_o^3 / \mu_0} = 2\pi\sqrt{7171^3 / 398600} \approx 6043^s \approx 100,7^m$ та його середній рух $n_o = 2\pi/T_o = 2\pi/6043 \approx 10^{-3} c^{-1} \approx 0,6$ град/с.

Як видно із визначення і наведених прикладів, сидеричний період *не зв'язаний* з обертанням Землі. У той же час, для рішення прикладних завдань принципово необхідно враховувати обертання Землі і разом з нею рух об'єктів спостереження, стартових позицій, наземних пунктів і т.п.

У такому випадку використовують поняття **синодичного періоду обертання** КА $T_{\text{син}}$ як інтервалу часу між двома послідовними проходженнями КА однієї і тієї ж точки спостереження на орбитовій Землі.

В окремому випадку, якщо КА рухається по коловій орбіті ($e = 0$) у площині екватора ($i = 0$) у східному напрямку (по ходу обертання Землі), то при певній висоті такої орбіти можна забезпечити $T_{\text{син}} = \infty$.

Для спостерігача, який знаходиться на екваторі Землі, такий КА здаватиметься “вісячим”, тобто одержимо ефект синхронного обертання КА і Землі. Такі орбіти називаються **стаціонарними** (СтО).

Їхню висоту можна визначити із умови рівності сидеричного періоду обертання КА $T = T_o = 2\pi\sqrt{r_o^3 / \mu_o}$ і зоряної доби $T_{\text{зд}} = 2\pi / \omega_z = 86164^s$.

У цьому випадку, прийнявши $T_o = T_{\text{зд}}$ і врахувавши кутову швидкість обертання Землі $\omega_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, неважко знайти розміри СтО:

$$r_o \approx 42164 \text{ км} \text{ або } H_o \approx 35800 \text{ км}. \quad (3.34)$$

У загальному ж випадку для колових екваторіальних орбіт зв'язок між синодичним і сидеричним періодами визначається виразом [26]

$$T_{\text{син}} = \frac{T_o}{1 - \omega_z T_o / 2\pi}. \quad (3.35)$$

Нагадаємо, що для колових орбіт понять апогею і перигею не існує. Тому за початок відліку, у тому числі для знаходження сидеричного періоду T_o , приймають момент перебування КА у ВВ орбіти, тобто момент перетинання КА площини екватора t_Ω при його переході із південної півкулі Землі у північну.

Цей же момент часу часто використовують і для опису еліптичного руху КА, тобто переходять у векторі (3.21) від параметра t_Π до параметра t_Ω .

Отже, *кеплерові елементи орбіти* – це *шість констант*, що характеризують:

розміри та форму орбіти;

положення орбіти в інерціальному просторі;

положення орбіти у власній площині;

деяке фіксоване (початкове) положення КА на орбіті.

Ці параметри в принципі не залежать від поточного часу. Вони ж і самі не змінюються згодом, оскільки мова йде про *незбурений* орбітальний рух.

Кеплерові елементи є наочною і зручною моделлю еліптичних орбіт. Тому вони знайшли широке застосування як у теорії, так і в практиці космічних польотів.

У той же час зрозуміло, що кожен із шести кеплерових елементів повинен однозначно виражатись через отримані раніше інтеграл енергії (3.10), інтеграл площ (3.11) або (3.12) та вектор Лапласа (3.15) або (3.16), що характеризують як параметри орбіти КА, так і параметри його руху в ІСК.

Тому цікаво установити зв'язок між кеплеровими елементами орбіт та їх параметрами в ІСК.

3.4. ЗВ'ЯЗОК КЕПЛЕРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОРБІТ З ЇХ ПАРАМЕТРАМИ В ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Особливістю *незбурених* орбіт є те, що диференціальні рівняння руху другого порядку (3.5), які описують рух КА в ІСК, інтегруються до кінця (тобто двічі).

Це дозволяє знайти прямий і однозначний зв'язок між кеплеровими елементами і модулями інтегралів енергії, площ і Лапласа, а також координатами КА і їхніми похідними в ІСК.

Зокрема, фокальний параметр, ексцентриситет і велика піввісь орбіти виражаються як [44]:

$$p = C^2 / \mu_0; \quad (3.36)$$

$$e = f / \mu_0; \quad (3.37)$$

$$a = \mu_0 r / (2\mu_0 - rV^2). \quad (3.38)$$

Елементи, що визначають положення орбіти у просторі, можна подати такими зв'язками:

$$\Omega = \arcsin[(\dot{Y}Z - \dot{Z}Y) / \sin i \sqrt{\mu_0 p}] ; \quad (3.39)$$

$$i = \arccos[(X\dot{Y} - Y\dot{X}) / \sqrt{\mu_0 p}] ; \quad (3.40)$$

$$\omega = u - \mathcal{G} ; \quad (3.41)$$

$$u = \arcsin[(Y \cos \Omega - X \sin \Omega) / r \cos i] ; \quad (3.42)$$

$$\mathcal{G} = \arcsin[\sqrt{p/\mu_0} (X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}) / er] . \quad (3.43)$$

У загальному виді зв'язки між кеплеровими елементами і координатами КА та їх похідними в ІСК можна подати як

$$\tilde{R}_0 = \tilde{Q}^{0 \leftarrow H} \cdot \tilde{R}_H , \quad (3.44)$$

де $\tilde{Q}^{0 \leftarrow H}$ – узагальнений оператор перетворень, що задається формулами (3.22)...(3.43).

Існує і зворотний зв'язок, що дозволяє переходити від кеплерових елементів орбіт до вектора просторово-часового положення КА в ІСК

$$\tilde{R}_H = \tilde{Q}^{H \leftarrow 0} \cdot \tilde{R}_0 , \quad (3.45)$$

де $\tilde{Q}^{H \leftarrow 0}$ – узагальнений оператор зворотних перетворень.

У явному виді такі перетворення можна описати залежностями [26, 55, 58]:

$$\begin{aligned} X_H &= r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i); \\ Y_H &= r(\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i); \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$Z_H = r \sin u \sin i ;$$

$$\begin{aligned} V_{xH} &= V_r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i) - \\ &- V_{\perp} (\cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i); \\ V_{yH} &= V_r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i) - \\ &- V_{\perp} (\sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos u \cos i); \\ V_{zH} &= V_r \sin u \sin i + V_{\perp} \cos u \sin i , \end{aligned} \quad (3.47)$$

де V_r і $V_{\perp}$ – радіальна і трансверсальна складові вектора лінійної швидкості КА, які розкриваються пізніше.

Представлені результати свідчать про різноманіття підходів до опису орбіт КА.

Завдання фахівців полягає в тому, щоб вибрати найбільш раціональний підхід до цього опису, виходячи із практичних потреб, простоти і можливості реалізації.

3.5. ПАРАМЕТРИ НЕЗБУРЕНОГО ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Вектор кеплерових елементів (3.21) характеризує *тільки* розміри і форму *орбіти*, її положення на площині і у просторі, а також задає точку “прив’язки” КА до цієї орбіти.

Інакше кажучи, цей вектор дає лише *просторовий* опис *можливого* положення КА, але він не відбиває *рух* КА по орбіті.

У той же час саме знання точного положення КА на орбіті, а отже, і у просторі, дозволяє використовувати КІС для вирішення цільових завдань. Тому виникає необхідність *просторово-часового* опису орбітального руху КА.

Для цього додатково до поняття параметрів орбіт (кеплерових елементів) введемо поняття *параметрів руху* КА, маючи на увазі *кутові* та *лінійні* характеристики орбітального руху, які є функціям польотного часу.

Інакше кажучи, необхідно знайти вектор (множину) виду

$$\tilde{R}(t) = \{\tilde{R}_0, \tilde{\Phi}(t)\}, \quad (3.48)$$

де $\tilde{\Phi}(t)$ – деякий вектор параметрів руху.

3.5.1. Кутові параметри орбітального руху. Рівняння Кеплера

До *кутових* параметрів руху КА віднесемо істинну, ексцентричну і середню аномалії, а також аргумент широти. Перерахо-

вані параметри визначають *поточне кутове положення* радіуса-вектора КА і тому являють собою функції часу.

Істинна аномалія $\vartheta = \vartheta(t)$ характеризує *поточне кутове положення* КА на орбіті відносно *перигею* (рис. 3.6).

Це кут у площині орбіти, відлічуваний від напрямку на перигей до поточного положення радіуса-вектора КА по ходу його руху. Він змінюється у межах $0 \leq \vartheta \leq 360^\circ$, причому в апогеї $\vartheta_A = 180^\circ$, а в перигей $\vartheta_{\Pi} = 0^\circ$.

Істинна аномалія є наочним кутовим параметром руху КА, однак формули на її основі досить громіздкі. Тому для спрощення аналітичних розрахунків вводять поняття *ексцентричної аномалії* $E = E(t)$, однозначно зв'язаної з істинною. Дано тлумачення цього поняття, використовуючи рис. 3.6.

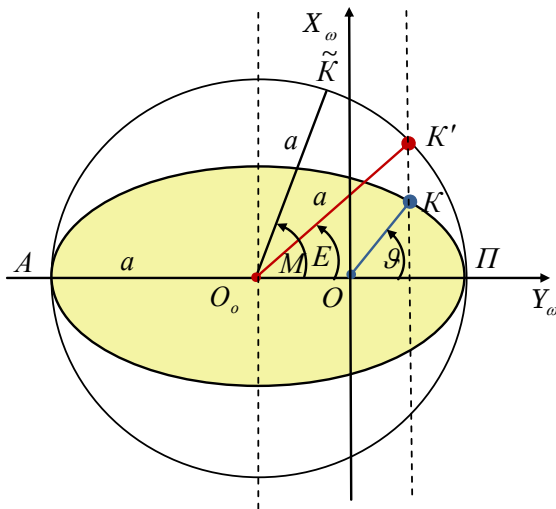


Рис. 3.6. Зв'язок між аномаліями

Нехай КА рухається по еліптичній орбіті з великою піввіссю a . Задамо орбіту в ОрНСК $OX_w Y_w Z_w$ із початком у фокусі еліпса, вісь Y_w якої спрямована в перигей орбіти. Із центра еліпса

побудуємо окружність радіусом a . Через поточне положення КА проведемо пряму, паралельну осі X_ω , до перетинання з окружністю (точка K').

Тоді кут $E = E(t)$, відлічуваний від напрямку на перигей по ходу руху КА до прямої O_0K' , являє собою **ексцентричну аномалію**.

Можна показати [26], що між істинною і ексцентричною аномаліями у будь-який момент часу існують взаємно однозначні залежності, обумовлені співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right); \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

з яких безпосередньо витікають такі формули:

$$\begin{aligned} E &= 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right]; \\ \vartheta &= 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Крім того, за необхідності можна скористатися і такими формулами зв'язку:

$$\begin{aligned} \sin E &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin \vartheta}{1+e \cos \vartheta}; \\ \sin \vartheta &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1-e \cos E}; \\ \cos E &= \frac{e + \cos \vartheta}{1+e \cos \vartheta}; \\ \cos \vartheta &= -\frac{e - \cos E}{1-e \cos E}. \end{aligned}$$

Середня аномалія $M = M(t)$ – це кут з вершиною в центрі еліпса O_0 , відлічуваний від напрямку на перигей до напрямку на

фіктивну точку $\tilde{K}$, що рухається із середньою кутовою швидкістю КА n (середній рух) по окружності радіуса a (велика піввісь орбіти).

Вона в будь-який момент часу визначається як

$$M(t) = n(t - t_{\Pi}). \quad (3.51)$$

Очевидно, що значення істинної, ексцентричної і середньої аномалій збігаються в точках апогею і перигею, тобто $\mathcal{A} = E_A = M_A = 180^\circ$ і $\mathcal{A}_{\Pi} = E_{\Pi} = M_{\Pi} = 0^\circ$.

Крім того, у випадку колових орбіт ($e = 0$) істинна і ексцентрична аномалії втрачають смисл. Формально це означає, що для будь-якого моменту часу t має місце тотожність $\mathcal{A}(t) = E(t) = M(t)$.

Приклад 3.4. Знайти значення істинної і ексцентричної аномалій у характерних точках еліптичної орбіти (див. рис. 3.4) P_1 , B , P_2 , якщо ексцентриситет еліпса $e = 0,5$.

Розв'язання. Скориставшись рис. 3.4 та рис. 3.5, із геометричних міркувань знайдемо $\mathcal{A}(P_1) = 90^\circ$, $E(B) = 90^\circ$. Підставляючи ці значення у формули (3.50) і враховуючи, що $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, безпосередньо отримаємо

$$E(P_1) = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{(1-e)/(1+e)} \operatorname{tg} 0,5 \mathcal{A}(P_1) \right] = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{(1-e)/(1+e)} = 60^\circ;$$

$$\mathcal{A}(B) = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{(1+e)/(1-e)} \operatorname{tg} 0,5 E(B) \right] = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{(1+e)/(1-e)} = 120^\circ.$$

Далі, на підставі властивості симетрії точок P_1 і P_2 (див. рис. 3.4) можна записати співвідношення $E(P_2) = 180^\circ - E(P_1) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. І, нарешті,

$$\mathcal{A}(P_2) = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{(1+e)/(1-e)} \operatorname{tg} 0,5 E(P_2) \right] = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{(1+e)/(1-e)} \operatorname{tg} 60^\circ \right] \approx 143^\circ.$$

Як бачимо із отриманих результатів, значення істинної і ексцентричної аномалій не збігаються в характерних точках еліптичної орбіти. Подібним чином можна переконатись, що вони також не збігаються і в інших її точках, окрім точок апогею і перигею. При цьому величина розбіжностей визначається тільки формою еліпса, тобто його ексцентриситетом.

Ексцентрична і середня аномалії зв'язані між собою **рівнянням Кеплера**, яке *явно* зв'язує елементи орбіт і параметри руху КА в часі

$$E(t) - e \sin E(t) = M(t). \quad (3.52)$$

Зауважимо, що у формулі (3.52) всі величини є безрозмірними, тому при розрахунках кути E та M треба виражати в радіанах, хоча під знаком $\sin$ можна користуватись і градусною мірою кута E° .

При цьому для переходу від радіанної міри E до градусної E° слід скористатись залежністю

$$E^\circ = 180^\circ E / \pi \approx 57,3^\circ \cdot E,$$

а для зворотного переходу – формулою

$$E = E^\circ \pi / 180^\circ \approx 0,0175 \cdot E^\circ.$$

Рівняння Кеплера можна одержати із інтеграла площ (3.12), звідки випливає, що швидкість зміни істинної аномалії (її перша похідна) дорівнює

$$d\vartheta/dt = C/r^2 \quad \text{або} \quad dt = r^2 d\vartheta / C.$$

Інтегруючи це рівняння (ліву частину у межах від t_Π до t , а праву – від $\vartheta = 0$ до ϑ), одержимо

$$\int_{t_\Pi}^t dt = \int_0^\vartheta r^2 C^{-1} d\vartheta \quad \text{або} \quad t - t_\Pi = C^{-1} \int_0^\vartheta r^2 d\vartheta.$$

Якщо в цьому співвідношенні замість r перейти до змінної E (див. нижче), а $d\vartheta$ визначити шляхом диференціювання співвідношень (3.43), то одержимо рівняння Кеплера (3.52), що дає можливість зв'язати положення КА на орбіті із часом після проходження ним перигею.

При цьому можливі два типи завдань. У *першому типі* задається деяка точка орбіти (ексцентрична аномалія E), а потрібно знайти момент часу, коли КА потрапить у цю точку. У *другому типі* завдань, навпаки, задається час після проходження перигею, а потрібно визначити на цей момент положення КА.

Обидва типи завдань потребують розв'язку рівняння Кеплера. Однак у першому випадку невідомим є час, а у другому – ексцентрична аномалія. Вирішення першого типу завдань здійснюється аналітично, оскільки рівняння Кеплера лінійне за часом t і легко розв'язується.

Приклад 3.5. Знайти значення *середньої* аномалії в характерних точках еліптичної орбіти (рис. 3.4) P_1 , B , P_2 , якщо ексцентриситет еліпса $e = 0,5$.

Розв'язання. Скориставшись рис. 3.4 і рис. 3.5 та результатами, отриманими у прикладі 3.4, із рівняння (3.52) знайдемо значення середньої аномалії

$$M(P_1) = E(P_1) - e \sin E(P_1) = 60^\circ - 0,5 \sin 60^\circ = \pi / 3 - 0,5\sqrt{3} / 2 \approx 0,61 \approx 35^\circ ;$$

$$M(B) = E(B) - e \sin E(B) = 90^\circ - 0,5 \sin 90^\circ = \pi / 2 - 0,5 \approx 1,07 \approx 61^\circ ;$$

$$M(P_2) = E(P_2) - e \sin E(P_2) = 143^\circ - 0,5 \sin 143^\circ \approx 2,5 - 0,3 \approx 2,2 \approx 125^\circ .$$

Другий тип завдань зводиться до розв'язку трансцендентного рівняння, що вимагає спеціального підходу.

За допомогою рівняння Кеплера можна знайти сидеричний період обертання КА T як функцію великої півосі його орбіти a . Для цього необхідно врахувати, що при знаходженні КА в перигеї орбіти його ексцентрична аномалія $E_{II} = 0$.

Очевидно, що через період T КА знову з'явиться в перигеї, а його ексцентрична аномалія дорівнюватиме $E_{II} = 2\pi$. Тоді із рівняння Кеплера випливає, що $2\pi - e \sin(2\pi) = nT$, звідки неважко знайти формулу для сидеричного періоду обертання КА (3.30).

Поряд з істинною аномалією зручним кутовим параметром руху КА є **аргумент широти** $u = u(t)$.

Це поточний кут, що лежить у площині орбіти і відлічується від $ВВ$ (тобто від площини екватора) до радіуса-вектора КА по ходу його руху (рис. 3.7).

Аргумент широти визначає поточне кутове положення КА на орбіті відносно *екватора* і обчислюється як

$$u(t) = \omega + \mathcal{A}(t). \quad (3.53)$$

Як видно із цієї формули і рис. 3.7, для еліптичних орбіт аргумент широти, як і істинна аномалія, змінюється в процесі руху КА в діапазоні $0 \leq u \leq 360^\circ$.

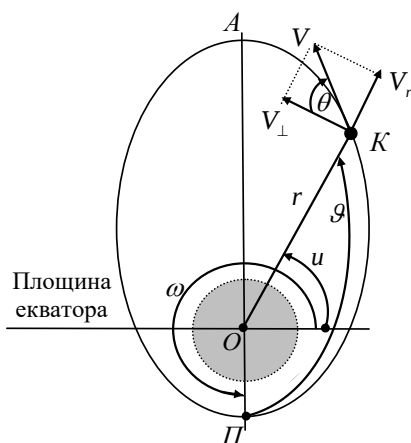


Рис. 3.7. Зв'язок між параметрами руху

Якщо при розрахунках за формулою (3.53) вийде $720^\circ \geq u^* > 360^\circ$, то приймають $u = u^* - 360^\circ$.

Отже, *відмінність* між істинною аномалією і аргументом широти полягає у різних *початках відліку*: перша відлічується від лінії апсид у перигеї, а другий – від лінії вузлів у ВВ орбіти.

Якщо для колових орбіт істинна і ексцентрична аномалії втрачають смисл, оскільки не існує апогею і перигею, а отже, немає точки відліку, то аргумент широти можна використовувати завжди, оскільки початком відліку для нього служить лінія вузлів. У принципі, цю ж або іншу точку можна використовувати і для відліку середньої аномалії.

Використовуючи кутові параметри руху КА, можна обчислювати його координати у прямокутних СК. Наприклад, координати КА в ОрНСК у будь-який момент часу обчислюються як

$$\begin{aligned} X_\omega &= p \cos \vartheta / (1 + e \cos \vartheta) = a(\cos E - e); \\ Y_\omega &= p \sin \vartheta / (1 + e \cos \vartheta) = a\sqrt{1 - e^2} \sin E; \\ Z_\omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Таким чином, усі три аномалії і аргумент широти характеризують *кутові* параметри орбітального руху КА, тобто кутове положення його радіуса-вектора у площині орбіти. У той же час, для однозначного опису положення КА в будь-який момент часу необхідно знати і *лінійні* параметри цього руху.

3.5.2. Лінійні параметри орбітального руху. Рівняння орбіти

До *лінійних* параметрів орбітального руху віднесемо радіус-вектор і лінійну швидкість КА.

Радіус-вектор КА $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – це спрямований відрізок, що з'єднує центр Землі і центр мас КА. Модуль радіуса-вектора змінюється у межах $r_{II} \leq r \leq r_A$, а його поточне значення визначається із *рівняння орбіти* у полярних координатах

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta(t)} = a[1 - e \cos E(t)]. \quad (3.55)$$

У цьому рівнянні істинна аномалія $\vartheta(t)$ і модуль радіуса-вектора КА $r(t)$ являють собою (див. рис. 3.7) *полярні координати* КА в ОрНСК. Для колових орбіт при $e = 0$ із формули (3.55) одержимо $r(t) = r_o = p = a = \text{const}$.

Лінійна швидкість КА $\bar{V} = \bar{V}(t)$ – це швидкість *поступального* руху центра мас КА у площині орбіти відносно інерціального простору.

Лінійна швидкість – векторна величина, що завжди спрямована по дотичній до орбіти у точці знаходження КА (див. рис. 3.7).

Модуль лінійної (*еліптичної*) швидкості визначається із інтеграла енергії (3.10) як

$$V(t) = \sqrt{\mu_o \left(\frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (3.56)$$

Формула (3.56) є універсальною, оскільки вона придатна і для колових орбіт як часткового випадку еліптичних. При цьому якщо КА рухається по *коловій* орбіті з радіусом $r = a = r_o$, то із рівняння (3.56) одержимо формулу для розрахунку його *колової* швидкості:

$$V_o = \sqrt{\mu_o / r_o} = \text{const}. \quad (3.57)$$

Більше того, якщо (див. рис. 3.1) радіус колової орбіти виразити через середній радіус Землі $R_s = 6371 \text{ км}$ і висоту КА H_o як $r_o = R_s + H_o$, то за умови $H_o = 0$ із співвідношення (3.57) одержимо значення так званої *першої космічної швидкості* КА

$$V_I = \sqrt{\mu_o / R_s} \approx 7,91 \text{ км/с}.$$

Із наведених виразів випливає, що зі **збільшенням висоти** КА його лінійна **швидкість падає** і навпаки. Максимальна швидкість V_I потрібна для того, щоб КА став ШСЗ при його нульовій висоті (гіпотетичний випадок).

Якщо у формулу (3.56) підставити крайні значення модуля радіуса-вектора, що відповідають точкам апогею $r(t) = r_A$ або перигею $r(t) = r_{II}$, і врахувати, що $r_A + r_{II} = 2a$, то одержимо граничні (екстремальні) значення лінійної швидкості КА

$$V_A = \sqrt{\mu_o r_{II} / a r_A} = V_B \sqrt{r_{II} / r_A}; \quad (3.58)$$

$$V_{II} = \sqrt{\mu_o r_A / a r_{II}} = V_B \sqrt{r_A / r_{II}}, \quad (3.59)$$

де $V_B = \sqrt{\mu_o / a}$ – лінійна швидкість КА в центральних точках еліпса B і B' . Ця формула випливає із виразу (3.56) за умови $r(t) = r_B = a$ (див. рис. 3.4).

Як видно із виразів (3.58) і (3.59), екстремальні значення швидкості КА обернено пропорційні відношенню відповідних відстаней:

$$V_A / V_{II} = r_{II} / r_A,$$

а поточні значення лінійної швидкості перебувають усередині інтервалу $V_A \leq V \leq V_{II}$.

Приклад 3.6. Знайти значення лінійної швидкості КА в точках A і Π еліптичної орбіти (див. рис. 3.7), якщо висота апогею $H_A = 800 \text{ км}$, а висота перигею $H_\Pi = 300 \text{ км}$.

Розв'язання. Прийемо, що середній радіус Землі $R_3 = 6371 \text{ км}$. Тоді із формули (3.22) $a = 0,5(H_A + H_\Pi + 2R_3) = 0,5(800 + 300 + 2 \cdot 6371) = 6921 \text{ км}$.

$$r_A = R_3 + H_A = 6371 + 800 = 7171 \text{ км}; \quad r_\Pi = R_3 + H_\Pi = 6371 + 300 = 6671 \text{ км}.$$

Далі із (3.58) $V_A = \sqrt{\mu_0 r_\Pi / a r_A} = \sqrt{398600 \cdot 6671 / 6921 \cdot 7171} \approx 7,32 \text{ км/с}$;

$V_\Pi = \sqrt{\mu_0 r_A / a r_\Pi} = \sqrt{398600 \cdot 7171 / 6921 \cdot 6671} \approx 7,87 \text{ км/с}$. Як бачимо, чим більша висота орбіти, тим менша лінійна швидкість КА. Крім того, отримані результати переконують у справедливості тотожності $V_A / V_\Pi = r_\Pi / r_A$. Дійсно, $V_A / V_\Pi = 7,32 / 7,87 \approx 0,93$, $r_\Pi / r_A = 6671 / 7171 \approx 0,93$.

Якщо у формулу (3.56) підставити значення радіуса-вектора КА у фокальних точках орбіти із (3.28), то одержимо значення лінійної швидкості для першої (P_1, P'_1) і другої (P_2, P'_2) пар цих точок відповідно

$$V_{P_1} = V_B \sqrt{(1+e^2)/(1-e^2)}; \quad (3.60)$$

$$V_{P_2} = V_B \sqrt{(1-e^2)/(1+e^2)}. \quad (3.61)$$

Приклад 3.7. Знайти значення лінійної швидкості КА в характерних точках еліптичної орбіти (див. рис. 3.4) P_1, B, P_2 , якщо висота апогею $H_A = 800 \text{ км}$, а висота перигею $H_\Pi = 300 \text{ км}$.

Розв'язання. Скористаємось результатами, отриманими у прикладі 3.6, а також значенням V_B із підтексту до формул (3.58) і (3.59). Отже,

$V_B = \sqrt{\mu_0 / a} = \sqrt{398600 / 6921} \approx 7,59 \text{ км/с}$. Далі на основі (3.23) знайдемо $c = 0,5(H_A - H_\Pi) = 0,5(800 - 300) = 250 \text{ км}$, а за допомогою виразу (3.24) розрахуємо $e = c / a = 250 / 6921 \approx 0,036$. Тоді із формул (3.60) і (3.61) отримаємо

$$V_{P_1} = V_B \sqrt{(1+e^2)/(1-e^2)} = 7,59 \sqrt{(1+0,036^2)/(1-0,036^2)} \approx 7,6 \text{ км/с};$$

$$V_{P_2} = V_B \sqrt{(1-e^2)/(1+e^2)} = 7,59 \sqrt{(1-0,036^2)/(1+0,036^2)} \approx 7,58 \text{ км/с}.$$

Отримані результати свідчать про те, що у будь-якій точці орбіти (*) лінійна швидкість КА знаходиться в інтервалі $V_A \leq V_* \leq V_{II}$, зокрема, $V_A < V_{P_2} < V_B < V_{P_1} < V_{II}$. Цей висновок має практичне значення для розробників та обслуговуючого персоналу КСС та інших КС.

Універсальність співвідношення (3.56) проявляється ще й у тому, що прийнявши в ньому значення $a = \infty$, одержимо формулу швидкості для параболічної орбіти (*параболічної швидкості*)

$$V_{nap}(t) = \sqrt{2\mu_0 / r(t)} = V(t) \cdot \sqrt{2},$$

звідки за умови $H = 0$ знайдемо значення так званої *другої космічної швидкості* КА, при якій він може вийти за межі притягання Землі:

$$V_{II} = \sqrt{2\mu_0 / R_s} = V_I \cdot \sqrt{2} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

Якщо ж у виразі (3.56) прийняти $a < 0$, то одержимо формулу швидкості для гіперболічної орбіти (*гіперболічної швидкості*)

$$V_{zin}(t) = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r(t)} + \frac{1}{a} \right)}.$$

По гіперболічній орбіті рухаються КА, які виводяться за межі Сонячної системи. Для цього загальна енергія КА повинна дорівнювати сумі кінетичних енергій, які необхідні для подолання сил притягання Землі і Сонця. Сила притягання Землі перестає діяти на КА на висоті $H \approx 930000 \text{ км}$. На цій висоті швидкість звільнення КА від сили притягання Землі являє собою другу космічну швидкість $V_{II} \approx 11,2 \text{ км/с}$, а від сили притягання Сонця – $V_c \approx 12,33 \text{ км/с}$.

Тоді результуюча швидкість для звільнення від сил притягання Землі і Сонця (*третья космічна швидкість*) визначиться як

$$V_{III} = \sqrt{V_c^2 + V_{II}^2} \approx 16,67 \text{ км/с},$$

при якій КА рухатиметься по гіперболічній орбіті.

Нас у подальшому цікавитимуть здебільшого замкнуті (еліптичні та колові) орбіти КА, які є штучними супутниками Землі.

При цьому лінійну швидкість КА на таких орбітах часто розкладають на дві **ортogonalьні складові**: радіальну і трансверсальну (франц. *transversal*, лат. *transverses* – поперечний, схрещений).

Радіальною складовою $\bar{V}_r = \bar{V}_r(t)$ називається проекція вектора лінійної швидкості КА на його радіус-вектор $\bar{r}$. Вона характеризує швидкість зміни модуля (довжини) радіуса-вектора і може бути обчислена за формулою [26]

$$V_r(t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} e \sin \vartheta(t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} \frac{e \sin E(t)}{1 - e \cos E(t)} \sqrt{1 - e^2}. \quad (3.62)$$

Як впливає із цього виразу, для еліптичних орбіт радіальна швидкість може бути позитивною (КА віддаляється від центра Землі), негативною (КА наближається) або рівною нулю (КА перебуває в апогеї або перигеї).

Максимального значення модуль радіальної швидкості досягає у точках P_I та P'_I (див. рис. 3.4), тобто при $\sin \vartheta(t) = \pm 1$ або $\vartheta_I = 90^\circ$ і $\vartheta'_I = 270^\circ$. Для колових орбіт ($e = 0$) завжди виконується умова $V_r = 0$.

Трансверсальною складовою $\bar{V}_\perp = \bar{V}_\perp(t)$ називається проекція вектора лінійної швидкості КА на лінію місцевого горизонту (перпендикуляр до радіального напрямку). Вона завжди більше нуля, характеризує швидкість поступального переміщення кінця радіуса-вектора під час руху КА і обчислюється як [26]

$$V_\perp(t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} [1 + e \cos \vartheta(t)] = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E(t)}. \quad (3.63)$$

Для еліптичних орбіт в апогеї і перигеї трансверсальна швидкість рівняється лінійній швидкості КА в цих же точках. Для колових орбіт (при $e = 0$) завжди виконуються такі умови:

$$V_r = 0; \quad V_\perp = V = \text{const}.$$

Як видно із рис. 3.7, на еліптичних орбітах для будь-якого моменту часу є справедливими такі співвідношення:

$$V_r = V \sin \theta; \quad (3.64)$$

$$V_{\perp} = V \cos \theta; \quad (3.65)$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_{\perp}^2}.$$

У цих формулах $\theta = \theta(t)$ – кут **місцевого горизонту** – поточний кут нахилу вектора лінійної швидкості до місцевого горизонту, відлічуваний за годинниковою стрілкою.

Як випливає із формул (3.64) і (3.65), для поточних значень цього кута справедливі такі співвідношення:

$$\theta = \arcsin(V_r / V) = \arccos(V_{\perp} / V) = \arctg(V_r / V_{\perp}). \quad (3.66)$$

Крім того, неважко помітити, що кут місцевого горизонту може приймати позитивні значення (при віддаленні КА від центра Землі), негативні (при наближенні КА), а також нульові в апогеї і перигеї орбіти. Із виразу (3.66) видно також, що для колових орбіт (при $V_r = 0$, $V_r = V = \text{const}$) $\theta(t) = 0$.

3.5.3. Комплексний підхід до опису орбітального руху

З огляду на введені параметри руху поряд з вектором орбітальних параметрів (3.21) $\tilde{R}_0$ можна використовувати й інші вектори, які б комплексно характеризували параметри орбіти і параметри руху КА.

Одним із таких векторів служить, наприклад, вектор (множина) виду

$$\tilde{R}(t) = \{r(t), V(t), \theta(t), u(t), \Omega, i\}. \quad (3.67)$$

Аналіз компонентів даного вектора показує, що він описує як форму і розміри орбіти, так і її положення у власній площині і у просторі, а також рух КА по орбіті.

Іншим прикладом можуть бути розповсюджені у міжнародній практиці так звані *TLE-файли* (*Two-Line Element set* – дворядкові елементи), які для більшості КА, зареєстрованих у каталозі *NORAD/NASA*, можна знайти за адресою:

Ці файли мають такий вигляд:

SICH 2

1 37794U 11044G 11232.77359185 -.00000048 00000-0 00000+0 0 155

2 37794 98.2589 306.2805 0011939 276.5058 83.4778 14.59815940 501

NOAA 17

1 27453U 02032A 08013.48217830 .00000178 00000-0 96164-4 0 7593

2 27453 98.5565 83.4817 0011682 197.1161 163.9628 14.23941486288649

NIGERIASAT 2

1 37789U 11044B 11232.78612574 -.00000046 00000-0 00000+0 0 174

2 37789 98.2570 306.2645 0024799 203.2950 156.7115 14.54544012 506

У загальному випадку *TLE-файли* можна представити так:

Назва КА

1 CCCCCU YY№№№A DDDDD.dddddddd .GGGGGGGG PPPPP-P QQQQQ-Q 0 SSSZ

2 CCCCC iii.iiii LLL.LLLL eeeeeee oooooo MMM.MMMM NN.NNNNNNNNOOOOOZ

Розшифровка даних такого файла приведена у табл. 3. 1

Таблица 3.1

Зміст *TLE-файлів*

Символи	Що означає сукупність символів
1	Номер строки <i>TLE-файла</i>
CCCCCU	Порядковий номер КА в каталозі NORAD/NASA
YY	Дві останні цифри року запуску КА на орбіту
№№№	Порядковий номер КА серед решти супутників, запущених на орбіти протягом року YY
A	Номер даного КА серед решти об'єктів, виведених на орбіту даною ракетою-носієм
DDDDDD.dddddddd	Епохальний час D (з дрібною частиною d) на момент проходження КА через ВВ орбіти t_{Ω} .
DD***	Останні дві цифри поточного календарного року
***DDD	Кількість діб від початку поточного календарного року
.ddddddd	Десяткова частина поточної доби (виражає години, хвилини, секунди і долі секунди)
.GGGGGGGGG	Перша похідна за часом від середньодобового руху КА або балістичний коефіцієнт (залежно від типу даних)
PPPPP-P	Друга похідна за часом від середньодобового руху КА (десяткова крапка не ставиться)
QQQQQ-Q	Параметр, який відображає значення збурювальних факторів орбітального руху
0	Тип представлення орбітальних параметрів
SSS	Номер набору орбітальних параметрів

Z	Контрольна сума всіх цифр першого рядка по модулю 10
2	Номер рядка <i>TLE-файла</i>
CCCCC	Порядковий номер КА в каталозі NORAD/NASA
iii.iii	Нахилення орбіти (град)
LLL.LLLL	Інерціальна довгота ВВ орбіти Ω (град)
eeeeeee	Ексцентриситет орбіти (десятьова крапка не ставиться)
xxxx.xxxxx	Аргумент перигею (град)
MMM.MMMM	Середня аномалія (град) на момент t_{Ω}
NN.NNNNNNNN	Кількість витків за добу (середньодобовий рух КА)
OOOOO	Кількість витків на епоху (номер епохального витка)
Z	Контрольна сума всіх цифр другого рядка по модулю 10

Всі дані для формування *TLE-файлів* вимірюються і фіксуються на момент проходження КА через ВВ орбіти t_{Ω} . Вони періодично оновлюються в мережі Інтернет для більшості КА із каталогу NORAD/NASA.

Як видно із аналізу табл. 3.1, *TLE-файли* для конкретного КА можна представити вектором (множиною)

$$\tilde{R}_{TLE} = \{i, \Omega, e, \omega, M, N, D.d, \Delta\}, \quad (3.68)$$

де $D.d$ – епохальний час для конкретного КА (рік, місяць, число, години, хвилини, секунди і долі секунди на момент проходження КА через ВВ орбіти);

Δ – решта даних із табл. 3.1 (значення першої $G = dN / dt$ та другої $P = d^2N / dt^2$ похідних від середньодобового руху, величина деяких збурювальних факторів Q і т.п.)

Аналогічно, залежно від потреби, можна використовувати і інші компоненти у складі векторів, подібних виразу (3.68). Очевидно, що від елементів вектора (3.68) не складно перейти до елементів векторів (3.21), (3.67) та ін.

3.6. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ОРБІТАЛЬНОГО РУХУ

Знання основних положень теорії орбітального руху КА дозволяють вирішувати ряд прикладних задач КСС, приблизний перелік яких наведено на рис. 3.8.

При цьому прикладні задачі сформульовані з урахуванням особливостей незбуреного, збуреного та керованого видів орбітального руху.

Зокрема, основні положення теорії *незбуреного* орбітального руху, викладені вище, дозволяють вирішувати ряд таких прикладних задач КСС:

- прогнозування орбітального руху КА;
- побудова їхніх трас;
- визначення параметрів орбіт на основі траєкторної інформації (ТІ);
- розрахунок умов видимості наземних об'єктів (НО) з КА для планування сеансів спостережень;

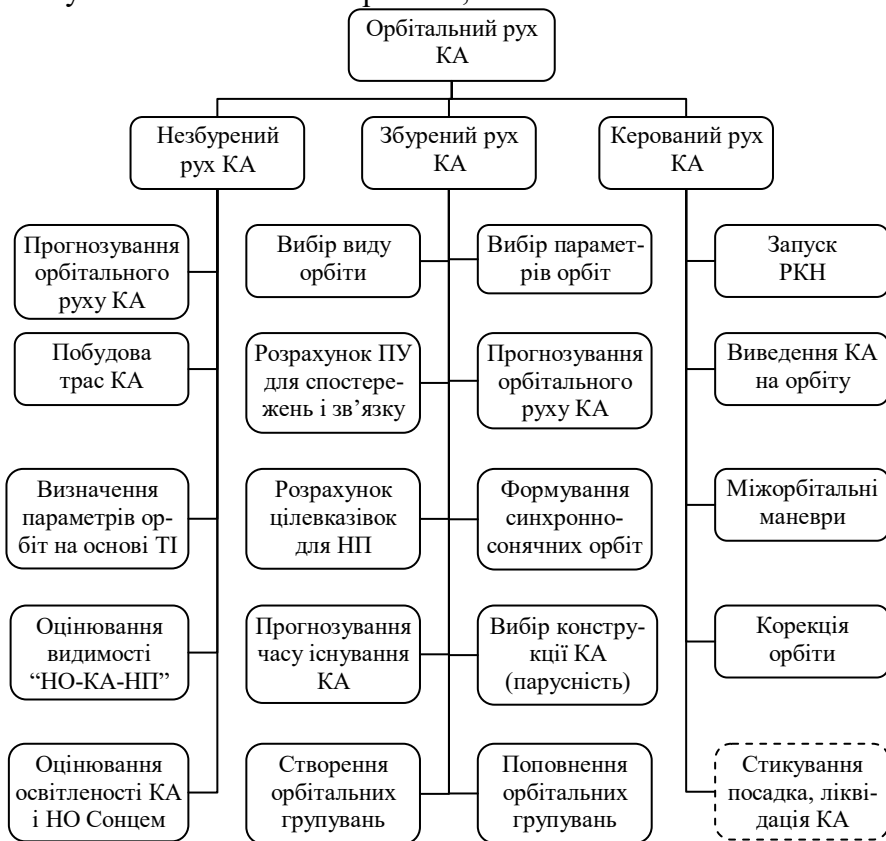


Рис. 3.8. Перелік прикладних задач орбітального руху КА:
ПУ – початкові умови; ТІ – траєкторна інформація; НО – наземні об’єкти;
НП – наземні пункти

розрахунок умов видимості КА з наземних пунктів (НП) для планування сеансів радіозв’язку;

розрахунок умов освітленості КА Сонцем для рішення завдань орієнтації КА, електроживлення бортової апаратури, забезпечення заданого теплового режиму для зовнішніх і внутрішніх елементів КА;

розрахунок умов освітленості НО Сонцем для вибору типу бортової цільової апаратури (БЦА) і організації ОЕСп.

Вирішення перерахованих прикладних задач дозволяє вчасно і гарантовано входити у зв’язок з КА, наводити БЦА на НО, передавати на наземні засоби всі види бортової інформації та ефективно управляти рухом і технічним станом КА із Землі.

Виходячи з цього, розглянемо одну з перерахованих прикладних задач теорії незбуреного орбітального руху КА – задачу прогнозування ідеального положення КА на задані моменти часу (ідеального руху КА).

3.6.1. Прогнозування орбітального руху

Під час прогнозування орбітального руху КА обчислюють його **ефемериди** – значення координат КА в топоцентричній СК, розраховані для *майбутніх* фіксованих моментів часу $t_n + \Delta t$ (рис. 3.9) за умови, що відомі ці координати в деякий момент часу t_n (наприклад, на підставі результатів траєкторних вимірів).

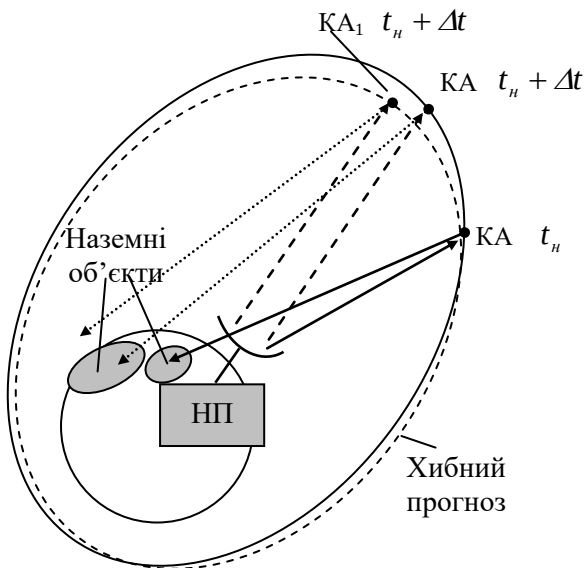


Рис. 3.9. Сутність задачі прогнозування орбітального руху КА

Очевидно, що завдання прогнозування орбітального руху КА можна успішно вирішувати, якщо повністю відомі його закономірності та всі супутні фактори.

У протилежному випадку прогнозування може здійснюватися з похибками.

Знання ефемерид КА забезпечують вирішення в КСС як мінімум чотирьох функціональних завдань:

а) оперативне та довгострокове *планування спостережень* за заданими районами і об'єктами на Землі;

б) своєчасне *керування технічним станом* та режимами роботи бортових систем;

в) завчасне *формування та видачу на борт програм корекції* параметрів орбіти КА;

г) завчасне *формування цілевказівок наземним засобам* для наведення їхніх антен у точку небесної сфери, в якій очікується проходження КА в зазначений момент часу.

Вирішення останнього із завдань забезпечує своєчасне входження у радіозв'язок з КА, можливість проводити траєкторні

вимірювання, упевнено приймати з КА бортову інформацію, успішно видавати на борт КА команди керування та ін.

Початковими даними для розрахунку ефемерид КА є:

вектор орбітальних параметрів (3.21) $\tilde{R}_0$;

геодезичні координати НП B, L і його висота над рівнем моря h ;

передбачуваний момент спостереження t_n за середньосонячним часом із вказівкою дати d_n .

Шуканими величинами є координати КА в ТПССК. Ці координати утворюють вектор (множину) станційних параметрів спостереження (див. розд. 2):

$$\begin{aligned}\tilde{R}_c(t_n) &= \{\tilde{R}_\alpha(t_n), \tilde{R}_\beta(t_n)\}; \\ \tilde{R}_\alpha(t_n) &= \{\alpha(t_n), \beta(t_n), D(t_n)\}; \\ \tilde{R}_\beta(t_n) &= \{\dot{\alpha}(t_n), \dot{\beta}(t_n), \dot{D}(t_n)\}.\end{aligned}$$

Методика прогнозування орбітального руху КА полягає у такому:

1. Знаходять проміжок сонячного часу з моменту проходження КА перигею t_{II} до заданого моменту спостереження t_n в задану дату d_n :

$$\Delta t(t_n) = t_n - t_{II}. \quad (3.69)$$

2. Використовуючи формули (2.24), перераховують знайдене значення Δt в зоряний час:

$$\Delta s(t_n) = q \cdot \Delta t, \quad q = 1,00273791. \quad (3.70)$$

Зауважимо, що перехід до зоряного часу забезпечує більшу точність прогнозування, чим при використанні сонячного часу, що має принципове значення при прогнозуванні орбітального руху КА на великі часові інтервали.

3. З огляду на формулу (3.32) розраховують середній рух КА:

$$n = \sqrt{\mu_0 / a^3}, \quad \mu_0 = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2. \quad (3.71)$$

4. Використовуючи вирази (3.70) і (3.71), за допомогою формули (3.51) обчислюють середню аномалію КА на момент спостереження t_n :

$$M(t_n) = n \cdot \Delta s(t_n). \quad (3.72)$$

5. Із рівняння Кеплера (3.52) методом ітерацій знаходять ексцентричну аномалію на момент спостереження t_n як

$$E_{i+1} = M(t_n) - e \sin E_i; i = \overline{0, I}, \text{ вважаючи } E_0 = M(t_n). \quad (3.73)$$

При цьому для практичних цілей досить прийняти $I = 6$ і, отже, остаточним значенням шуканої ексцентричної аномалії вважати $E(t_n) = E_6$.

6. Використовуючи один із виразів (3.49) і отримане значення ексцентричної аномалії (3.73), знаходять істинну аномалію

$$g(t_n) = 2 \arctg \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \left(\frac{E(t_n)}{2} \right) \right], \quad (3.74)$$

а потім на основі (3.74) з урахуванням (3.53) обчислюють аргумент широти

$$u(t_n) = \omega + g(t_n). \quad (3.75)$$

7. На основі заданих значень елементів вектора $\tilde{R}_0$ і розрахованих значень параметрів (3.74) і (3.75) знаходять вектор положення КА в ІСК на момент t_n . При цьому декартові координати КА та їх похідні обчислюють з урахуванням виразів (3.62) і (3.63) за формулами (3.46) і (3.47).

8. Застосовуючи формули (2.54), (2.35)...(2.37) і отримані значення (3.74), (3.75), перераховують положення КА із ІСК у ГрСК, тобто знаходять компоненти вектора $\tilde{R}_r$.

9. Використовуючи формули (2.58)...(2.63), перераховують вектор $\tilde{R}_r$ у вектор положення КА в ТППСК (2.52), тобто знаходять компоненти вектора $\tilde{R}_T$.

10. Опираючись на вирази (2.64)...(2.69), перераховують координати КА із ТППСК у ТПССК. При цьому одержують шуканий вектор (2.53) $\tilde{R}_c = \{\tilde{R}_\alpha, \tilde{R}_\dot{\alpha}\}$.

За необхідності можна піти і трохи іншим шляхом, наприклад, після п. 5:

6а. Розраховують декартові координати КА в ОрНСК X_ω і Y_ω , використовуючи залежності (3.54).

7а. Перераховують отримані значення в ІСК за допомогою матриці переходу (3.20), а далі переходять до п. 8.

Таким чином, методику прогнозування руху КА можна коротко представити алгоритмом послідовних обчислень:

$$\begin{aligned} \{\tilde{R}_0, B, L, t_n\} &\rightarrow \Delta t \rightarrow \Delta s \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow u \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{R}_H \rightarrow \tilde{R}_\Gamma \rightarrow \tilde{R}_T \rightarrow \tilde{R}_c. \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.6.2. Побудова трас космічних апаратів

Траса КА – це проекція орбіти КА на *обертovu* Землю із вказівкою часу проходження КА окремих пунктів [44, 45, 46]. Інакше кажучи, траса – це геометричне місце множини підсупутникових точок (ПТ).

Підсупутникова точка – це точка K' на земній поверхні (рис. 3.10, а), з якої КА в даний момент часу видно у зеніті. Іншими словами – це точка перетинання поточного радіуса-вектора КА $\vec{r}(t)$ з поверхнею Землі.

Очевидно, що розташування множини ПТ (форма траси) залежить від співвідношення їх лінійних швидкостей відносно *нерухомої* Землі $V_{nm}(t)$ та лінійних швидкостей обертання точок з широтою φ на земній поверхні

$$V_\varphi(t) = \omega_s R_s \cos \varphi \approx const, \quad (3.7)$$

7)

де $\omega_3 = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ – кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі;

$R_3 = 6371 \text{ км}$ – середній радіус Землі.

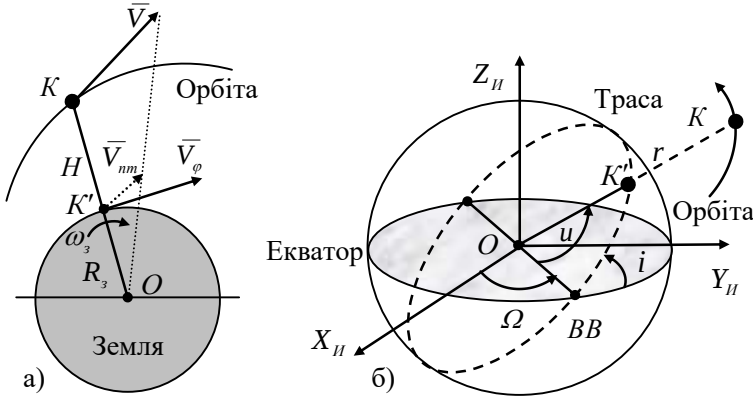


Рис. 3.10. До поняття траси КА

Оскільки за визначенням КА і його ПТ (точки K і K' на рис. 3.10, а) лежать на одній прямій, то вони обертаються навколо центра Землі O з однією і тією ж кутовою швидкістю

$$\omega_* \approx V(t)/[R_3 + H(t)] \approx V_{nm}(t)/R_3, \quad (3.78)$$

де $H(t)$ – поточна висота орбіти КА.

Як видно із (3.78), лінійна швидкість ПТ залежить від лінійної швидкості КА та висоти його орбіти і її величину можна оцінити із формули

$$V_{nm}(t) \approx V(t)R_3/[R_3 + H(t)]. \quad (3.79)$$

В свою чергу, лінійна швидкість КА на основі рівняння орбіти (3.55) із урахуванням виразів (3.53) і (3.56) залежить від розмірів і форми орбіти і поточного положення КА на ній, тобто $V(t) = V[a, e, u(t)]$.

Приклад 3.8. Знайти лінійні швидкості КА і його ПТ, якщо КА знаходиться на коловій орбіті з висотою $H_o = 800 \text{ км}$.

Розв'язання. Для знаходження лінійної швидкості КА скористаємось формулою (3.57). Для цього попередньо знайдемо значення модуля радіуса-вектора КА $r_o = R_z + H_o$. Тоді для заданої орбіти $r_o = 6371 + 800 = 7171 \text{ км}$. Далі із формули (3.57) знайдемо лінійну швидкість КА $V_o = \sqrt{\mu_o / r_o} = \sqrt{398600 / 7171} \approx 7,45 \text{ км/с}$. Для обчислення лінійної швидкості ПТ скористаємось співвідношенням (3.79). Тоді для заданої орбіти $V_{nm} \approx V_o R_z / (R_z + H_o) = 7,45 \cdot 6371 / 7171 \approx 6,6 \text{ км/с}$.

Як бачимо із отриманих результатів, лінійна швидкість ПТ менше лінійної швидкості КА. Ця закономірність має загальний характер, тобто $V_{nm} \leq V$, причому знак рівності може мати місце тільки у гіпотетичному випадку, коли КА знаходиться на поверхні Землі (при $H = 0$).

З урахуванням отриманих результатів для більш глибокого засвоєння поняття траси розглянемо послідовно такі випадки:

1. Гіпотетична ситуація. Земля не обертається навколо своєї осі, тобто її кутова швидкість $\omega_z = 0$, а отже, і лінійна швидкість точок її поверхні $V_\varphi = \omega_z R_z \cos \varphi = 0$. КА рухається по будь-якій орбіті з лінійною швидкістю $\bar{V}(t)$, а його ПТ на підставі (3.79) – з лінійною швидкістю $\bar{V}_{nm}(t) = \bar{V}(t) H(t)$.

У цьому випадку траса КА являтиме собою лінію перетину *нерухомої* площини орбіти і *нерухомої* кулі, а саме – *велике коло* на її поверхні (рис. 3.10, б), яке перетинає площину екватора у точці ВВ з довготою $\lambda_{ee} = \Omega$, і розташоване відносно площини екватора під кутом нахилення орбіти i .

Форма і розташування траси у цьому випадку не залежать від аргументу широти $u = u(t)$ КА, його радіуса-вектора $r = r(t)$, у тому числі і від його лінійної швидкості $V = V(t)$. Від цих параметрів залежить лише відстань між сусідніми ПТ на самій трасі.

2. Реальна ситуація. Земля обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Модуль лінійної

швидкості точок земної поверхні $V_\varphi \neq 0$ (крім полюсів Землі, де $V_\varphi = 0$), а його орієнтація постійна (у східному напрямку). Лінійна швидкість КА $\bar{V}(t)$.

У такому випадку положення ПТ на земній поверхні залежить від співвідношення модулів векторів $\bar{V}_{nm}(t)$ і $\bar{V}_\varphi$, а також від їхньої взаємної орієнтації і визначатиметься *складніше*.

3. Часткові випадки в реальних умовах:

а) $(V_{nm} = V_\varphi) \wedge (i = 0^\circ)$ – траса КА виродиться в одну точку (наприклад, для СТО);

б) $(V_{nm} > V_\varphi) \wedge (0^\circ < i \leq 90^\circ)$ – траса КА формуватиметься у східному напрямку (КА “обганяє” Землю);

в) $(V_{nm} < V_\varphi) \wedge (0^\circ < i \leq 90^\circ)$ – траса КА формуватиметься у західному напрямку (КА “відстає” від Землі).

Отже, траса відображає слід супутника на Землі, а її форма і положення на земній поверхні однозначно залежать від елементів орбіти та параметрів орбітального руху КА.

За допомогою траси можна оцінювати якість виконання КА цільового завдання, а саме:

можливість спостереження за НО із КА в надир;

необхідний кутовий маневр для спостереження за НО поза трасою;

сталість траси (ізотрасовість) КА протягом тривалого часу;

функціональні можливості КА;

моменти проведення корекції орбіти і т.п.

Початковими даними для побудови траси КА служать:

відомий для даного КА вектор орбітальних параметрів $\tilde{R}_0$;

задавані користувачем дата d_* , початковий момент побудови траси t_n , крок дискретизації часу Δt та часова протяжність (довжина, тривалість) траси τ_{mp} ;

зоряний час на Гринвіцькому меридіані в середню північ $S_0 = S_0(d_*)$ у задану дату.

Стосовно часових параметрів користувача зауважимо, що на практиці залежно від завдань КСС задають крок $\Delta t = 1 \dots 10^s$, а протяжність траси – порівнянню з інтервалом оперативного планування цільового застосування КА (у середньосонячних добах) $\tau_{mp} \approx (1 \dots 4) \cdot T_{co}$.

Шуканими величинами є координати ПТ, розраховані для моментів часу $t_j = t_n + j \cdot \Delta t$, $j = 0, 1, 2, \dots$, а саме:

а) геоцентрична широта $\varphi_j = \varphi(t_j)$;

б) геоцентрична довгота $\lambda_j = \lambda(t_j)$.

Методика побудови траси полягає у такому:

1. За початковий момент побудови траси зазвичай приймають всесвітній час t_0 проходження КА ВВ орбіти, тобто приймають $t_n = t_0(\Omega) = t_{0\Omega}$. Це зручний момент, насамперед для колових орбіт, оскільки для них відсутнє поняття перигею, а отже, і параметра t_{Π} . Цим же підходом можна скористатися у випадку еліптичних орбіт, для яких з урахуванням умови $M_{\Pi} = E_{\Pi} = \mathcal{G}_{\Pi} = 0$ справедливо:

$$t_{\Omega} = t_{\Pi} + \Delta t_{\Omega}, \quad (3.80)$$

де $\Delta t_{\Omega} = M_{\Omega}/n = (E_{\Omega} - e \sin E_{\Omega})/n$ – час польоту КА від перигею до ВВ орбіти, розрахований за допомогою рівняння (3.52).

Якщо необхідно будувати трасу в іншій системі відліку, наприклад у київському часі, то використовують відомий зв'язок між всесвітнім і київським часом $t_k = t_0 + 2^h$. Тоді приймають $t_n = t_k(\Omega) = t_{k\Omega}$.

2. За формулами (3.71)...(3.75) знаходять послідовно середній рух n і кутові параметри руху КА $M(t_j)$, $E(t_j)$, $\mathcal{G}(t_j)$, $u(t_j)$.

3. Розраховують у ГцСК широти ряду точок орбіти як

$$\varphi_j = \varphi(t_j) = \arcsin[\sin u(t_j) \cdot \sin i] . \quad (3.81)$$

4. Розраховують у ГцСК довготи цих же точок за виразом

$$\lambda_j = \lambda(t_j) = \Omega - \tilde{S}_0(\Omega) + \Delta\lambda(t_j), \quad (3.82)$$

$$\text{де } \tilde{S}_0(\Omega) = \tilde{S}_0 + \omega_s(t_0 - t_\Omega); \quad \tilde{S}_0 = S_0\omega_s; \quad (3.83)$$

$$\omega_s = 7,29211 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1};$$

$$\Delta\lambda(t_j) = \arctg[\tg u(t_j) \cos i] .$$

У цих формулах:

$\tilde{S}_0$ – зоряний час у *кутовій мірі* на Гринвіцькому меридіані у гринвіцьку північ ($t_0 = 0$);

$\tilde{S}_0(\Omega)$ – зоряний час у *кутовій мірі* на Гринвіцькому меридіані в момент знаходження КА у ВВ орбіти t_Ω ;

t_j – поточний час польоту КА, відлічуваний від моменту t_Ω ;

$\Delta\lambda(t_j)$ – поточні зміни довготи ПТ.

За необхідності геоцентричні координати ПТ можна одержати *інакше*. Наприклад:

За. Знаходять широту $\varphi_H(t_j)$ і довготу $\lambda_H(t_j)$ ПТ точок в ІСК:

$$\sin \varphi_H(t_j) = \sin i \cdot \sin u(t_j);$$

$$\sin \lambda_H(t_j) = [\sin \Omega \cos u(t_j) + \cos \Omega \cos i \sin u(t_j)] \sec \varphi_H(t_j); \quad (3.84)$$

$$\cos \lambda_H(t_j) = [\cos \Omega \cos u(t_j) - \sin \Omega \cos i \sin u(t_j)] \sec \varphi_H(t_j).$$

4а. Перераховують отримані значення широти і довготи ПТ у ГрСК за правилами:

$$\varphi_r(t_j) = \varphi_H(t_j);$$

$$\lambda_r(t_j) = \lambda_H(t_j) - \omega_s[S_0(\Omega) - S_0] . \quad (3.85)$$

Крім того, можна застосувати *ще один шлях*:

3б. Використовуючи задані значення елементів вектора $\tilde{R}_0$ і розраховані значення аргументу широти $u_j = u(t_j)$, знаходять вектор положення КА в ІСК для моментів t_j $\tilde{R}_{Hj} = \{\bar{r}_{Hj}, \bar{V}_{Hj}\}$. При

цьому декартові координати КА і їх похідні обчислюють з урахуванням виразів (3.62) і (3.63) за формулами (3.46) і (3.47).

46. Застосовуючи залежності (2.54), (2.46), (2.47) і отримані значення $\tilde{R}_{ij} = \{\bar{r}_{ij}, \bar{V}_{ij}\}$, перераховують положення КА із ІСК у ГрСК, тобто знаходять компоненти вектора $\tilde{R}_{ij} = \{\bar{r}_{ij}, \bar{V}_{ij}\}$.

56. Розраховують геоцентричні координати ПТ як

$$\begin{aligned}\varphi_j &= \arcsin(Z_{ij}/r_{ij}); \\ \lambda_j &= \arccos(X_{ij}/\sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2}).\end{aligned}\quad (3.86)$$

5. Знайдені координати ПТ наносять із вказівкою часу на карту або глобус і з'єднують їх для наочності плавною лінією.

Приклади трас КА та їх особливості. Приблизний вид траси КА, що рухається по низькій коловій орбіті з нахиленням $i = 65^\circ$, показаний на рис. 3.11. При цьому початки першого і другого витків позначені буквами A і B .

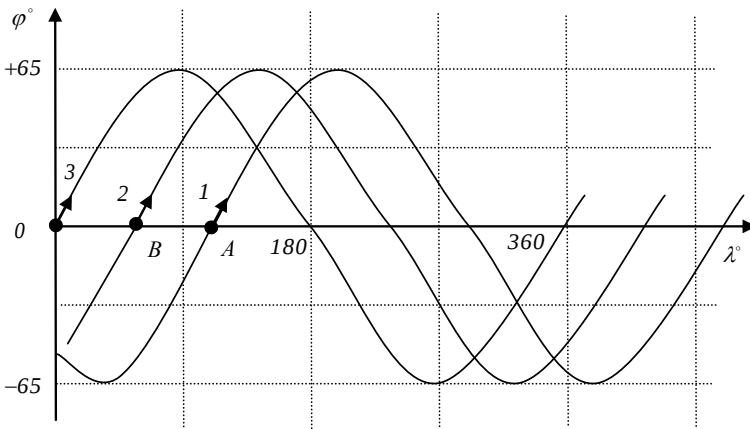


Рис. 3.11. Приблизний вид траси КА на низькій коловій орбіті
Кутова відстань між початками двох сусідніх витків називається міжвитковою відстанню

$$\Delta\lambda_{me} = 2\pi T / T_{30} = \omega_3 T. \quad (3.87)$$

Ціла частина відношення (символ $\langle \rangle$)

$$\langle 2\pi / \Delta\lambda_{\text{мв}} \rangle = \langle T_{\text{зод}} / T \rangle = \kappa \quad (3.88)$$

являє собою кількість повних обертів КА за зоряну добу.

Кутова відстань по довготі між початком першого витка, який для прикладу приймемо за початок відліку зоряної доби, і початком першого витка в наступну зоряну добу називається *добовим зсувом траси*.

Якщо відношення $T_{\text{зод}}/T = l/m$, де l і m – деякі взаємно прості цілі числа, то КА повернеться у початкову точку на екваторі через l обертів навколо Землі після закінчення m зоряних діб. Інакше кажучи, через m зоряних діб траса КА повториться.

Якщо відношення $T_{\text{зод}}/T$ являє собою ірраціональне число, то траса не повторюється. При цьому КА пройде над всіма точками земної поверхні, розташованими в інтервалі широт $-i \leq \varphi \leq i$ при $0 \leq i \leq 0,5\pi$ та $-(\pi - i) \leq \varphi \leq \pi - i$ при $0,5\pi < i \leq \pi$.

Приклад 3.9. Знайти кількість повних витків орбіти за добу і міжвиткову відстань для КА, який знаходиться на орбіті з висотою апогею $H_A = 800$ км і перигею $H_P = 600$ км.

Розв’язання. Скористаємось результатами, отриманими у прикладі 3.2, де знайдено значення великої півосі $a = 0,5(H_A + H_P + 2R_z) = 7071$ км та сидеричний період обертання КА $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu_0} \approx 98,6^m \approx 5917^s$. Далі за формулою (3.87) знайдемо $\Delta\lambda_{\text{мв}} = 2\pi T/T_{\text{зод}} = 2\pi \cdot 5917/86164^s \approx 0,4315 \approx 24,7^\circ$, а за формулою (3.88) $\kappa = \langle T_{\text{зод}}/T \rangle = \langle 86164/5917 \rangle \approx \langle 14,56 \rangle = 14$.

Представляє практичний інтерес довгота ВВ $\lambda_\Omega(\kappa)$ і час $t_\Omega(\kappa)$ “прибуття” ПТ у висхідний вузол орбіти після κ обертів КА навколо Землі.

Очевидно, що для розрахунку цього часу можна скористатись співвідношенням

$$t_\Omega(\kappa) = t_\Omega(1) + T \cdot \kappa, \quad (3.89)$$

де $t_{\Omega}(1)$ – час початку першого витка.

Для визначення довготи ВВ скористаємось співвідношенням (3.82). Із нього знайдемо

$$\lambda_{\Omega}(\kappa) = \Omega - \tilde{S}_0(\kappa), \quad 0 \leq \tilde{S}_0(\kappa) \leq 2\pi, \quad (3.90)$$

де $\tilde{S}_0(\kappa)$ – зоряний час у кутовій мірі на Гринвіцькому меридіані в момент $t_{\Omega}(\kappa)$.

Інший приклад траси КА показаний на рис. 3.12. На ньому зображена копія екрана програмного комплексу *Orbitron* з відображенням реальної астрономо-балістичної ситуації 21 березня 2011 р. на момент київського часу $t_{\kappa} = 14^h 51^m 07^s$ для НП в м. Житомирі та трьох суміжних витків КА на сонячно-синхронній орбіті *Ikonos-2*.



Рис. 3.12. Вид траси КА *Ikonos-2*

Зауважимо принагідно, що на рис. 3.12 наочно відображена ситуація в день весняного рівнодення, коли Сонце пересікає екватор, внаслідок чого практично на всіх широтах тривалість дня і ночі однакова. При цьому границя між освітленою і нічною ча-

стинами земної кулі (термінатор) нагадує вид меандрів (різнополярних прямокутних відеоімпульсів однакової тривалості).

Таким чином, знання елементів орбіт і параметрів руху КА, а також відповідних систем координат механіки космічних польотів дозволяє прогнозувати орбітальний рух КА і будувати його траси, що має важливе прикладне значення. Отримані результати необхідно уточнювати з урахуванням реальних факторів, що впливають на орбітальний рух КА.

Крім того, поряд з розрахунком ефемерид і побудовою трас КА можна вирішувати і ряд інших практичних завдань, окремі з яких розглянуті нижче.

3.6.3. Визначення параметрів орбіти за результатами траєкторних вимірів

Задачі визначення параметрів орбіт КА необхідно вирішувати під час виводу КА на орбіту, для отримання фактичного ПЧП КА при організації спостережень, під час планування корекцій орбіт, після маневру КА, для виявлення невідомих КА і т.п.

Дотепер нами припускалось, що елементи вектора КА $\tilde{R}_0 = (a, e, i, \omega, \Omega, t_{II})$ або похідні від них елементи (висота орбіти H , період обертання T і т.п.) є відомими. На їхній основі ми вирішували завдання прогнозування руху КА, побудови їхніх трас і т.д. Насправді ж значення цих параметрів потрібно регулярно вимірювати, а отримані результати – уточнювати.

Наприклад, після виводу КА на орбіту його фактичне ПЧП може істотно відрізнятися від розрахункового через неминучі похибки програми запуску.

Крім того, параметри реальних орбіт безупинно змінюються внаслідок впливу на рух КА цілого ряду збурювальних факторів (див. розд. 4). Це ж відбувається під час корекції орбіт, під час міжорбітальних маневрів КА (див. розд. 5).

Особливе значення має точне знання фактичного ПЧП під час організації спостережень за невеликими об'єктами, коли необхідно здійснювати високоточну “прив'язку” Ці до одержува-

ного зображення цих об'єктів. У зв'язку з цим необхідно періодично вимірювати і уточнювати параметри орбіт КА.

Очевидно, що для визначення шести елементів вектора $\tilde{R}_0$ потрібно мати як мінімум *шість* незалежних вимірів параметрів руху КА у деякій СК.

За таку систему координат зручно прийняти ТПССК і результати вимірів у ній векторів станційних параметрів (2.53)

$$\tilde{R}_c = \{\tilde{R}_\alpha, \tilde{R}_\beta\};$$

$$\tilde{R}_\alpha = \{\alpha, \beta, D\};$$

$$\tilde{R}_\beta = \{\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{D}\},$$

віднесених до деякого моменту часу t .

Ці виміри здійснюються наземним комплексом управління (НКУ) КСС.

Таким чином, якщо при прогнозуванні руху КА ставилося завдання знайти *наперед* положення КА у майбутні моменти часу і на цій основі *розрахувати* цілевказівки для наведення наземних антен у задані точки космічного простору ($\tilde{R}_0 \rightarrow \tilde{R}_c$), то тепер ставиться зворотнє завдання: на основі обмірюваних станційних параметрів *розрахувати* елементи вектора $\tilde{R}_0$, ($\tilde{R}_c \rightarrow \tilde{R}_0$).

Методика вирішення цього завдання полягає у такому:

1. Перераховують топоцентричні сферичні координати КА із ТПССК у його прямокутні координати в ТППСК:

$$\tilde{R}_\alpha = \{\alpha, \beta, D\} \rightarrow \bar{R}_T = [X_T, Y_T, Z_T]^T.$$

При цьому використовують залежності:

$$X_T = D \cos \alpha \cos \beta; Y_T = D \sin \beta; Z_T = D \cos \beta \sin \alpha. \quad (3.9)$$

2. Перераховують похідні від топоцентричних сферичних координат КА із ТПССК у лінійні швидкості КА в ТППСК:

$$\tilde{R}_\beta = \{\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{D}\} \rightarrow \bar{V}_T = [V_{xT}, V_{yT}, V_{zT}]^T.$$

У результаті одержують узагальнений вектор просторово-часового положення КА в ТППСК $\tilde{R}_T = \{\bar{R}_T, \bar{V}_T\}$.

3. Перераховують отримані значення із ТППСК у ГрСК, а потім в ІСК:

$$\tilde{R}_T = \{\bar{R}_T, \bar{V}_T\} \rightarrow \tilde{R}_\Gamma = \{\bar{R}_\Gamma, \bar{V}_\Gamma\} \rightarrow \tilde{R}_H = \{\bar{R}_H, \bar{V}_H\}.$$

4. Знаходять елементи вектора $\tilde{R}_0 = (a, e, i, \omega, \Omega, t_H)$.

Наприклад, із формули для лінійної швидкості КА (3.56) можна обчислити велику піввісь орбіти

$$a = \mu_0 r / (2\mu_0 - V^2 r), \quad (3.92)$$

де $r = \sqrt{X_H^2 + Y_H^2 + Z_H^2}$; $V = \sqrt{V_{xH}^2 + V_{yH}^2 + V_{zH}^2}$.

Далі, використовуючи результат (3.92), можна знайти значення ексцентриситету орбіти

$$e = \sqrt{1 - p/a}, \quad (3.93)$$

де $p = C^2 / \mu_0$;

C – модуль інтеграла площ (див. підр. 3.2).

На основі інтеграла площ і його елементів можна визначити нахилення орбіти

$$i = \arccos(C_3 / C), \quad (3.94)$$

а також інерціальну довготу ВВ

$$\begin{aligned} \Omega &= \arccos(C_2 / C \sin i) \text{ або} \\ \Omega &= \arcsin(C_1 / C \sin i). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Далі із виразу (3.53) знаходять аргумент перигею

$$\omega = u - \vartheta. \quad (3.96)$$

Для цього розраховують істинну аномалію за формулами:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arcsin \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} \vartheta; \\ \cos \vartheta &= (p - r) / er. \end{aligned}$$

Значення аргументу широти можна визначити із системи рівнянь:

$$\begin{aligned} u &= \arcsin(Z_H / r \sin i); \\ u &= \arccos[(X_H \cos \Omega + Y_H \sin \Omega) / r]. \end{aligned}$$

І, нарешті, на основі рівняння Кеплера (3.52) з використанням формули (3.74) знаходять момент проходження КА через перигей орбіти

$$t_{\pi} = [(E - e \sin E)/n] - t. \quad (3.97)$$

Як бачимо, на основі виразів (3.91)...(3.97) всі елементи вектора $\tilde{R}_0$ знайдені, а отже, завдання визначення параметрів орбіти за результатами станційних вимірів принципово вирішене.

На практиці можуть застосовуватися і інші підходи та методи визначення параметрів орбіт. Вони складають основу так званого балістико-навігаційного забезпечення космічних польотів та спостережень і вивчаються окремо.

3.6.4. Умови видимості наземних об'єктів із космічних апаратів

Під умовами видимості будемо розуміти таке взаємне розташування КА і наземних об'єктів, коли між ними є *геометрична і фізична* видимість [38, 40, 62].

Під *наземними об'єктами* (НО) розумітимемо ділянки (райони) земної поверхні або окремі об'єкти на ній, які задані для спостереження (обслуговування) з КА.

Геометричну видимість можна забезпечити, якщо на прямій лінії між КА і НО відсутні інші об'єкти, наприклад, частина земної поверхні.

Фізична видимість забезпечує можливість сприйняття і реєстрації в БЦА *фізичних* сигналів ЦІ. При цьому фізичними сигналами в завданнях спостереження об'єктів із космосу служить їхнє ЕМВ оптичного або радіодіапазону.

У зв'язку з цим можна говорити про фізичну видимість в оптичному діапазоні або в радіодіапазоні, а з урахуванням геометричної видимості – у цілому про умови оптичної або радіовидимості НО.

Умови **оптичної видимості** мають принципове значення для КА ОЕСп і визначаються наявністю геометричної видимості між

КА і НО, рівнем освітленості НО Сонцем і рівнем прозорості атмосфери над ним.

Умови **радіовидимості** мають принципове значення для КА РЛСп, а також для КА інших типів, оскільки в радіодіапазоні здійснюється передача ЦІ на Землю.

У будь-якому випадку ці умови визначаються наявністю геометричної видимості між КА і НО, між КА і НП, а також енергетичним потенціалом радіоліній.

Залежно від умов оптичної і радіовидимості для спостереження за даним НО планується той або інший виток орбіти КА.

Крім того, залежно від умов радіовидимості плануються до застосування відповідні бортові засоби, режими спостереження і передачі ЦІ.

Аналіз умов за допомогою логічних функцій. Формально наявність або відсутність *оптичної видимості* m -го НО з КА на n -му витку орбіти можна визначати через імпульсні функції геометричної видимості $\Phi_m^r(n)$, освітленості НО $\Phi_m^E(n)$ і прозорості атмосфери $\Phi_m^A(n)$ за допомогою логічної функції оптичної видимості [38, 40, 62]

$$\Phi_m^F(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_m^r(n) \wedge \Phi_m^E(n) \wedge \Phi_m^A(n) = 1; \\ 0, & \text{якщо } \Phi_m^r(n) \wedge \Phi_m^E(n) \wedge \Phi_m^A(n) = 0. \end{cases} \quad (3.98)$$

Примітка. Операція логічного добутку (кон'юнкції) $\wedge$ декількох функцій є не що інше, як вибір *мінімальної* з них [62] за правилом $A \wedge B = \min(A, B)$. Операція логічного додавання (диз'юнкції) $\vee$ цих змінних забезпечує вибір *максимальної* з них за правилом $A \vee B = \max(A, B)$.

Виходячи з цього, у табл. 3.2 наведений алгоритм знаходження логічних функцій, коли використовується двозначна логіка $\{0,1\}$ або багатозначна $\{0;0,25;0,5;0,75;1\}$ та операції кон'юнкції або диз'юнкції над змінними A , B і C , Цей алгоритм дає можливість зрозуміти смисл логічних функцій, подібних до (3.98).

Таблиця 3.2

Алгоритм знаходження логічних функцій

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$		A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$A \vee B \vee C$
1	1	1	1		1	1	1	1	1

0	1	0	1		0	1	1	0	1
1	0	0	1		0	0	1	0	1
0	0	0	0		1	0	0	0	1
0,5	0	0	0,5		1	0	1	0	1
0,5	1	0,5	1		1	1	0	0	1
0,25	0,75	0,25	0,75		0	1	0	0	1
0,25	0,25	0,25	0,25		0	0	0	0	0

Наявність *геометричної видимості* у виразі (3.98) означає, що КА перебуває над заданим НО (траса орбіти перетинає НО), поле зору БЦА повністю або частково “накриває” цей НО і є принципова можливість вести за ним спостереження.

Отже, функцію геометричної видимості $\Phi_m^{\Gamma}(n)$ можна задати, наприклад, за таким правилом:

$$\Phi_m^{\Gamma}(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } K_m(n) > 0; \\ 0, & \text{якщо } K_m(n) = 0, \end{cases} \quad (3.99)$$

де $K_m(n)$ – просторовий коефіцієнт накриття, який кількісно виражає частку площі m -го НО, контрольовану КА на n -му витку орбіти.

Очевидно, що для забезпечення геометричної видимості заданого НО з даного КА необхідно, щоб виконувалися такі умови (рис. 3.13):

- а) траса КА проходить поблизу цього НО;
- б) геоцентричні координати КА φ_K, λ_K і НО φ_O, λ_O приблизно збігаються;
- в) КА може здійснювати кутовий маневр, наприклад, відвертати поле зору БЦА або всього КА поперек траси (по крену);
- д) розміри поля зору КА порівнянні з розмірами НО.

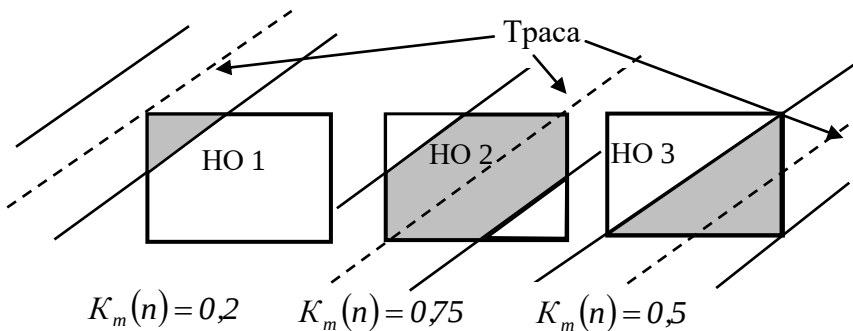


Рис. 3.13. До визначення просторового коефіцієнта накриття

Як видно із рис. 3.13, функцію геометричної видимості (3.99) можна задати і детальніше, використовуючи багатозначну логіку (див. табл. 3.2), наприклад, за правилом:

$$\Phi_m^r(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } K_m(n) > 0,75; \\ 0,5 & \text{якщо } 0,25 \leq K_m(n) \leq 0,75; \\ 0, & \text{якщо } K_m(n) < 0,25. \end{cases} \quad (3.100)$$

Аналогічно з функцією (3.99) можна задати і *функції освітленості* НО $\Phi_m^E(n)$ та *прозорості атмосфери* $\Phi_m^A(n)$:

$$\Phi_m^E(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } E_s^m(n) \geq E^\circ; \\ 0, & \text{якщо } E_s^m(n) < E^\circ; \end{cases} \quad (3.101)$$

$$\Phi_m^A(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_\xi^m(n) \geq A^\circ; \\ 0, & \text{якщо } A_\xi^m(n) < A^\circ, \end{cases} \quad (3.102)$$

де $E_s^m(n)$, $A_\xi^m(n)$ – фактичні (або очікувані) значення освітленості m -го НО і прозорості атмосфери над ним відповідно при його контролі КА на n -му витку орбіти;

s і ξ – індекси, що означають пору року та час доби, до яких відносяться значення освітленості і прозорості відповідно;

E° і A° – мінімально допустимі значення освітленості НО і прозорості атмосфери відповідно, при яких можливе спостереження за НО із заданими показниками якості зображень.

На практиці [65] для цілей планування спостережень достатньо замість величини освітленості НО $E_s^m(n)$ розраховувати кут місця Сонця $\beta_s^m(n)$, який однозначно визначає функцію освітленості $E_s^m(n) = f[\beta_s^m(n)]$.

Наприклад, у явному вигляді зв'язок між освітленістю E деякої поверхні і кутом падіння сонячних променів на неї β можна задати формулою

$$E(\beta) = E_0 \sin \beta,$$

де E_0 – максимальне значення освітленості (при перпендикулярному падінні сонячних променів на цю ж поверхню).

В такому разі залежність (3.101) можна подати у вигляді *функції кута місця Сонця*

$$\Phi_m^\beta(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_s^m(n) \geq \beta^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \beta_s^m(n) < \beta^\circ, \end{cases} \quad (3.103)$$

де β° – мінімально допустимий кут місця Сонця, при якому забезпечується прийнятна освітленість НО E° .

При цьому для практичних розрахунків можна скористатись дискретною шкалою значень кута $\beta_s^m(n)$ залежно від пори року та часу доби, наприклад, $\beta_1^m(n)$ – зима, $\beta_2^m(n)$ – весна, $\beta_3^m(n)$ – літо, $\beta_{31}^m(n)$ – ніч влітку, $\beta_{32}^m(n)$ – ранок влітку і т.д.

Аналогічно із виразом (3.103) для практичних потреб можна модифікувати і функцію (3.102), перейшовши від поняття “прозорості” до поняття “непрозорості” атмосфери (рівня хмарності).

Для цього можна застосувати *функцію хмарності* у вигляді:

$$\Phi_m^Q(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Q_\varepsilon^m(n) \leq Q^\circ; \\ 0, & \text{якщо } Q_\varepsilon^m(n) > Q^\circ, \end{cases} \quad (3.104)$$

де $Q_{\xi}^m(n)$ – прогнозована площа хмарності над m -м НО для n -го витка орбіти;

$Q^{\circ} = \zeta_{\gamma}^m Q_m$ – допустима для γ -го замовника площа хмарності над m -м НО;

$0 \leq \zeta_{\gamma}^m \leq 1$ – допустимий для γ -го замовника коефіцієнт хмарності над m -м НО.

Тоді з урахуванням виразів (3.99)...(3.104), функцію *оптичної видимості* (3.98) можна остаточно записати у вигляді:

$$\Phi_m^F(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (K_m(n) > 0) \wedge (\beta_s^m(n) \geq \beta^{\circ}) \wedge (Q_{\xi}^m(n) \leq Q^{\circ}) = 1; \\ 0, & \text{якщо } (K_m(n) > 0) \wedge (\beta_s^m(n) \geq \beta^{\circ}) \wedge (Q_{\xi}^m(n) \leq Q^{\circ}) = 0. \end{cases}$$

Подібним чином можна формалізувати процеси і для радіодіапазону.

Аналіз умов на основі геометричних уявлень і аналітичних розрахунків. Очевидно, що геометрична видимість між КА і НО є необхідною, але не завжди достатньою умовою для досягнення поставлених цілей.

У свою чергу, необхідними критеріями для самої геометричної видимості можуть служити умови, коли заданий НО попадає безпосередньо в зону огляду КА або накривається його смугою огляду чи смугою захвату.

Під **зоною огляду** КА розумітимемо [34, 44, 47, 66] частину простору, обмежену відносно *нерухомого* КА по дальності поверхнею Землі, а по кутах – його кутовим полем зору (рис. 3.14, а).

Зона огляду зазвичай має конусоїдальну або пірамідальну форму із плоскою або випуклою основою залежно від розмірів спостережуваної площі Землі.

У першому випадку кутове поле зору можна характеризувати кутом χ (рис. 3.14, б) при вершині конуса, у другому – двома кутами α_s і β_s в азимутальній і кутомісній площинах відповідно (рис. 3.14, в).

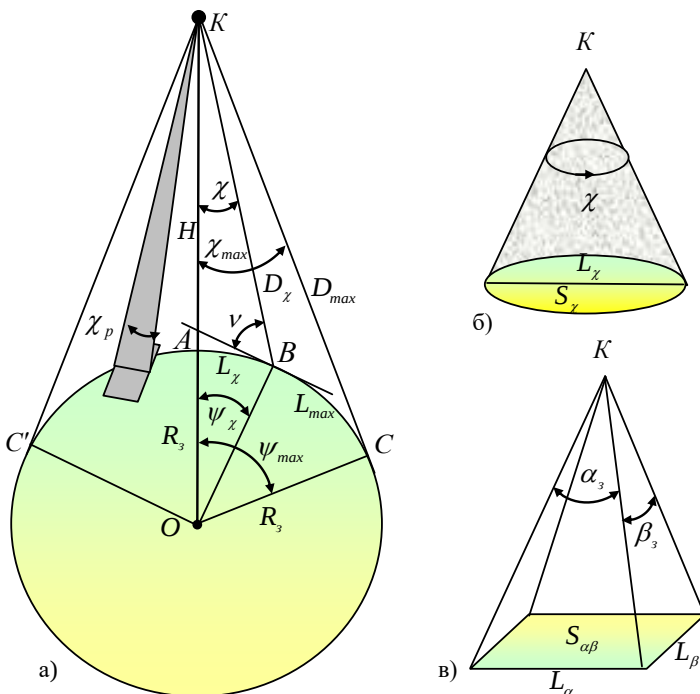


Рис. 3.14. Зона огляду КА на поверхні Землі

Конусоїдальна зона огляду. У цьому випадку максимальне значення кута χ_{max} характеризує граничні геометричні можливості спостереження за поверхнею Землі із висоти H . Граничний кут $\psi_{max} = 0,5\pi - \chi_{max}$ знаходиться із прямокутного трикутника ΔOCK як

$$\psi_{max} = \arccos[R_3 / (R_3 + H)], \quad (3.105)$$

що дозволяє знайти *максимально* можливий лінійний розмір зони огляду на поверхні Землі у вигляді

$$2L_{max} = CC' = 2R_3\psi_{max} = 2R_3(0,5\pi - \chi_{max}). \quad (3.106)$$

У загальному ж випадку лінійний розмір зони огляду на поверхні Землі можна характеризувати центральним кутом $\psi_\chi \leq \psi_{max}$ або довжиною дуги на земній поверхні

$$2L_\chi = 2AB = 2\psi_\chi R_3 \leq 2L_{max}. \quad (3.107)$$

При цьому для знаходження зв'язку між лінійним розміром зони огляду, висотою орбіти і параметрами поля зору КА скористаємось відомою теоремою синусів [15], на основі якої із ΔOVK (див. рис. 3.14, а) можна записати

$$\frac{R_3}{\sin \chi} = \frac{R_3 + H}{\sin(0,5\pi + \nu)} = \frac{R_3 + H}{\cos \nu}, \quad (3.108)$$

звідки знайдемо

$$\nu = \arccos\left(\frac{R_3 + H}{R_3} \sin \chi\right). \quad (3.109)$$

Використовуючи отримане за формулою (3.109) значення допоміжного кута ν , із ΔOVK можна знайти величину центрального кута

$$\psi_\chi = 0,5\pi - \chi - \nu,$$

а далі за формулою (3.107) розрахувати лінійний розмір зони огляду на земній поверхні $2L_\chi$.

Якщо необхідно знайти площу земної поверхні, яку накриває конусоїдальна зона огляду, то можна з урахуванням (3.107) скористатись очевидною формулою

$$S_\chi \approx \pi L_\chi^2, \quad (3.110)$$

де знак приблизної рівності $\approx$ враховує сферичність спостережуваної поверхні.

Приклад 3.10. Знайти максимально можливий лінійний розмір зони огляду КА, який знаходиться на висоті: а) $H_1 = 800$ км; б) $H_2 = 36000$ км.

Розв'язання. Скориставшись формулою (3.105), знайдемо

$$\psi_{\max 1} = \arccos[R_3 / (R_3 + H_1)] = \arccos[6371 / 6371 + 800] \approx 27,3^\circ \approx 0,48;$$

$$\psi_{\max 2} = \arccos[R_3 / (R_3 + H_2)] = \arccos[6371 / 6371 + 36000] \approx 81,35^\circ \approx 1,42.$$

Далі із виразу (3.106) $2L_{\max 1} = 2R_3 \psi_{\max 1} = 2 \cdot 6371 \cdot 0,48 \approx 6116$ км;
 $2L_{\max 2} = 2R_3 \psi_{\max 2} = 2 \cdot 6371 \cdot 1,42 \approx 18093$ км. Отримані результати мають практичне значення, оскільки дозволяють оцінити потенціальні можливості щодо організації спостереження за НО з КА залежно від його висоти.

Із трикутника $\triangle OCK$ (див. рис. 3.14, а) можна також знайти *максимальну* дальність між КА і точкою земної поверхні в межах зони огляду

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \sqrt{(R_3 + H)^2 - R_3^2} = \sqrt{2R_3H + H^2} = \\ &= (R_3 + H) \sin \psi_{\max} = (R_3 + H) \cos \chi_{\max}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Величина $D_{\max}$ характеризує необхідну *максимальну* дальність дії КА, наприклад, дальність спостереження за НО, дальність радіозв'язку з НП і т.п.

У загальному ж випадку необхідну дальність дії КА $D_\chi < D_{\max}$ можна розрахувати на основі формул (3.108) і (3.109) як

$$D_\chi = R_3 \sin \psi / \sin \chi = (R_3 + H) \sin \psi / \cos \nu. \quad (3.112)$$

Приклад 3.11. Знайти необхідну максимальну дальність дії КА, який знаходиться на висоті: а) $H_1 = 800$ км; б) $H_2 = 36000$ км.

Розв'язання. Скориставшись формулою (3.111), знайдемо для низької орбіти $D_{\max 1} = \sqrt{2R_3H_1 + H_1^2} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 800 + 800^2} \approx 3291$ км. Для високої орбіти $D_{\max 2} = \sqrt{2R_3H_2 + H_2^2} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 36000 + 36000^2} \approx 41889$ км.

Отримані результати мають практичне значення, оскільки дозволяють, наприклад, оцінити необхідний потенціал радіоліній “борт-Земля” для передачі бортової інформації на наземні засоби залежно від висоти КА.

Пірамідальна зона огляду. Особливістю такої форми зони огляду (див. рис. 3.14, в) є те, що відповідні розрахунки необхідно проводити окремо для азимутальної і кутомісної площин.

Наприклад, лінійні розміри такої зони на земній поверхні можна обчислити за очевидними формулами:

$$L_\alpha \approx \alpha_3 H; \quad L_\beta \approx \beta_3 H, \quad (3.113)$$

а площу земної поверхні, яку накриває пірамідальна зона, знайти як

$$S_{\alpha\beta} \approx L_\alpha \times L_\beta. \quad (3.114)$$

Приклад 3.12. Знайти площу земної поверхні, яку може миттєво зняти КА, що знаходиться на висоті $H = 800 \text{ км}$, якщо на ньому установлена БЦА з пірамідальною зону огляду з кутовими параметрами $\alpha_z = 5^\circ$, $\beta_z = 1^\circ$.

Розв'язання. Скористаємось формулами (3.113), зважаючи на те, що кутові параметри α_z і β_z треба попередньо виразити в радіанній мірі. Тоді отримаємо $\alpha_z = 5^\circ \pi / 180^\circ \approx 0,087$; $\beta_z = 1^\circ \pi / 180^\circ \approx 0,017$. а далі знайдемо $L_\alpha \approx \alpha_z H \approx 0,087 \cdot 800 \approx 70 \text{ км}$; $L_\beta \approx \beta_z H \approx 0,017 \cdot 800 \approx 14 \text{ км}$. Далі із формули (3.114) отримаємо $S_{\alpha\beta} \approx L_\alpha \times L_\beta \approx 70 \cdot 14 \approx 980 \text{ км}^2$.

Зауважимо, що на основі викладеного при відомому кутовому розрізненні БЦА χ_p (див. рис. 3.14, а) можна також розрахувати і *роздільну здатність* БЦА на Землі як мінімальну відстань між двома НО, які спостерігаються з КА роздільно, $\Delta L_p = f(H, \chi_p)$.

У реальних умовах при визначенні умов видимості НО з КА необхідно враховувати як поступальний (безперервний), так і обертальний (не завжди обов'язковий) рух КА.

За рахунок *тільки поступального (орбітального) руху КА* формується смуга огляду КА.

При цьому під *смугою огляду* КА розуміють [34] частину поверхні Землі, що накривається проекцією його зони огляду на Землю на деякому інтервалі часу за рахунок орбітального руху КА при його фіксованому кутовому положенні. Інакше кажучи, це слід поля зору КА на Землі.

Смуга огляду характеризується шириною і середньою лінією – трасою КА. Тому вона повторює основні властивості траси: нахилення, міжвитковий зсув, синхронність.

Очевидно, що за час спостереження Δt_c при орієнтації візирної осі КА в надир пірамідальною зоною огляду (див. рис. 3.14, б) можна забезпечити контроль ділянки поверхні Землі (зняти сцену) із площею (рис. 3.15, а)

$$S_{огл} \approx L_\alpha \times D_v, \quad (3.11)$$

5)

де $L_\alpha \approx \alpha_3 H$ – ширина смуги огляду на поверхні Землі (перпендикулярно трасі);

$D_v \approx L_\beta + V_{nm} \Delta t_c$ – довжина смуги огляду на поверхні Землі за рахунок орбітального руху КА (уздовж траси);

$L_\beta \approx \beta_3 H$ – довжина смуги огляду на поверхні Землі при “відсутності” орбітального руху КА в момент спостереження t_{n0} (уздовж траси);

V_{nm} – лінійна швидкість ПТ, яку знаходять за виразом (3.79);

Δt_c – час спостереження.

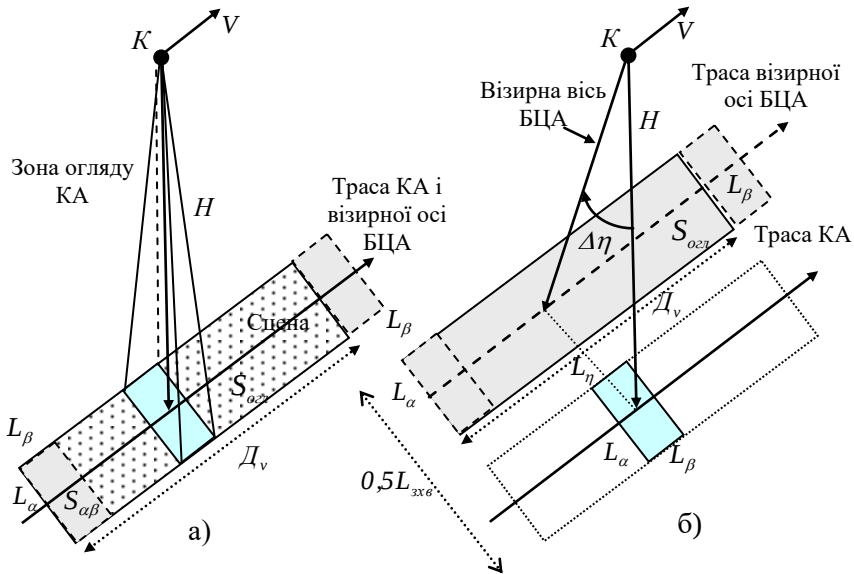


Рис. 3.15. Смуги огляду і захвату

Приклад 3.13. Знайти площу сцени, яку може за час $\Delta t_c = 10$ с зняти КА, що знаходиться на коловій орбіті з висотою $H_o = 800$ км, якщо на ньому установлена БЦА з пірамідальною зону огляду з кутовими параметрами $\alpha_3 = 5^\circ$, $\beta_3 = 1^\circ$.

Розв’язання. Скористаємось результатами із прикладів 3.8 та 3.12, звідки маємо $V_{nm} \approx 6,6$ км/с, $L_\alpha \approx 70$ км; $L_\beta \approx 14$ км. Тоді із формули (3.115) знайдемо $S_{огл} \approx L_\alpha \times D_v \approx L_\alpha \times (L_\beta + V_{nm} \Delta t_c) \approx 70 \times (14 + 6,6 \cdot 10) \approx 5600$ км².

Із отриманих результатів неважко помітити, що для повного геометричного покриття заданих НО потрібно забезпечити відповідні розміри сцени на одному витку або використовувати кілька витків орбіти підряд чи застосовувати декілька КА.

Врахування *поступального і обертального руху КА*. Для розширення можливостей КА за спостереженням наземних об'єктів поряд з орбітальним рухом можна додатково використовувати і кутовий рух КА, а саме:

- а) по крену η (перпендикулярно до траси орбіти);
- б) по тангажу θ (уздовж траси орбіти);
- в) по рисканню γ (обертання навколо візирної осі КА);
- г) по двох із цих кутів одночасно;
- д) по всіх трьох кутах одночасно.

На практиці найчастіше використовують тільки відвороти візирної осі КА по крену, рідше – по тангажу. Якщо використовувати відвороти поля зору КА від надира по крену (вліво-вправо від траси) на кут $\Delta\eta$ (рис. 3.15, б), то одержимо *смугу захвату КА* з лінійними розмірами (шириною) на поверхні Землі:

$$L_{\text{зхв}} \approx L_{\alpha} + 2L_{\eta}, \quad (3.116)$$

де $L_{\eta} \approx H \sin \Delta\eta$.

При цьому можна говорити про *зону захвату* КА як поняття, що задається виразом

$$Q_{\text{зхв}} = \{H, \alpha_3, \beta_3, \Delta t_c, \Delta\eta\}. \quad (3.117)$$

Зауважимо, що отримані результати справедливі для *плоскої* поверхні *нерухомої* Землі. Ці умови виникають тоді, коли розглядаються невеликі значення кута відвороту по крену. На практиці вважають, що якість ЦІ є прийнятною при кутах відвороту візирної осі КА від надира $|\Delta\eta| \leq 30^\circ$.

У загальному ж випадку при розрахунках необхідно враховувати кривизну Землі і її добове обертання навколо власної осі.

Приклад 3.14. Знайти ширину смуги огляду на поверхні Землі, яку може сформувати КА, що знаходиться на коловій орбіті з висотою $H_o = 800 \text{ км}$,

якщо на ньому установлена БЦА з пірамідальною зоною огляду з кутовими параметрами $\alpha_s = 5^\circ$, $\beta_s = 1^\circ$, а її візирна вісь може бути відвернута по крену на кут $|\Delta\eta| \leq 30^\circ$.

Розв'язання. Скористаємось результатами із прикладу 3.13, звідки маємо $L_\alpha \approx 70 \text{ км}$, $L_\beta \approx 14 \text{ км}$. Далі на основі формули (3.116) послідовно знайдемо $L_\eta \approx H_o \sin \Delta\eta \approx 800 \cdot 0,5 \approx 400 \text{ км}$, $L_{\text{зхв}} \approx L_\alpha + 2L_\eta \approx 70 + 2 \cdot 400 \approx 870 \text{ км}$.

Як бачимо, за рахунок кутових маневрів КА можна істотно розширити можливості КСС з огляду на розміри спостережуваної території земної поверхні.

3.6.5. Умови освітленості наземних об'єктів Сонцем

Ступінь освітленості НО Сонцем має визначальне значення для спостереження за ними в оптичному діапазоні випромінювань. При цьому мова йде про функцію (3.103) і, зокрема, про поточні значення кута місця Сонця для заданого НО $\beta_s^m(n)$ та мінімально допустимий кут місця Сонця β^o .

Зрозуміло, що теоретично будь-який НО може вважатись освітленим на добовому інтервалі від моменту сходу Сонця до моменту його заходу. Тому розглянемо ці явища детальніше з позицій сучасної астрономії [7].

Схід і захід світил.

Схід небесного світила – факт перетинання світилом математичного горизонту при його переході із невидимої частини небесної сфери у видиму.

Захід небесного світила – факт перетинання світилом математичного горизонту при його переході із видимої частини небесної сфери в невидиму.

У загальному випадку годинний кут t_* сходу і заходу небесного світила (*) визначається за формулою

$$\text{cost}_* = \frac{\cos(90^\circ + \rho_* + 0,5\psi_* - p_*) - \sin \varphi \sin \delta_*}{\cos \varphi \cos \delta_*}, \quad (3.118)$$

де $\rho_* \approx 35'$ – рефракція променів світила в горизонті;

ψ_* – кутовий діаметр світила;

p_* – добовий горизонтальний паралакс світила;

δ_* – схилення світила;

φ – широта місця спостереження.

За формулою (3.118) годинні кути сходу і заходу обчислюються тільки для Місяця. У цьому випадку приймають $\psi_m = 32'$; $p_m = 58'$ і формула (3.118) приймає вигляд

$$\text{cost}_m = \frac{\sin 7' - \sin \varphi \sin \delta_m}{\cos \varphi \cos \delta_m}. \quad (3.119)$$

Для Сонця приймають $\psi_c = 32'$; $p_c = 0$ і одержують формулу

$$\text{cost}_c = \frac{-\sin 51' - \sin \varphi \sin \delta_c}{\cos \varphi \cos \delta_c}. \quad (3.120)$$

Для зірок і планет приймають $\psi_s = 0$; $p_s = 0$ і одержують формулу

$$\text{cost}_s = \frac{-\sin 35' - \sin \varphi \sin \delta_s}{\cos \varphi \cos \delta_s}. \quad (3.121)$$

Якщо у формулі (3.118) знехтувати рефракцією ($\rho_* = 0$), кутовим розміром ($\psi_* = 0$) та добовим горизонтальним паралаксом $p_* = 0$, то із (3.121) одержують наближену формулу

$$\text{cost}_* \approx -\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta_*. \quad (3.122)$$

Розв'язок кожного із рівнянь (3.118)...(3.122) дає два значення для годинного кута t_* : одне значення лежить у межах $0^\circ \leq t_* \leq 180^\circ$ – для годинного кута заходу t_{w*} , інше – у межах $180^\circ \leq t_* \leq 360^\circ$ – для годинного кута сходу t_{E*} .

Обчисливши значення t_{W*} і t_{E*} , можна визначити моменти заходу і сходу світила за місцевим зоряним часом за формулами:

$$s_{W*} = \alpha_{W*} + t_{W*}; \quad s_{E*} = \alpha_{E*} + t_{E*}, \quad (3.12)$$

де α_{W*} і α_{E*} – прямі піднесення світила в моменти його заходу та сходу відповідно.

Потім ці моменти зоряного часу за відомими формулами можна перевести у місцевий середньосонячний або будь-який інший час (див. розд. 2).

При обчисленні моментів сходу і заходу Сонця, якщо немає необхідності знати їх у системі зоряного часу, годинні кути t_{W*} і t_{E*} , збільшені на 12^h , дають нам моменти цих явищ у системі місцевого істинного сонячного часу.

Довідка. Істинний сонячний час m_0 на даному меридіані в будь-який момент чисельно дорівнює годинному куту істинного Сонця, вираженому в годинній мірі, t_0^h плюс 12^h , тобто

$$m_0 = t_0^h + 12^h.$$

Середній сонячний час m на даному меридіані в будь-який момент чисельно дорівнює годинному куту середнього екваторіального Сонця, вираженому в годинній мірі, t_{cp}^h плюс 12^h , тобто

$$m = t_{cp}^h + 12^h.$$

Зоряний час на даному меридіані в будь-який момент чисельно дорівнює годинному куту ТВРД, вираженому в годинній мірі, t_γ^h , тобто

$$s = t_\gamma^h.$$

Зоряний час дорівнює також сумі годинного кута t_* будь-якого світила і прямого піднесення α_* того ж світила, тобто

$$s = t_* + \alpha_*.$$

У момент верхньої кульмінації світила $t_* = 0$, тому зоряний час $s = \alpha_*$.

У момент нижньої кульмінації світила $t_* = 12^h$, тому зоряний час $s = \alpha_* + 12^h$.

Азимут світила при його сході і заході з урахуванням рефракції, радіуса і паралакса світила обчислюється за формулою

$$\sin A_* = \frac{\cos \delta_* \sin t_*}{\sin(90^\circ + \rho_* + 0,5\psi_* - p_*)}. \quad (3.124)$$

При цьому годинний кут t_* обчислюється за формулою (3.122), а азимут A_* перебуває в одному з ним квадранті.

Кульмінація світил. Момент перетинання світилом небесного меридіана називається кульмінацією світила.

Верхня кульмінація може бути до півночі від зеніту (на дузі ZP , рис. 3.16) і до півдня від зеніту (на дузі $ZIOP'$).

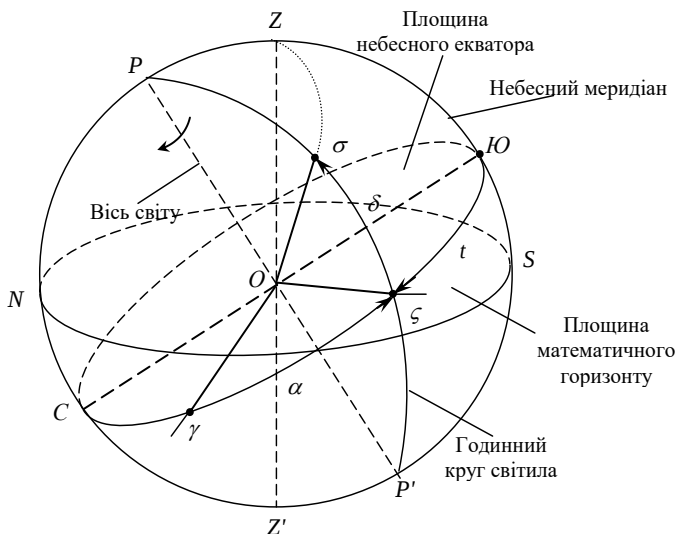


Рис. 3.16. До питання розрахунків моментів часу

У момент верхньої кульмінації світила до *півдня* від зеніту маємо

$$z_* = \varphi - \delta_*; \quad h_* = 90^\circ - \varphi + \delta_*. \quad (3.125)$$

У момент верхньої кульмінації світила до *півночі* від зеніту

$$z_* = \delta_* - \varphi; \quad h_* = 90^\circ + \varphi - \delta_*, \quad (3.126)$$

у момент нижньої кульмінації світила

$$z_* = 180^\circ - \varphi - \delta_*; h_* = \varphi + \delta_* - 90^\circ. \quad (3.12)$$

7)

Сутінки. Частина доби після заходу Сонця називається вечірніми сутінками, а перед його сходом – ранковими сутінками. Розрізняють сутінки цивільні і астрономічні.

Вечірні цивільні сутінки починаються в момент заходу Сонця і тривають доти, поки висота центра диска Сонця не дорівнюватиме $h_c = -7^\circ$.

Ранкові цивільні сутінки починаються перед сходом Сонця, коли висота його центра $h_c = -7^\circ$, і кінчаються в момент сходу Сонця.

Астрономічні сутінки (ранкові і вечірні) тривають довше, тому що за їхній початок і кінець приймається той момент, коли висота центра Сонця $h_c = -18^\circ$.

Коли кінчаються вечірні цивільні сутінки, то доводиться вмикати штучне освітлення; на небі видно лише найбільш яскраві зірки. Наприкінці вечірніх астрономічних сутінків зникають останні сліди вечірньої заграви, наступає ніч, а на небі видні уже і менш яскраві зірки.

Тривалість сутінків τ залежить від географічної широти місця спостереження φ та схилення Сонця δ_c і можна знайти із формули

$$\cos(t_{*c} + \tau) = \frac{\sin h_c - \sin \varphi \sin \delta_c}{\cos \varphi \cos \delta_c}, \quad (3.12)$$

8)

де висота центра Сонця $h_c = -7^\circ$ для цивільних і $h_c = -18^\circ$ для астрономічних сутінків.

Часовий кут заходу t_{wc} або сходу t_{ec} Сонця знаходять за формулою (3.101).

Північніше географічної широти $\varphi = 59^\circ,5$ цивільні сутінки можуть тривати від заходу до сходу Сонця, тобто вечірні сутінки переходять відразу ж у ранкові.

Аналогічно північніше географічної широти $\varphi = 48^\circ,5$ можуть тривати від заходу до сходу Сонця астрономічні сутінки.

На основі викладеного можна оцінювати та прогнозувати освітленість НО у будь-якому регіоні земної кулі, а отже, і планувати сеанси спостережень цього НО за допомогою орбітальних засобів ОЕСп.

При цьому експериментально встановлено, що найкращі астрономічні та фізичні умови для такого спостереження наступають з 10^h до 12^h (ранішні витки) та з 15^h до 16^h (вечірні витки) за місцевим часом.

3.6.6. Умови видимості космічних апаратів із наземних пунктів

Очевидно, що КА буде геометрично видимим із НП, якщо він знаходиться відносно цього пункту над площиною місцевого горизонту (рис. 3.17). У такому випадку значення кута місця КА в ТПССК перебуватиме у межах

$$0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ. \quad (3.129)$$

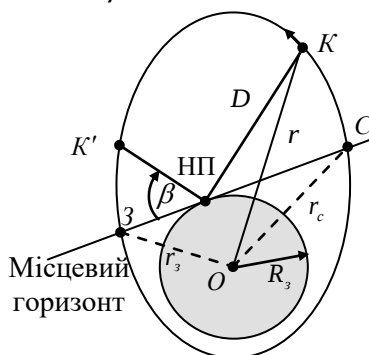


Рис. 3.17. Умови видимості КА із НП

Однак на практиці вважають, що КА має бути не тільки геометрично видимим із НП, а і “радіовидимим” з нього. А це означає, що з КА повинен бути стійким радіоз’язок для прийому з

нього всіх видів бортової інформації, проведення траєкторних вимірювань, передачі на борт командної інформації і т. ін.

Такі вимоги виконуються тоді, коли кут місця КА, а отже і кут місця наземної антени, знаходяться над горизонтом у межах

$$\beta_{\min} \leq \beta \leq 90^\circ. \quad (3.130)$$

При цьому у більшості випадків береться $\beta_{\min} = 5^\circ \dots 7^\circ$.

Таким чином, для розрахунку умов видимості КА необхідно на кожному кроці розраховувати його кут місця і перевіряти виконання умови (3.129) або (3.130). У підсумку отримаємо **зону видимості** КА з даного НП як геометричне місце ПТ, отриманих для КА, що знаходиться над площиною місцевого горизонту відносно даного НП.

Приклади таких зон видимості для КА типу NOAA, які знаходяться в один і той же момент часу на різних широтах, зображені на рис. 3.18.



Рис. 3.18. Зони видимості КА типу NOAA

Зауважимо, що всі КА даного типу мають приблизно однакові параметри орбіти, однак зони їх видимості на карті (див. рис. 3.18) мають різну форму і розміри через спотворення картографічних проекцій відносно проекцій на сферичну Землю.

Формально умови видимості КА із НП можна задати через їхні поточні координати в ІСК у вигляді вимоги [26]:

$$X_{ИК} \cos \xi + Y_{ИК} \cos \eta + Z_{ИК} \cos \zeta - R_3 \geq 0, \quad (3.131)$$

де $X_{ИК}$, $Y_{ИК}$, $Z_{ИК}$ – декартові координати КА в ІСК;

$\cos \xi = X_{ИП_3} / R_3$; $\cos \eta = Y_{ИП_3} / R_3$; $\cos \zeta = Z_{ИП_3} / R_3$ – напрямні косинуси для НП;

$X_{ИП_3}$, $Y_{ИП_3}$, $Z_{ИП_3}$ – декартові координати НП в ІСК.

Час видимості КА із НП для *еліптичних орбіт* можна розрахувати за формулою [26]

$$t_{вид} = -\sqrt{a^3 / \mu_0} \left[\sqrt{\frac{2r_c}{a} - \frac{p}{a} - \frac{r_c^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{2r_3}{a} - \frac{p}{a} - \frac{r_3^2}{a^2}} - \right. \\ \left. - \arcsin \frac{a - r_c}{\sqrt{a(a - p)}} - \arcsin \frac{a - r_3}{\sqrt{a(a - p)}} \right], \quad (3.132)$$

де r_c і r_3 – модулі радіуса-вектора КА в моменти його сходу (появи над горизонтом) і заходу відповідно, тобто відстані до перетинання орбіти КА із площиною місцевого горизонту у точках C і 3 (див. рис. 3.17).

Ці відстані можна знайти із виразу

$$r_* = R_3 \left[\cos \varphi_{ИП_3} \cos \varphi_{ИК} \cos(\lambda_{ИП_3} - \lambda_{ИК}) \pm \sin \varphi_{ИП_3} \sin \varphi_{ИК} \right]^{-1} \quad (3.133)$$

де $\varphi_{ИП_3}$ і $\lambda_{ИП_3}$ – сферичні координати НП в ІСК;

$\varphi_{ИК}$ і $\lambda_{ИК}$ – сферичні координати КА (або ПТ) в ІСК.

У формулі (3.133) знак “+” відповідає моментам заходу КА за горизонт ($r_* = r_3$), а знак “–” – моментам його сходу над горизонтом ($r_* = r_c$).

Час видимості КА на *коловій екваторіальній орбіті* із сидеричним періодом обертання T для спостерігача, що перебуває на екваторі, визначається за формулою

$$t_{вид}^e = \frac{T_{30}}{T_{30} \pm T} \cdot \frac{\arccos(R_3 / r)}{\pi} T, \quad (3.134)$$

де знак “+” у знаменнику береться для нахилення орбіти $i = 180^\circ$, а знак “–” використовується для нахилення $i = 0^\circ$.

3.6.7. Умови освітленості космічних апаратів Сонцем

Відомо [19, 26, 34], що освітленість КА Сонцем має істотне значення для нормального функціонування бортових систем електропостачання, терморегулювання, а також для кутової орієнтації КА у просторі при використанні Сонця як зовнішнього орієнтира.

Однак при цьому промені Сонця не повинні попадати в об’єктив БЦА, щоб не засвітлювати чутливі елементи оптико-електронної апаратури.

Час освітленості КА на коловій орбіті визначається як [26]

$$t_{осв} = T[90^\circ + \arcsin(\sin \nu / \sin \zeta)] / 180^\circ, \quad (3.135)$$

де T – сидеричний період обертання КА;

ν – кут тіні;

ζ – кут між нормаллю до площини орбіти і лінією “Земля-Сонце” (рис. 3.19).

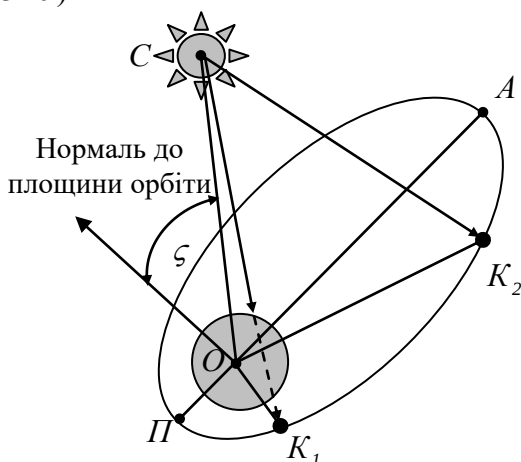


Рис. 3.19. Взаємне розташування Землі, орбіти КА і Сонця

Кут тіні можна розрахувати як функцію від висоти КА H і радіуса Землі R_z (рис. 3.20) із виразу [26, 47]

$$\nu = \arccos[R_z / (R_z + H)]. \quad (3.136)$$

У свою чергу, кут ζ визначається із співвідношення

$$\cos \zeta = \cos i \sin \varepsilon \sin \alpha - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega \sin \alpha + \sin i \sin \Omega \cos \alpha, \quad (3.137)$$

де i – нахилення орбіти;

$\varepsilon \approx 23,5^\circ$ – кут між площиною екліптики і площиною екватора Землі;

α – пряме піднесення Сонця;

Ω – інерціальна довгота ВВ орбіти КА.

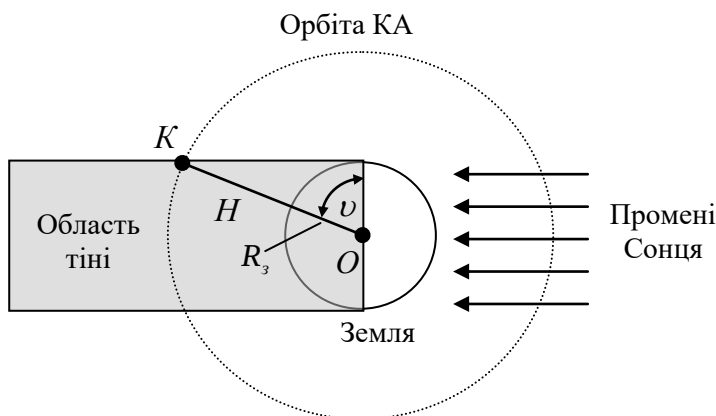


Рис. 3.20. Кут тіні

Приблизно (у градусах)

$$\alpha \approx 0,98563 N_{21}, \quad (3.138)$$

де N_{21} – число діб, що пройшли після 21 березня до моменту спостереження КА.

Як видно із формули (3.135), мінімальна тривалість освітленості КА Сонцем $t'_{осв} = \min(t_{осв})$ буде при $\zeta = 90^\circ$. Її величина становить

$$t'_{осв} = T(90^\circ + \nu) / 180^\circ. \quad (3.139)$$

Максимальне значення $t''_{ocв} = \max(t_{ocв})$ залежить від висоти орбіти і її нахилення. Наприклад, для того щоб КА був освітлений Сонцем протягом усього періоду обертання $t''_{ocв} = T$, його орбіта повинна мати нахилення

$$i = 90^\circ - \nu - \varepsilon. \quad (3.140)$$

Приклад 3.15. Знайти мінімальну тривалість освітленості Сонцем КА, який знаходиться на коловій орбіті з висотою $H_o = 800$ км.

Розв'язання. Розрахуємо попередньо за формулою (3.136) кут $\nu = \arccos[R_s / (R_s + H_o)] = \arccos[6371/7171] \approx 27,3^\circ$, а із прикладу 3.3 візьмемо значення періоду обертання для заданої висоти КА $T_o = 6043^s \approx 100,7^m$. Далі, скориставшись формулою (3.139), знайдемо шукану величину $t'_{ocв}(800) = T_o(90^\circ + \nu)/180^\circ \approx 0,65T_o \approx 6043^s(90 + 27,3)/180 \approx 3938^s \approx 65,6^m$.

Як бачимо із отриманих результатів, мінімальна тривалість освітленості КА Сонцем зменшується зі зменшенням висоти орбіти. У гіпотетичному випадку при $H_o = 0$ отримаємо $t'_{ocв}(0) = T_o(90^\circ + 0^\circ)/180^\circ = 0,5T_o$, що добре узгоджується з геометричними уявленнями (половина земної кулі завжди освітлена).

Знаючи умови освітленості КА Сонцем, можна вирішувати такі *прикладні завдання*:

а) розраховувати і вибирати ті орбіти, на яких КА буде освітлений Сонцем максимальний або необхідний з енергетичної точки зору час;

б) оцінювати час освітленості КА на заданій орбіті;

в) вибирати режим роботи КА з огляду на енергоспоживання (наприклад, виключати бортові системи у випадку недостатніх запасів електроенергії);

г) вибирати режим роботи КА з огляду на його орієнтацію, коли, наприклад, Сонце є одним із зовнішніх орієнтирів для побудови на борту КА базової барицентричної системи координат;

д) вибирати режим роботи КА з огляду на ведення оптико-електронного спостереження за НО або їх фотографування, наприклад, виключати апаратуру у випадку загрози влучення сонячного випромінювання в об'єктив БЦА.

Таким чином, ми познайомилися з теорією і основними залежностями незбуреного орбітального руху КА. Отримані результати мають визначальне значення для засвоєння наступних розділів навчальної дисципліни, а також можуть використовуватись для орієнтовних розрахунків при вирішенні ряду прикладних завдань у рамках теорії незбуреного руху КА.

Контрольні питання

1. У чому полягають умови незбуреного руху КА?
2. Поясніть фізичний смисл інтеграла енергії.
3. Дайте геометричну інтерпретацію інтеграла площ.
4. Дайте геометричну інтерпретацію інтеграла Лапласа.
5. Чому на практиці не обмежуються описом орбітального руху тільки в ІСК?
6. У чому принципове розходження між елементами орбіт і параметрами руху КА?
7. Дайте геометричну інтерпретацію кутових параметрів руху КА.
8. Дайте геометричну інтерпретацію лінійних параметрів руху КА.
9. У чому відмінність між рівняннями Кеплера і орбіти?
10. Як змінюються значення періоду обертання і лінійної швидкості КА від висоти його орбіти?
11. Що приймається за початок відліку орбітального руху при колових орбітах і чому?
12. Дайте тлумачення компонентів TLE-файлів.
13. На чому базується прогнозування орбітального руху КА?
14. Що таке траса КА і для чого вона використовується? Як забезпечити ізотрасовість орбіт?
15. Для чого проводяться траєкторні вимірювання? Чи можна безпосередньо вимірювати параметри орбіти КА?
16. Що дає для практики знання умов видимості наземних об'єктів з КА і умов видимості КА з наземних пунктів?
17. Для чого необхідно знати умови освітленості КА і наземних об'єктів Сонцем?

Розділ 4

ЗБУРЕНИЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Як уже відзначалось у розд. 2, на КА в орбітальному польоті крім центральної сили притягання Землі діє цілий ряд інших сил, які прийнято називати *збурювальними* силами або факторами. Величина цих сил мала у порівнянні з основною (центральною) силою, але вони викликають відхилення параметрів орбіт КА від кеплерових, що необхідно враховувати як на етапі створення, так і на етапі експлуатації КСС.

У зв'язку з цим говорять про **збурений орбітальний рух** КА, під яким розуміють їхній рух під впливом не тільки центральної сили притягання Землі, але й інших сил, *малих* у порівнянні із центральною [26, 39, 44]. При цьому вивчення збурень і механізму їхнього впливу на параметри орбіт є одним із основних завдань теорії орбітального руху КА і потребою практики.

4.1. ЗБУРЮВАЛЬНІ ФАКТОРИ І МЕТОДИ ЇХ ОБЛІКУ

Збурювальні сили, що так або інакше впливають на орбітальний рух КА, які функціонують на орбітах ШСЗ, залежно від їхньої природи прийнято ділити на три групи (рис. 4.1): поверхневі, електромагнітні та гравітаційні.

До *поверхневих* відносять сили, що обумовлені опором атмосфери Землі, а також тиском сонячного світла. Перша із цих сил впливає на низькоорбітальні КА (на висотах $H \approx 150...1000$ км) при великих строках їхнього активного існування. Друга проявляється на високих орбітах при значних розмірах і малих масах КА (ефект вітрила).

Електромагнітні сили обумовлені радіацією космічного простору, магнітними полями Землі та інших небесних тіл. Їхній

вплив на орбітальний рух ШСЗ незначний. Тому вони далі не розглядаються.

Гравітаційні збурювальні сили виникають за рахунок несферичності Землі, а також внаслідок аномалій сил тяжіння, обумовлених нерівномірною щільністю та рельєфом поверхні земної кулі (гори, впадини, підземні пустоти, материки, океани і т.п.). При цьому на практиці збурення за рахунок несферичності Землі враховують насамперед для ШСЗ, а наприклад, для міжпланетних КА цими збуреннями нехтують.



Рис. 4.1. Варіант класифікації збурювальних факторів

Крім того, до гравітаційних збурень відносяться сили притягання Сонця, Місяця та планет Сонячної системи. Величина цих сил відповідно до закону всесвітнього тяжіння (2.1), а також виразу (2.22) залежить від маси небесного тіла і відстані до нього. У зв'язку з цим основний вплив на рух ШСЗ здійснюють тільки такі небесні тіла, як Сонце та Місяць. При цьому збурення, що обумовлені ними, проявляються для ШСЗ на орбітах з висотами

$H \geq 1000$ км. Дію ж планет та інших небесних тіл враховують на висотах $H \geq 100000$ км.

Збурення орбіт, що обумовлені перерахованими силами, прийнято ділити на вікові та періодичні. *Вікові збурення* безупинно змінюють параметри орбіт пропорційно часу t за законом

$$\chi(t) = \chi_n + \Delta\chi(t), \quad \Delta\chi(t) = A(t - t_n),$$

де χ_n – початкове значення деякого параметра орбіти, наприклад, у момент t_n ;

A – амплітуда вікового збурення, причому не обов’язково постійна.

Таким чином, вікові збурення можуть накопичуватися від витка до витка, а отже, досягати великих значень.

Періодичні збурення виникають протягом одного оберту КА навколо Землі і, як правило, не накопичуються, оскільки мають періодичний характер виду

$$\chi(t) = \chi_n + \Delta\chi(t), \quad \Delta\chi(t) = \Phi(t - t_n), \quad (4.1)$$

де $\Phi(t - t_n)$ – деяка *періодична* функція, наприклад, синусоїда.

Серед періодичних збурень (4.1) залежно від періоду повторення розрізняють *довгоперіодичні* та *короткоперіодичні* збурення.

Диференціальні рівняння збуреного руху у векторній формі можна одержати із векторного рівняння (2.25) з урахуванням зазначених збурювальних сил [44]

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_\Sigma + \vec{Q}_e = \vec{F} + \vec{\Psi}, \quad (4.2)$$

де $\vec{F}_\Sigma$ – результуючий вектор сил притягання небесних тіл;

$\vec{Q}_e$ – вектор збурювальних сил зовнішнього середовища;

$\vec{F} = \vec{F}_3 - \Delta \vec{F}$ – вектор центральної сили притягання *однорідної* за щільністю *сферичної* Землі (див. розд. 1);

$\vec{F}_3$ – вектор сили притягання *реальної* Землі;

$\Delta \bar{F}$ – вектор збурювальних сил, обумовлених *несферичністю* Землі, її *неоднорідністю* за щільністю і т.п.;

$\bar{\Psi} = (\bar{F}_x - \bar{F}) + \bar{Q}_g$ – результуючий вектор збурювальних сил.

Диференціальні рівняння збуреного руху у скалярній формі можна знайти із векторного рівняння (4.2) за аналогією із виразами (3.5). Тоді для КА з масою m одержимо:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\mu_0 X / r^3 + \Psi_x / m; \\ \ddot{Y} = -\mu_0 Y / r^3 + \Psi_y / m; \\ \ddot{Z} = -\mu_0 Z / r^3 + \Psi_z / m; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = V_x; \\ \dot{Y} = V_y; \\ \dot{Z} = V_z. \end{cases} \quad (4.3)$$

При цьому перші члени у правій частині рівнянь (4.3) являють собою прискорення від центральної сили притягання $\bar{F}$, а другі члени – від збурювальних сил $\bar{\Psi}$ на відповідні осі ІСК. Конкретні вирази для вхідних у рівняння (4.3) членів залежать від того, які збурювальні фактори враховуються в даних умовах.

Наприклад, для КА ВСП враховують у першу чергу фактори, виділені на рис. 4.1 суцільними рамками, причому беруть до уваги в основному вікові збурення.

Вплив вікових збурень на параметри орбіт можна оцінити шляхом інтегрування диференціальних рівнянь (4.3). При цьому для *інтегрування* можна застосовувати чисельні, аналітичні або чисельно-аналітичні методи [15].

До *чисельних* методів відносять чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь руху КА у ГрСК або в ІСК з урахуванням усіх діючих на КА сил. Крім того, система диференціальних рівнянь може бути подана в оскулюючих змінних, про які сказано далі.

Аналітичні методи базуються на розкладанні в ряд за ступенями малого параметра в правих частинах системи диференціальних рівнянь. Вони можуть містити в собі чисельні методи обчислення окремих інтегралів, які “не беруться”, або наближені методи обчислення деяких табличних функцій. У такому випадку маємо *чисельно-аналітичні* методи.

На сьогодні досить добре відпрацьовані чисельні методи Рунге-Кутта та Адамса, а також аналітичний *метод оскулюючих елементів*. При цьому останній виявився досить зручним, прийнятним за точністю і тому часто застосовується на практиці.

Сутність **методу оскулюючих елементів** полягає у тому, що елементи вектора (множини) орбітальних параметрів $\tilde{R}_0 = \{a, e, \omega, i, \Omega, t_{\Pi}\}$, які є постійними при незбуреному русі, розглядаються в задачах збуреного руху як *функції* поточного часу t

$$\tilde{R}_0(t) = \{a(t), e(t), \omega(t), i(t), \Omega(t), t_{\Pi}(t)\}. \quad (4.4)$$

Ці функції, як правило, змінюються повільно і плавно, що виявилось зручним для розрахунків параметрів руху КА на великих інтервалах часу. При цьому орбітальний рух КА розглядається як рух по кеплеровій орбіті, параметри якої безупинно змінюються у часі.

Така змінна орбіта *називається* оскулюючою (фіктивною), а її елементи (4.4) – *оскулюючими*. Сутність методу оскулюючих елементів пояснюється рис. 4.2.

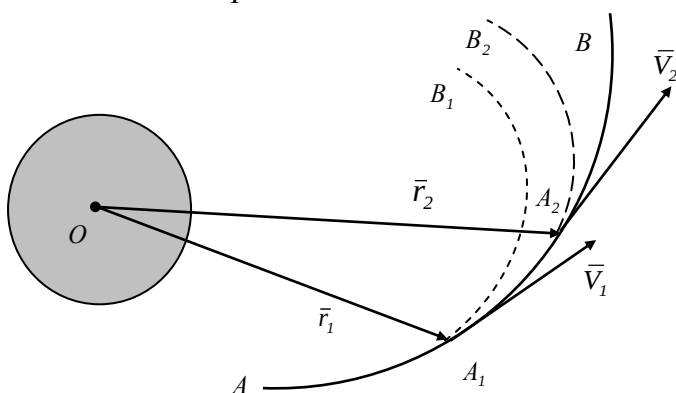


Рис. 4.2. До пояснення методу оскулюючих елементів

Нехай дуга AB являє собою частину збуреної орбіти КА. Якби в деякий момент часу t_1 збурювальні сили перестали діяти, то далі КА рухався б по незбуреній орбіті A_1B_1 з параметра-

ми $\tilde{R}_0(t_1) = \{a(t_1), e(t_1), \omega(t_1), i(t_1), \Omega(t_1), t_{II}(t_1)\}$ і лінійною швидкістю $\bar{V}_1$, дотичною до збуреної орбіти в точці A_1 .

Аналогічно відбувалося б і в наступний момент t_2 у точці A_2 . Отже, збурена орбіта є обвідною сімейства незбурених орбіт A_1B_1 , A_2B_2 і їм подібних.

Зміни оскулюючих елементів орбіт описуються системою диференціальних рівнянь, у яких як незалежна змінна зазвичай використовується істинна аномалія ϑ або аргумент широти $u = \omega + \vartheta$.

4.2. ЗБУРЕННЯ ОРБІТ, ВИКЛИКАНІ НЕСФЕРИЧНІСТЮ ЗЕМЛІ

При вивченні незбуреного орбітального руху передбачалося, що Земля має форму кулі радіусом $R_s = 6371$ км з постійною щільністю. При цьому потенціал сферичної Землі можна було розраховувати за формулою (2.6) як

$$U_0 = U(r) = -\mu_0 / r.$$

Однак реальна поверхня Землі має складний рельєф і неоднорідну внутрішню структуру. Це не дає можливості представити її форму у вигляді правильної геометричної фігури (кулі). Тому використовують моделі Землі, які в тій або іншій мірі відображають її реальні форми та розміри (див. розд. 1).

4.2.1. Потенціал несферичної Землі

Внаслідок несферичності Землі її *потенціал* на відміну від формули (2.6) залежить від нахилення орбіти КА i , аргументу його широти u , відстані від центра Землі до КА r і описується виразом [16, 44]

$$U_s = U_0 + \Delta U, \quad (4.5)$$

де $\Delta U = \frac{\varepsilon_3}{3r^3} (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i)$ – додатковий потенціал, що виникає за рахунок несферичності Землі;

$\varepsilon_3 \approx 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5 / \text{с}^2$ – константа, що характеризує земний еліпсоїд.

Таким чином, оскільки реальна форма Землі відрізняється від кулі, щільність у різних її точках не постійна, то це приводить до зміни форми її гравітаційного поля. При цьому рух КА в полі тяжіння Землі відбувається під дією *нецентральної* сили, а отже, рух КА є *збуреним*.

Модуль гравітаційного потенціалу залежить від радіуса r , геодезичної широти B та довготи L . Його розкладають за сферичними функціями Лежандра [43, 47] у ряд, який має вигляд:

$$U_3(r, B, L) = \frac{\mu_0}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n0} \left(\frac{a_3}{r} \right)^n P_{n0} \sin B + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_3}{r} \right)^n P_{nm} \sin B (C_{nm} \cos mL + D_{nm} \sin mL) \right], \quad (4.6)$$

де C_{nm} і D_{nm} – безрозмірні коефіцієнти розкладання;

$P_{nm} \sin B$ – багаточлени Лежандра.

При цьому багаточлен виду $P_{n0} \sin B$ називають основною функцією Лежандра, а виду $P_{nm} \sin B$ при $m \neq 0$ – приєднаною функцією Лежандра.

Члени типу $P_{nm} \sin B \cos mL$ та $P_{nm} \sin B \sin mL$ називають *елементарними гармоніками*.

При $m = 0$ елементарні гармоніки $P_{n0} \sin B$ залежать від широти B і їх називають *зональними гармоніками*. Вони описують тільки широтні ефекти гравітаційного поля Землі.

Якщо $m = n$, то гармоніки описують тільки довготні ефекти. Такі гармоніки називають *секторальними*.

Якщо $m \neq n$, то гармоніки відображають змішані ефекти гравітаційного поля, які залежать як від широти, так і від довготи. Такі гармоніки називають *тесеральними* [19].

При прогнозуванні руху КА різного призначення вибирають таку модель гравітаційного поля Землі, тобто кількість членів розкладання (4.6), яка забезпечує врахування сили притягання із заданою точністю.

Оскільки при збуреному русі КА гравітаційна сила несферичної Землі не є центральною, то для знаходження проекцій прискорення КА на осі ІСК або ГрСК його розкладають на взаємно перпендикулярні складові: радіальну $\bar{g}_r$, меридіональну $\bar{g}_B$ і нормальну $\bar{g}_L$.

Радіальна складова колінеарна радіусу-вектору КА, але спрямована у протилежну сторону. Меридіональна складова лежить у площині меридіана і спрямована перпендикулярно до радіуса-вектора у напрямку від Північного полюса до екватора. Нормальна складова є дотичною до паралелі (перпендикулярна до радіуса-вектора) і спрямована у бік обертання Землі.

Для зручності складання системи диференціальних рівнянь в ІСК (ГрСК) вектор $\bar{g}_B$ розкладають на складові $\bar{g}'$ та $\bar{g}_\omega$, які спрямовані відповідно уздовж радіуса-вектора і уздовж осі обертання Землі. При цьому, оскільки складова $\bar{g}'$ спрямована у зворотному напрямку відносно радіальної $\bar{g}_r$, то їх можна об'єднати: $\bar{g}_r' = \bar{g}_r - \bar{g}'$.

Для знаходження проекцій гравітаційного прискорення на осі ГрСК слід мати на увазі, що компонента $\bar{g}_r'$ має три складові, компонента $\bar{g}_\omega$ – лише одну на вісь Z_F , а компонента $\bar{g}_L$ – дві проекції на осі X_F та Y_F , оскільки вона лежить у площині, паралельній площині екватора.

З урахуванням викладеного система диференціальних рівнянь *збуреного* руху КА у гравітаційному полі *несферичної* Землі (4.3) має вид:

$$\begin{cases} dV_x/dt = g'_r x/r - g_L \cos L; & V_x = dX/dt; \\ dV_y/dt = g'_r y/r - g_L \sin L; & V_y = dY/dt; \\ dV_z/dt = g'_r z/r - g_\omega; & V_z = dZ/dt. \end{cases} \quad \begin{matrix} (4. \\ 7) \end{matrix}$$

4.2.2. Вплив несферичності Землі на елементи орбіт

Можна показати [26, 43], що система диференціальних рівнянь, які враховують збурення елементів орбіт КА відносно істинної аномалії ϑ за рахунок несферичності Землі, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} dp/d\vartheta &= -2\varepsilon(1 + e \cos \vartheta) \sin 2u \sin i / \mu_0 p; \\ de/d\vartheta &= \varepsilon \mu_0^{-1} p^{-1} \left[(1 + e \cos \vartheta)^2 (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i) \sin \vartheta - (2 + e \cos \vartheta) \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + e \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin 2u \sin^2 i - e(1 + e \cos \vartheta) \sin 2u \sin^2 i \right]; \\ d\omega/d\vartheta &= -\varepsilon \mu_0^{-1} p^{-2} e \left[(3 \sin^2 u \sin^2 i - 1)(1 + e \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + (2 + e \cos \vartheta)(1 + e \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin 2u \sin^2 i - 2e(1 + e \cos \vartheta) \sin^2 u \cos^2 i \right]; \\ di/d\vartheta &= -2\varepsilon(1 + e \cos \vartheta) \sin 2u \sin 2i / \mu_0 p^2; \\ d\Omega/d\vartheta &= -2\varepsilon(1 + e \cos \vartheta) \sin^2 u \cos i / \mu_0 p^2. \end{aligned}$$

Для кількісної оцінки еволюцій елементів орбіт КА за один виток навколо земного еліпсоїда треба проінтегрувати ці рівняння по істинній аномалії в межах від $\vartheta_1 = 0$ до $\vartheta_2 = 2\pi$. Аналіз результатів інтегрування показує, що:

а) фокальний параметр p , ексцентриситет e і нахилення орбіти i збурень не мають, тобто

$$\Delta p \approx 0; \quad \Delta e \approx 0; \quad \Delta i \approx 0;$$

б) інерціальна довгота ВВ за виток отримує збурення, назване *прецесією лінії вузлів* (рис. 4.3):

$$\Delta\Omega_\varepsilon \approx -2\pi\varepsilon_\varepsilon \cos i / \mu_0 p^2 = -A \cos i / p^2, \quad (4.8)$$

де $A = 2\pi\varepsilon_\varepsilon / \mu_0 = 4,15196 \cdot 10^5 \text{ км}^2$.

При цьому для прямих орбіт (при $0 < i < 90^\circ$) ВВ зміщається на захід, а для зворотних (при $90^\circ < i < 180^\circ$) – на схід.

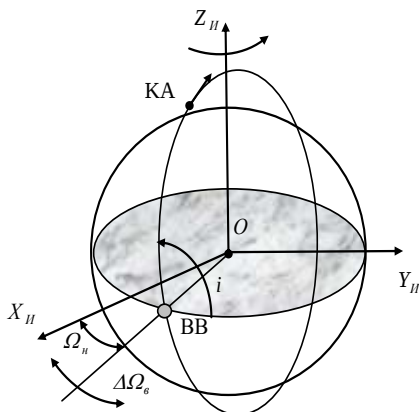


Рис. 4.3. До питання прецесії лінії вузлів

У полярних орбіт ($i = 90^\circ$) прецесія лінії вузлів відсутня ($\Delta\Omega_\theta \approx 0$), а у екваторіальних ($i = 0^\circ$, $i = 180^\circ$) – максимальна ($\Delta\Omega_\theta = \max$).

Очевидно, що за k витків інерціальна довгота ВВ досягне значення

$$\Omega(k) \approx \Omega_n + k \cdot \Delta\Omega_\theta, \quad (4.9)$$

де Ω_n – деяке початкове значення інерціальної довготи ВВ;

в) аргумент перигею за виток отримує збурення, назване *прецесією лінії апсид*.

Значення цієї прецесії розраховується як

$$\Delta\omega_\theta \approx A(5\cos^2 i - 1)/2p^2. \quad (4.10)$$

Якщо зажадати $\Delta\omega_\theta = 0$, то із рівняння (4.10) можна одержати значення нахилення орбіт, при яких лінія апсид не прецесує:

$i_1 \approx 63,4^\circ$ – пряма орбіта;

$i_2 \approx 116,6^\circ$ – зворотна орбіта.

При $0 \leq i < i_1$ та $i_2 < i \leq 180^\circ$ аргумент перигею зростає, а при $i_1 \leq i \leq i_2$ – убыває.

Очевидно, що при $\Delta\omega_\theta \approx \text{const}$ аргумент перигею за k витків досягне значення

$$\omega(k) \approx \omega_n + k \cdot \Delta\omega_s, \quad (4.11)$$

де ω_n – деяке початкове значення аргументу перигею.

Таким чином, несферичність Землі викликає вікові збурення, у першу чергу, інерціальної довготи ВВ та аргументу перигею.

Як видно із формул (4.8) і (4.10), ці збурення можна компенсувати вибором нахилення орбіти. Однак спільна мінімізація збурень даних елементів неможлива, оскільки для цього потрібні різні значення нахилення орбіти.

Крім того, несферичність Землі викликає збурення й інших елементів орбіт. Наприклад, *період обертання КА* отримує збурення, яке для колової орбіти за один виток визначається як

$$\Delta T_s \approx A(1 - 4 \cos^2 i) / \sqrt{\mu_0 p}. \quad (4.12)$$

Як наслідок замість сидеричного T одержують *драконічний період обертання КА*

$$T_{op} \approx T + \Delta T_s, \quad (4.13)$$

який за k витків досягне значення

$$T_{op}(k) \approx T_{opn} + k \cdot \Delta T_s, \quad (4.14)$$

де T_{opn} – деяке початкове значення драконічного періоду.

При цьому аналіз залежності (4.12) показує, що для забезпечення значень $\Delta T_s \approx 0$ необхідно і достатньо зажадати, щоб $(1 - 4 \cos^2 i) = 0$, звідки отримаємо прийнятні нахилення орбіти $i_1 \approx 60^\circ$ або $i_2 \approx 120^\circ$.

Отже, *прямі орбіти з нахиленням $i_1 \approx 60^\circ$ вигідні з огляду на мінімізацію збурень як періоду обертання КА, так і лінії апсид*. Цією властивістю часто користуються на практиці, наприклад, при створенні систем космічного зв'язку на основі КА типу “Молнія”.

Приклад 4.1. Розрахувати величину прецесії лінії вузлів за виток КА “Молния”, який знаходиться на орбіті з висотами апогею $H_A = 40000 \text{ км}$, перигею $H_P = 700 \text{ км}$ та нахиленням $i = 62^\circ$.

Розв’язання. Скористаємось формулою (4.8). Для цього попередньо за формулами (3.22), (3.24) та (3.25) послідовно знайдемо велику піввісь $a = 0,5(H_A + H_P + 2R_z) = 0,5(40000 + 700 + 2 \cdot 6371) = 26721 \text{ км}$, ексцентриситет $e = (H_A - H_P)/2a = (40000 - 700)/53442 \approx 0,735$ та фокальний параметр $p = a(1 - e^2) = 26271(1 - 0,735^2) \approx 12064 \text{ км}$. Далі із формули (4.8) отримаємо $\Delta\Omega_g \approx -A \cos i / p^2 \approx -4,15196 \cdot 10^5 \cos 62^\circ / 12064^2 \approx -0,00134 \text{ с}^{-1} \approx -0,072^\circ$.

Отже, за один виток площина орбіти КА зміщується у західному напрямку (проти добового обертання Землі) на величину $\Delta\Omega_g \approx 0,072^\circ \approx 4,3'$. Цей факт може зумовити порушення вимоги ізотрасовості, яка є однією із визначальних для такого типу КА. Для запобігання такому явищу вживають спеціальні заходи.

Варто також помітити, що для малих значень нахилень орбіти КА ($i \approx 0^\circ$) прецесія інерціальної довготи ВВ вироджується у вікове збурення драконічного періоду обертання.

Наприклад, як показують розрахунки за формулою (4.12), для низьких колових орбіт ($H_o \approx 200...300 \text{ км}$) збурення драконічного періоду за виток становить приблизно $\Delta T_{op} \approx 30^s$, тобто 0,5% від незбуреного періоду. Тому на великих інтервалах часу таке збурення має враховуватися, оскільки може привести до істотних похибок у прогнозуванні положення КА.

4.3. ЗБУРЕННЯ ОРБІТ, ВИКЛИКАНІ ОПОРОМ АТМОСФЕРИ ЗЕМЛІ

Відомо [25, 26, 44, 49], що будь-яке тіло, яке рухається в атмосфері Землі, зустрічає протидію системи аеродинамічних сил, розподілених по його поверхні. Як уже відзначалось, ці сили впливають на рух перш за все низькоорбітальних КА.

4.3.1. Механізм дії аеродинамічних сил

Рівнодіючу сил опору атмосфери $\bar{A}$ називають *повною аеродинамічною силою*, а її складові у швидкісній системі координат (див. розд. 5) – силою лобового опору $\bar{A}_x^v$, піднімальною силою $\bar{A}_y^v$ та бічною силою $\bar{A}_z^v$, причому

$$\bar{A} = \bar{A}_x^v + \bar{A}_y^v + \bar{A}_z^v. \quad (4.15)$$

При вивченні орбітального руху КА зазвичай враховують тільки силу лобового опору $\bar{A}_x^v$, модуль якої пропорційний щільності середовища ρ , лінійній швидкості КА V і площі його міделевого перерізу S_m :

$$A_x^v = 0,5 \rho V^2 C_x S_m = q_v C_x S_m, \quad (4.16)$$

де C_x – коефіцієнт лобового опору;

$q_v = 0,5 \rho V^2$ – швидкісний напір.

Напрямок дії сили $\bar{A}_x^v$ завжди протилежний напрямку руху КА, а її величина і характер змін залежать від параметрів атмосфери (див. розд. 1). Нагадаємо, що атмосфера Землі являє собою газове середовище, що обертається разом із Землею як єдине ціле. Висота атмосфери над Землею $h_a \approx 20000$ км.

Збурювальна дія аеродинамічної сили проявляється у наданні КА з масою m додаткового прискорення, модуль якого відповідно до другого закону Ньютона (2.19) з урахуванням виразу (4.16) можна визначити як [16]

$$a_a = A_x^v / m = q_v C_x S_m / m, \quad (4.17)$$

де $\rho = \rho(h)$ – щільність ізотермічної атмосфери на висоті h , модель якої задається співвідношенням (1.7).

Щодо *площі міделевого* (від голанд. *middel* – середній, середина) *перерізу* КА S_m у формулі (4.16) зазначимо, що вона являє собою площу проекції КА на площину, перпендикулярну до напрямку його руху (рис. 4.4).

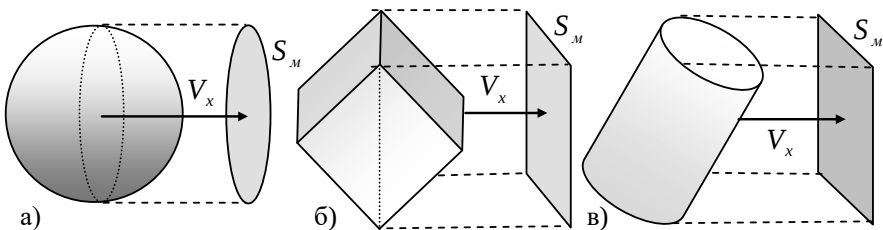


Рис. 4.4. До визначення площі міделевого перерізу кулі (а), куба (б) та циліндра (в)

При розрахунках для неорієнтованих КА приймають

$$S_M \approx 0,25 \cdot S_\Sigma, \quad (4.18)$$

де S_Σ – повна поверхня КА.

Крім того, на практиці часто використовують поняття *балістичного коефіцієнта*, що комплексно характеризує масогабаритні параметри КА і визначається як

$$C_\delta = C_x S_M / 2m. \quad (4.19)$$

При цьому для конусоподібних і випуклих за формою КА, які рухаються у верхніх шарах атмосфери, коефіцієнт лобового опору у формулі (4.19) приймають рівним $C_x \approx 2 \dots 2,5$.

З урахуванням залежності (4.19) формула (4.17) приймає більш компактний вид:

$$a_a = C_\delta \rho V^2. \quad (4.20)$$

Розрахунки з використанням виразу (4.20) показують, що найістотніші збурення параметрів орбіт ШСЗ спостерігаються на висотах $H \approx 150 \dots 200 \text{ км}$. У той же час, як показує практика, при тривалих строках активного існування КА (більше одного року) ці збурення необхідно враховувати і на більших висотах, аж до висот $H \approx 1000 \text{ км}$.

4.3.2. Вплив атмосфери Землі на елементи орбіт

Аналіз отриманих залежностей і відповідні розрахунки показують, що сили опору атмосфери впливають на елементи орбіт КА в такий спосіб [26, 44].

По-перше, елементи, що характеризують розміри і форму орбіти, отримують *вікові* збурення.

Величину цих збурень можна оцінити через еволюції *фокального параметра* та *ексцентриситету* орбіти як функцій істинної аномалії за формулами:

$$\Delta p = -\frac{2p^3}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \frac{a_a}{(1+e\cos\vartheta)^2 \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} d\vartheta; \quad (4.21)$$

$$\Delta e = -\frac{2p^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \frac{a_a}{(1+e\cos\vartheta)^2 \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} d\vartheta. \quad (4.22)$$

По-друге, відбуваються *періодичні* збурення аргументу перигею відповідно до залежності

$$\Delta\omega = -\frac{2p^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \frac{a_a \sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2 \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} d\vartheta. \quad (4.23)$$

При інтегруванні формули (4.23) у межах витка одержимо, що $\Delta\omega_e \approx 0$, тобто на великих інтервалах часу аргумент перигею збурень не відчуває.

По-третє, відсутні збурення інерціальної довготи ВВ $\Delta\Omega \approx 0$ та нахилення орбіти $\Delta i \approx 0$. Це пояснюється тим, що вектор (4.23) перебуває у площині орбіти і не змінює свого положення у просторі.

Наближені формули для аналізу аеродинамічних збурень *фокального параметра* та *ексцентриситету* можна одержати, якщо розкласти праві частини рівнянь (4.21) і (4.22) у ряд по ексцентриситету.

Наприклад, для орбіт з початковим ексцентриситетом в інтервалі $0 < e < (2H_a/a)$ отримані такі результати [26]:

$$\Delta p = -4\pi C_6 \rho_{cp} p^2 \left(1 + v^2/4 + v^4/64 + v^6/2304 + \dots \right).$$

$$\Delta e = -2\pi C_{\delta} \rho_{cp} p \left[v \left(1 + v^2/8 + v^4/192 + \dots \right) + e \left(1 + 3v^2/8 + 5v^4/192 + \dots \right) \right],$$

де $v = ae / H_a$;

$\rho_{cp} = \rho_1 e^{-v}$ – середня щільність повітря;

a – велика піввісь орбіти;

H_a – висота однорідної атмосфери у формулі (1.7);

ρ_1 – щільність повітря на висоті h_1 .

Механізм впливу цих збурень пояснюється рис. 4.5.

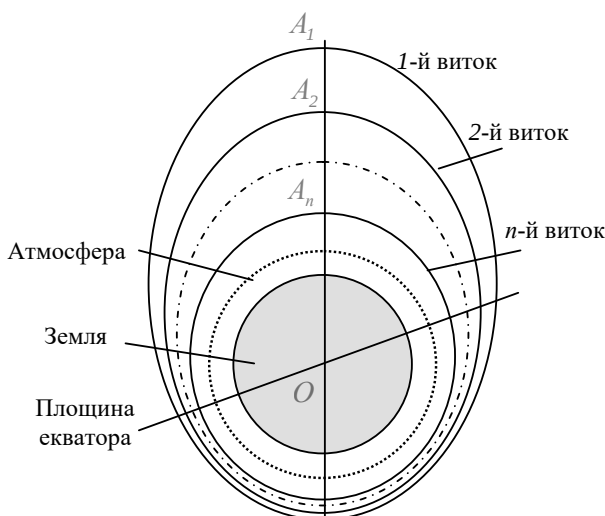


Рис. 4.5. Механізм впливу атмосфери на орбіту

Якщо КА рухається по еліптичній орбіті (1-й виток), перигей якої перебуває у верхніх шарах атмосфери, то саме в перигеї він відчуватиме найбільший опір. Звідси випливає, що за рахунок гальмування в околі перигею зменшуватиметься енергія системи “Земля – КА”.

Внаслідок цього висота перигею практично не змінюватиметься, однак знижуватиметься висота апогею орбіти і зменшуватиметься її ексцентриситет (2-й виток). Розміри орбіти мінятимуться доти, поки КА не перейде до руху по коловій орбіті (n -й виток).

Надалі КА знижуватиметься із колової орбіти по спіральній траєкторії, тому що на кожному наступному витку його лінійна швидкість збільшуватиметься, але в той же час зменшуватиметься його висота і зростатиме щільність атмосфери.

Ці причини приводять до росту сили атмосферного опору (4.20), що служить причиною зменшення повної енергії КА, а отже, зменшення його висоти та зростання швидкості.

Такий процес набуватиме циклічного характеру. При досягненні граничних значень сили опору та температури нагрівання поверхні КА він зруйнується. Отже, атмосферні збурення орбіти обмежують час балістичного існування КА.

Поряд зі збуреннями фокального параметра та ексцентриситету піддаються змінам і деякі інші елементи орбіти КА.

Наприклад, якщо не враховувати обертання атмосфери разом із Землею, то можна оцінити вікові збурення за виток [26]:

середнього радіуса r_{cp} колової орбіти $\Delta r_g = -4\pi C_\delta \rho_{cp} r_{cp}^2$;

радіальної швидкості КА $\Delta V_{r_g} = 2\pi C_\delta \rho_{cp} \sqrt{\mu_0 r_{cp}}$;

зміщення КА уздовж орбіти $\Delta l_g = 12\pi^2 C_\delta \rho_{cp} r_{cp}^2$;

збурення його періоду обертання $\Delta T_g = -12\pi^2 C_\delta \rho_{cp} \sqrt{r_{cp}^2 / \mu_0}$.

4.3.3. Час балістичного існування космічних апаратів

Час балістичного існування КА t_{ich} – це проміжок часу з моменту відділення КА від РН до його повного руйнування в щільних шарах атмосфери. Зауважимо, що в теорії орбітального руху мова йде тільки про рух КА, а не про його функціонування як технічного пристрою. З огляду на це іноді говорять просто про *час існування КА*.

Цей час визначається в основному опором атмосфери і може бути знайдений чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху КА (4.3).

Однак цей метод вимагає значних витрат часу і не дозволяє одержати рішення у загальному виді. Крім того, у багатьох ви-

падках достатньо здійснювати тільки попередню оцінку часу існування КА.

У зв'язку з цим для розрахунків часто використовують наближені формули.

При визначенні часу існування КА за такими формулами з огляду на початкові значення параметрів v_n , e_n , a_n їх орбіти розділяють на три групи [26]:

1. Орбіти з малими значеннями ексцентриситету, що задовольняють умову

$$v_n < 1, e_n < H_a / a_n.$$

2. Орбіти із середніми значеннями ексцентриситету за умови

$$(H / a_n) \leq e_n \leq e_{кр},$$

де $e_{кр}$ – критичне значення ексцентриситету орбіти, яке можна знайти із виразу

$$e_{кр} \approx 0,66 \sqrt{H_a / r_{Пн}} - 0,22 H_a / r_{Пн};$$

$r_{Пн}$ – радіус перигею початкової орбіти.

3. Орбіти зі значними ексцентриситетами, що задовольняють умову

$$e_n \geq e_{кр}.$$

Для кожної із цих груп орбіт є формули для наближеного визначення часу існування КА:

а) за заданим значенням коефіцієнта лобового опору C_x та щільності повітря ρ (застосовуються до запуску КА на орбіту);

б) за обмірюваним значенням зменшення періоду обертання КА за виток ΔT_e (застосовуються після запуску КА).

Наприклад, формули визначення часу існування КА на орбітах першої та другої груп мають такий вигляд:

$$t_{ич1} = \frac{H_a}{2 \rho_{cp} C_b \sqrt{\mu_0 a_n}} \cdot \frac{1}{1 + v_n^2/8 + v_n^4/192 + \dots};$$

$$t_{ич2} = \frac{3 H_a T_n}{2 a |\Delta T_e|} \cdot \frac{1 + v_n^2/4 + v_n^4/64 + v_n^6/2304 + \dots}{1 + v_n^2/8 + v_n^4/192 + \dots},$$

де T_n – початкове значення періоду обертання.

При значеннях $e \rightarrow 0$ ці формули стають придатними для визначення часу існування КА і на колових орбітах. Для орбіт третьої групи використовують більше складні залежності.

Умовам, за яких КА припиняє своє існування, відповідають елементи так званої критичної орбіти:

висота критичної орбіти $H_{кр}$;

період обертання КА на критичній орбіті $T_{кр}$.

При цьому під *критичною* розуміють таку орбіту, на якій через вплив атмосфери КА може зробити *не більше одного оберту* навколо Землі.

Критичні значення висоти орбіти і періоду обертання КА на ній залежать від балістичного коефіцієнта (4.19) і прийнятої в розрахунках моделі атмосфери.

Як показує досвід, при змінах балістичного коефіцієнта в широких межах значення критичних параметрів орбіти змінюються мало.

Вважається, що висота критичної орбіти і період обертання КА на ній лежать у межах:

$$H_{кр} = 100...120 \text{ км}, \quad (4.2)$$

$$T_{кр} = 86,5...86,6^m. \quad 4)$$

Виходячи з цього, на практиці використовують орбіти з висотами $H \geq 150 \text{ км}$.

Зауважимо, що взагалі згідно із міжнародними нормами [30] штучні тіла прийнято називати штучними супутниками Землі, якщо вони рухаються по балістичній траєкторії і мають висоту $H \geq 100 \text{ км}$.

4.4. ЗБУРЕННЯ ОРБІТ, ВИКЛИКАНІ ПРИТЯГАННЯМ СОНЦЯ ТА МІСЯЦЯ

Як уже відзначалось раніше, у загальному випадку на рух КА впливають усі небесні тіла. Однак дією планет на КА, які перебувають на орбітах ШСЗ із висотами $H \leq 10^5 \text{ км}$, зазвичай нех-

тують, а враховують тільки вплив на них Сонця і Місяця. Загальне уявлення про їхній вплив дає табл. 4.1 [26].

Таблиця 4.1

Вплив Сонця і Місяця на орбітальний рух КА

Висота КА, км	Максимальне збурювальне прискорення, $\times 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$		Відношення максимального збурювального прискорення до прискорення вільного падіння, $\times 10^{-6}$			
	від Сонця	від Місяця	від Сонця	від Місяця	від несферичної Землі	від аномалій Землі
0	0,50	1,10	0,051	0,11	3400	60
2 000	0,66	1,40	0,12	0,25	1900	35
10 000	1,33	2,80	0,86	1,9	510	9,1
20 000	2,10	4,50	3,6	7,9	200	3,5
50 000	4,40	9,80	35	77	43	0,78
100 000	8,30	18,00	240	520	12	0,22

Як видно із табл. 4.1, амплітуди максимальних збурювальних прискорень, викликаних притяганням Місяця, приблизно у 2 рази більше сонячних і зі збільшенням висоти мають тенденцію зростати. Це можна пояснити тим, що Місяць хоча й має менший гравітаційний параметр, чим Сонце, але перебуває значно ближче до КА, чим воно.

Зі зростанням висоти КА над поверхнею Землі, незалежно від того, наближається КА до Місяця чи Сонця або віддаляється від них, збурювальне прискорення зростає у порівнянні із центральним.

У цілому вплив Сонця та Місяця на рух ШСЗ зводиться у першому наближенні до вікових і довгоперіодичних збурень па-

раметрів їхніх орбіт. При цьому вікові збурення цих параметрів за один виток можна оцінити за допомогою таких виразів [26]:

$\Delta a_j = 0$ – збурення великої півосі орбіти;

$\Delta e_j \approx 1178 K_j e \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 i \sin 2\omega$ – збурення ексцентриситету орбіти;

$\Delta i_j \approx -5,89 K_j e^2 \left(1 - e^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sin 2i \sin 2\omega$ – збурення нахилення орбіти;

$\Delta \Omega_j \approx -471 K_j \left(1 - e^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^2 + 5e^2 \sin^2 \omega\right) \cos i$ – збурення інерціальної довготи ВВ орбіти;

$\Delta \omega_j \approx 471 K_j \left(1 - e^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left[5 \cos^2 i \sin^2 \omega + \left(1 - e^2\right) \left(2 - 5 \sin^2 \omega\right)\right]$ – збурення аргументу перигею;

$\Delta H_{\Pi j} \approx -1178 K_j a e \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 i \sin^2 \omega$ – збурення висоти перигею орбіти,

де $K_j = \mu_j a^3 / \mu_0 r_j^3$ – коефіцієнт, що характеризує положення КА відносно j -го небесного тіла і Землі;

$\mu_j = \gamma \cdot M_j$ – гравітаційний параметр j -го небесного тіла;

$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2 = 6,672 \cdot 10^{-20} \text{ Н} \cdot \text{км}^2 / \text{кг}^2$ – гравітаційна постійна;

M_j – маса j -го небесного тіла;

$\mu_0 \approx 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі;

a – велика піввісь орбіти КА;

r_j – відстань до j -го небесного тіла, що притягає (Сонця або Місяця) від Землі.

Приклад 4.2. Розрахувати гравітаційні параметри Сонця і Місяця. Прийняти масу Сонця $M_c = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, а масу Місяця $M_m = 7 \cdot 10^{22} \text{ кг}$.

Розв’язання. Для порівнянності очікуваних результатів відносно гравітаційного параметра Землі виразимо значення гравітаційної постійної через “кілометри”, тобто $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-20} \text{ Н} \cdot \text{км}^2 / \text{кг}^2$. Тоді для Сонця отримаємо

$\mu_c = \gamma \cdot M_c = 6,672 \cdot 10^{-20} \cdot 2 \cdot 10^{30} = 13,344 \cdot 10^{10} \text{ км}^3 / \text{с}^2$, а для Місяця –
 $\mu_m = \gamma \cdot M_m = 6,672 \cdot 10^{-20} \cdot 7 \cdot 10^{22} \approx 4,67 \cdot 10^3 \text{ км}^3 / \text{с}^2$.

Крім того, із формули (2.2) можна знайти величину прискорення, повідомлюваного КА j -м небесним тілом, як

$$g_j = \mu_j / r_j^2 = \mu_j / (R_j + h_j)^2, \quad (4.25)$$

де R_j – середній радіус j -го небесного тіла;

h_j – висота над j -м небесним тілом.

Наприклад, прискорення тіл за рахунок сили притягання Землі на висоті $h_z = H$ (прискорення вільного падіння) визначається із (4.25) як

$$g = \mu_0 / r^2 = \mu_0 / (R_z + H)^2, \quad (4.26)$$

звідки при $H = 0$ одержимо значення прискорення вільного падіння на поверхні Землі $g_0 = \mu_0 / R_z^2 \approx 9,81 \text{ м} / \text{с}^2$.

Аналогічно можна одержати значення прискорення вільного падіння на поверхні Сонця та Місяця.

Приклад 4.3. Розрахувати прискорення вільного падіння тіл на поверхні Сонця g_c і Місяця g_m . Прийняти радіуси цих небесних тіл відповідно $R_c \approx 109 \cdot R_z \approx 7 \cdot 10^5 \text{ км}$; $R_m \approx 0,2725 \cdot R_z \approx 1738 \text{ км}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (4.25), поклавши в ній $h_j = 0$, та результатами із прикладу 4.2. Тоді для Сонця $g_c = \mu_c / R_c^2 = 13,344 \cdot 10^{10} / 49 \cdot 10^{10} \approx 272 \text{ м} / \text{с}^2 \approx 28 \cdot g_0$, а для Місяця $g_m = \mu_m / R_m^2 = 4,67 \cdot 10^3 / 1738^2 \approx 1,55 \text{ м} / \text{с}^2 \approx 0,16 \cdot g_0$.

Отже, зважаючи на те, що вага тіла масою m визначається за другим законом Ньютона як $P = mg$, із отриманих результатів бачимо, що одне і те ж тіло на Сонці було б у 28 разів важче, а на Місяці – у 6 разів легше, ніж на Землі. Останній результат, зокрема, має практичне значення під час організації польотів на Місяць.

Подальші розрахунки із використанням наведених даних показують, що, наприклад, для орбіти КА з великою піввіссю $a = 7000 \text{ км}$ і ексцентриситетом $e = 0,1$ збурення нахилення орбіти, інерціальної довготи ВВ та аргументу перигею за виток не перевищують $0,5'$, а збурення ексцентриситету становлять $\Delta e \approx 2 \cdot 10^{-7}$.

Однак для КА із тривалим періодом функціонування (кілька років) і для КА, які перебувають на орбітах великих розмірів, місячно-сонячні збурення можуть досягати вагомих значень і їх слід враховувати.

Особливість Сонця як джерела збурень орбіт ШСЗ полягає в тому, що крім гравітаційного впливу на КА воно ще створює так звану силу **тиску сонячного світла**.

Дослідження показують [49], що світловий тиск на висотах $H < 500 \text{ км}$ впливає на КА менше, ніж опір атмосфери, а тому його можна не враховувати. На висотах $500 \text{ км} < H < 700 \text{ км}$ збурювальні впливи сонячного світла і атмосфери приблизно однакові, а починаючи з висот $H > 700 \text{ км}$ – тиск сонячного світла перевищує дію на КА атмосферного опору.

При цьому вплив сонячного світла на рух КА залежить від його **парусності**, під якою розуміється відношення площі поверхні КА до S_{Σ} його маси m , тобто

$$III = k S_{\Sigma} / m,$$

де k – деякий коефіцієнт пропорційності.

Чим більше значення парусності, тим відчутніше впливає на КА тиск сонячного світла.

Крім прямого сонячного випромінювання на рух КА впливають промені, які відбиваються від поверхні Землі і її атмосфери, а також власне теплове випромінювання земної поверхні.

Останній вид випромінювання прагне своїм тиском відштовхнути КА від Землі, причому величина цієї дії над різними регіонами Землі різна. Вона може досягати до 24% від прямої со-

нячної радіації. Тому при прогнозуванні руху окремих типів КА, наприклад геодезичних, нехтувати цим впливом не варто.

Проведений аналіз впливу збурювальних факторів на орбітальний рух КА дозволяє раціонально вибирати параметри орбіт залежно від призначення КА, а також корегувати їх протягом часу балістичного існування КА.

4.5. ВИБІР ОРБІТ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЦІЛЬОВИХ ЗАВДАНЬ

Аналіз параметрів орбіт і ступеня впливу на них збурювальних факторів показав, що теоретично існує велика кількість видів (типів, класів) орбіт, що відрізняються між собою хоча б одним із елементів вектора $\tilde{R}_0$.

Тому для раціонального вибору того або іншого виду орбіти КА, призначеного для вирішення конкретних цільових завдань, необхідно сформулювати певні *вимоги* до КСС, а також ввести обґрунтовані обмеження.

Це можна представити як *завдання вибору* оптимального вектора орбітальних параметрів $\tilde{R}_0^*$ із множини припустимих векторів $\{\tilde{R}_{0j}\}$ з урахуванням:

множини *цільових завдань* КСС $\{C_i\}$;

множини тактико-технічних *вимог* до КСС і її засобів $\{\Theta_k\}$;

множини різних *обмежень* $\{O_l\}$.

Формально таке завдання можна записати як оптимізаційну задачу у вигляді

$$\tilde{R}_0^* = \text{opt}[\{\tilde{R}_{0j}\}, \{C_i\}, \{\Theta_k\}, \{O_l\}],$$
$$j = \overline{1, J}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}, \quad l = \overline{1, L}.$$

Для вирішення такого завдання необхідно, насамперед, визначити множину припустимих видів орбіт, представивши їхню класифікацію та короткий опис.

4.5.1. Класифікація орбіт і їх коротка характеристика

Аналіз вектора орбітальних параметрів $\tilde{R}_0 = \{a, e, \omega, i, \Omega, t_{II}\}$ і практика застосування КС різного призначення показали, що орбіти ШСЗ доцільно розрізняти за такими ознаками (рис. 4.6):

- за формою орбіти;
- за розмірами орбіти (висотою);
- за нахиленням орбіти;
- за періодом обертання КА;
- за сукупністю декількох (n) параметрів.

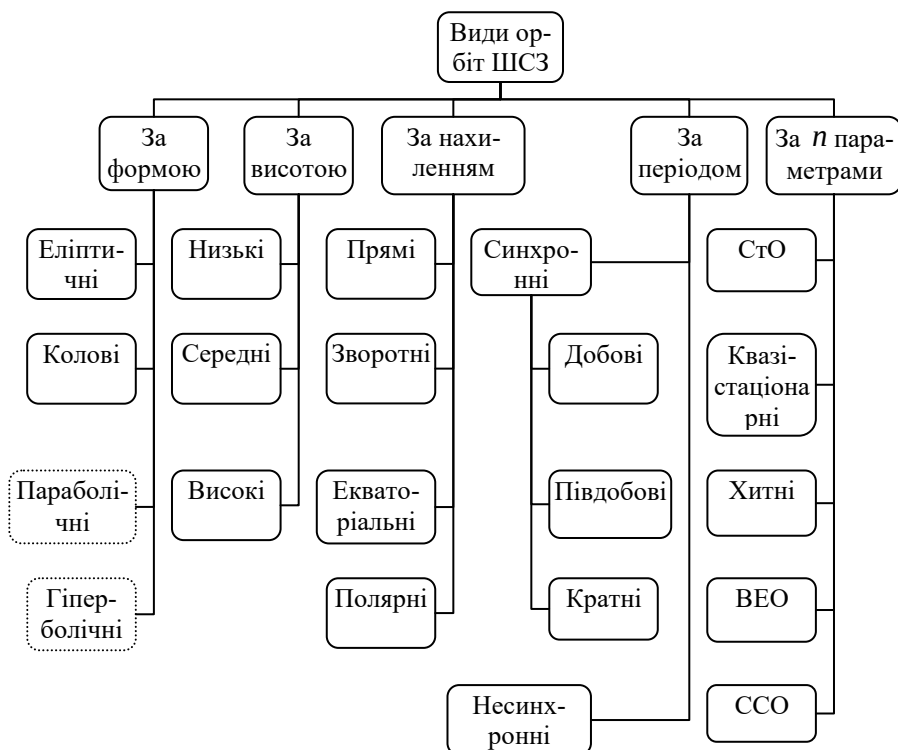


Рис. 4.6. Варіант класифікації орбіт ШСЗ:

СТО – стаціонарні орбіти; ВЕО – високоеліптичні орбіти; ССО – сонячно-синхронні орбіти

Нагадаємо, що *форма орбіти* у загальному випадку визначається ексцентриситетом e кінчного перерізу (кола, еліпса, параболи, гіперболи), що утворює цю орбіту.

При цьому будь-який кінчний переріз задовольняє рівняння (3.51), назване *рівнянням орбіти*

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta(t)}. \quad (4.27)$$

Відмінність між кінчними перерізами полягає у визначенні стосовно до них понять фокального параметра та ексцентриситету, а також у їхніх кількісних значеннях.

Наприклад:

для кола $p = r = a = \text{const}$, $e = 0$;

для еліпса $p = a(1 - e^2)$, $0 \leq e < 1$;

для параболи $p = \text{const}$, $e = 1$;

для гіперболи $p = a(e^2 - 1)$, $e > 1$.

При цьому коло і еліпс являють собою замкнуті, а парабола і гіпербола – розімкнуті криві.

Очевидно, що для КА, призначених для спостережень за наземними об'єктами, підходять замкнуті, тобто колові або еліптичні орбіти.

Колові орбіти забезпечують сталість висоти КА, що спрощує процес кутового наведення поля зору КА на наземні об'єкти, рівномірність орбітального руху КА, а також сталість геометричних умов спостереження і радіозв'язку.

Еліптичні орбіти забезпечують зменшення лінійної швидкості КА в апогейній частині витка, що обумовлює збільшення часу перебування КА над відповідним районом спостереження.

Для розрізнення орбіт за *розмірами* можна використовувати велику піввісь, фокальний параметр, радіус-вектор КА або їх висоту (див. розд. 3).

На практиці часто використовують саме *висоту*, оскільки вона є зручним параметром як з погляду природного сприйняття його наземними спостерігачами, так і для оцінювання дальності дії КА при спостереженнях і передачі інформації.

Нагадаємо, що висота колових орбіт H_o , висоти апогею H_A і перигею H_{II} еліптичних орбіт однозначно пов'язані з великою піввіссю залежностями:

$$a = r_o = R_z + H_o \quad \text{при} \quad e = 0;$$

$$a = 0,5(H_A + H_{II}) + R_z \quad \text{при} \quad 0 < e < 1.$$

При цьому розділення орбіт на низькі, середні і високі є досить умовним. Тому для однозначності прийнемо таку градацію:

- а) $120 \leq H \leq 1000 \text{ км}$ – низькі орбіти;
- б) $1000 < H \leq 30000 \text{ км}$ – середні орбіти;
- в) $30000 < H \leq 100000 \text{ км}$ – високі орбіти.

За нахиленням орбіти ділять на прямі ($0 < i < 90^\circ$), зворотні ($90 < i < 180^\circ$), полярні ($i = 90^\circ$) і екваторіальні ($i = 0^\circ$ або $i = 180^\circ$).

На *прямих* орбітах КА рухається у бік добового обертання Землі. Цей факт дає позитивний ефект при виведенні КА на орбіти, оскільки кінетична енергія обертових разом із Землею стартових комплексів додається до кінетичної енергії стартуючих ракет.

Крім того, рух КА і наземних об'єктів в одну сторону зменшує відносну швидкість їхнього взаємного переміщення, що має істотне значення для організації і технічної реалізації спостережень із космосу.

Більше того, при нахиленнях $i \approx 60^\circ$ досягаються мінімальні збурення аргументу перигею та періоду обертання КА, а також КА на такій орбіті менше піддані впливу радіаційних поясів Землі [25]. Однак з нахилених орбіт важко спостерігати за районами на широтах $|\varphi| > i$.

Полярні орбіти ($i \approx 90^\circ$) забезпечують за один виток послідовний огляд районів Землі у всьому діапазоні географічних широт $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$, а за кілька витків – спостереження всієї поверхні Землі.

Екваторіальні орбіти ($i \approx 0^\circ$) забезпечують спостереження в основному тільки тих районів Землі, які примикають до екватора. Для їх формування потрібне розташування стартових комплексів поблизу екватора (в тому числі на плавучих платформах) або здійснення міжорбітальних маневрів КА, що запускаються з інших широт.

Ці особливості дещо стримують використання екваторіальних орбіт. В той же час вони цікаві тим, що дозволяють формувати *стаціонарні орбіти*, про які вже згадувалося та буде сказано далі.

За *періодом обертання* T залежно від співвідношення між ним і зоряною добою $T_{\text{зд}} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$ розрізняють *синхронні* орбіти, для яких $T = T_{\text{сх}} = T_{\text{зд}} / \kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$, і *несинхронні*, коли $T \neq T_{\text{зд}} / \kappa$. Якщо $\kappa = 1$, то орбіти називаються *добовими*, а при $\kappa = 2$ – *півдобовими*. При значеннях $\kappa > 2$ говорять про *кратні* орбіти.

Синхронні орбіти цікаві тим, що при певних значеннях κ можна забезпечити ізотрасовість (сталість траси) орбіти КА, що є однією із необхідних умов безперервності спостережень за одними і тими ж районами Землі. Одним із прикладів синхронних орбіт є сонячно-синхронні орбіти (ССО).

4.5.2. Основні вимоги і обмеження для вибору орбіт

На практиці параметри орбіт КА вибирають з урахуванням:

- цільового призначення КА;
- заданої оперативності та високої достовірності ЦІ;
- мінімального впливу на рух КА збурень, максимального часу їхнього балістичного існування;
- технічних характеристик наземних і бортових засобів;
- енергетичних можливостей РН;
- освітленості Сонцем спостережуваних НО та приладів КА;
- видимості КА одним або декількома НП одночасно;
- прийнятних вартісних витрат і т.п.

Оскільки завдання, які вирішуються різними типами КА, є різними, то єдиний підхід до вибору елементів їх орбіт забезпечити важко. Однак це завдання спрощується, якщо за основний фактор, що визначає вид та параметри орбіти, вибрати *цільове призначення КА*.

В принципі, якщо завдання спостереження за НО (дистанційного зондування Землі), навігації, метеорології, зв'язку, геодезії об'єднати єдиним терміном “обслуговування”, то можна говорити, що *необхідною умовою* виконання цільового завдання будь-яким КА є забезпечення *попадання об'єктів обслуговування в зони огляду або видимості КА*. Виходячи з цього, у загальному випадку завдання ОЕСп теж можна розглядати як “обслуговування” заданих НО.

З урахуванням сказаного на основі відомостей, викладених у попередніх розділах, конкретизуємо вимоги до КСС.

Вимоги, що обумовлені характеристиками БЦА:

- а) дальність дії – максимальна;
- б) дальність до НО спостереження – мінімальна;
- в) смуга огляду – максимальна;
- г) роздільна здатність – найвища;
- д) оперативність одержання ЦІ – максимальна;
- е) достовірність ЦІ – максимальна;
- є) кількість НО спостереження – максимальна;
- ж) розташування НО – у будь-якому районі Землі;
- з) геометричні умови спостереження Землі – однакові;
- и) фізичні умови спостереження для КА ОЕСп – максимум освітленості НО;
- і) орієнтація візирної осі БЦА – у надир чи близько до нього;
- ї) оперативність передачі ЦІ на Землю – у реальному часі.

Балістичні вимоги (обмеження):

- а) висота орбіти мінімальна, але $H \geq H_{кр} \approx 100...120 \text{ км}$;
- б) форма орбіти – колова;
- в) нахилення – пряма орбіта або полярна;
- г) збурення елементів орбіти – мінімальні;
- д) параметри траси – відповідно до цільового завдання;

е) точність визначення елементів орбіти – висока.

Обмеження на енергетичні і вартісні витрати:

а) витрати на запуск – мінімальні;

б) оперативність запуску – висока або задана;

в) витрати на керування рухом – мінімальні;

г) час існування КА на орбіті – максимальний;

д) кількість КА в групуванні – мінімальна;

е) можливості КА – багатофункціональні;

є) автономність роботи – повна.

Вимоги до безпеки експлуатації та захисту інформації:

а) вплив запуску і функціонування КА на середовище перебування людини – мінімальний;

б) вплив факторів космічного простору на функціонування КА – мінімальний.

в) можливість несанкціонованого втручання в роботу КА – мінімальна;

г) доступ до ЦІ – обмежений.

Наведений перелік вимог і обмежень є очевидним, однак не вичерпним, а лише є основою для вибору параметрів орбіт КА ОЕСп та інших типів.

4.5.3. Вибір окремих параметрів орбіт

В основу критерію для вибору параметрів (елементів) орбіт КА багатьох типів доцільно покласти розміри необхідної зони огляду (обслуговування) КА (див. розд. 3), а також дальність дії БЦА D_o . При цьому максимальна дальність до НО, які ще можна спостерігати з КА, що перебуває на висоті H , визначається залежністю (див. рис. 3.14):

$$D_{max} = \sqrt{(R_z + H)^2 - R_z^2} = (R_z + H) \sin \psi_{max} = (R_z + H) \cos \chi_{max}.$$

Очевидно, що БЦА повинна забезпечувати дальність виявлення НО $D_o \geq D_{max}$. Аналогічно при відомому кутовому розрізненні БЦА χ_p можна розрахувати і роздільну здатність БЦА на

Землі $\Delta L_p = f(H, \chi_p)$ як мінімальну відстань між двома НО, які спостерігаються з КА роздільно.

Розмір синхронної орбіти можна розрахувати із виразу (3.22) з урахуванням залежності (3.30) як

$$a_{cx} = \mu_0 \sqrt[3]{(T_{cx} / 2\pi)^2}, \quad T_{cx} = T_{zd} / \kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3...$$

Отже, використовуючи наведені залежності, можна висунути вимоги до висоти орбіти КА, яку слід вибирати із діапазону

$$H_{кр} \leq H \leq H_{max}, \quad H_{max} = f(\Delta L_p, D_o, a_{cx}).$$

Нахилення орбіти КА вибирається залежно від географічних широт районів Землі, які повинен обслуговувати КА ОЕСп. Крім того, воно може вибиратися таким чином, щоб усувати вікові збурення орбіти КА, викликані несферичністю Землі, або ж “стимулювати” їх, наприклад, для створення ССО.

Полярні орбіти ($i \approx 90^\circ$) вибирають для метеорологічних, навігаційних і розвідувальних КА, розташованих на колових орбітах. На *високоеліптичні орбіти* (ВЕО) з нахиленням $i \approx 60^\circ$, а також на СтО виводяться КА зв'язку, глобальної розвідки та КА-ретранслятори.

У загальному ж випадку, коли задана мінімальна широта району обслуговування φ_{min} , нахилення орбіти має вибиратися із умови $(0,5\pi + |\varphi_{min}|) \geq i \geq |\varphi_{min}|$.

При створенні КСС у більшості випадків вибираються *колові орбіти*, які дають можливість КА з постійною швидкістю вести спостереження за НО.

Однак використання *високоеліптичних орбіт* з ексцентриситетом $e \geq 0,7$ дозволяє значно збільшити час знаходження КА в околі апогею (рис. 4.7), тому такі орбіти доцільно використовувати для обслуговування тих районів, над якими розташовується апогей орбіти.

При цьому треба пам'ятати, що при знаходженні КА на апогейній ділянці орбіти зростає висота КА над поверхнею Землі, що приводить до розширення смуги огляду КА, погіршенню з ним радіозв'язку і зниженню роздільної здатності БЦА.

Зрозуміло, що необхідне положення апогею еліптичної орбіти A зручно задавати через значення *аргументу перигею* ω .

Наприклад, якщо апогей повинен перебувати над заданим НО обслуговування P_i , то його проекція на поверхню Землі повинна мати широту φ_A , значення якої дорівнювало б широті НО обслуговування B_i . При цьому аргумент перигею слід вибирати так, щоб кут між екватором і лінією апсид рівнявся $B_i = \varphi_A$.

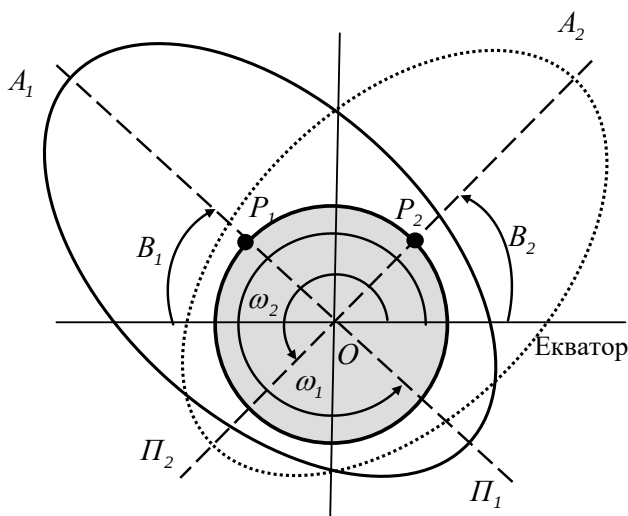


Рис. 4.7. До вибору аргументу перигею

У цьому випадку залежно від нахилення орбіти аргумент перигею має визначатися як $\omega_i \approx \pi + B_i$, коли НО обслуговування P_i перебуває у північній півкулі Землі, або як $\omega_i \approx 1,5\pi + B_i$ – при його розташуванні у південній півкулі.

4.6. СПЕЦИФІЧНІ ВИДИ ОРБІТ

До специфічних видів орбіт КА віднесемо стаціонарні, високоеліптичні та сонячно-синхронні орбіти. При цьому практичний інтерес становлять особливості їх формування та застосу-

вання для вирішення цільових завдань, а також окремі параметри цих видів орбіт.

4.6.1. Особливості та параметри стаціонарних орбіт

Свою назву стаціонарна орбіта (СтО) одержала тому, що КА, який рухається по ній для наземного спостерігача здається нерухомим (висячим, статичним). СтО забезпечують не просто ізотрасовість (сталість траси) руху КА, а його “зависання” над певною точкою на екваторі Землі. Синодичний період обертання такого КА нескінченний ($T_{\text{син}} = \infty$), а його трасою є точка.

Умовою для формування СтО є вимога, щоб кутова швидкість руху КА навколо центра Землі була постійною $\dot{\vartheta}(t) = \text{const}$ і дорівнювала кутовій швидкості обертання Землі навколо своєї осі $\omega_3 = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, тобто

$$\dot{\vartheta} = \omega_3 = 2\pi / T_{30}, \quad (4.28)$$

де $T_{30} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}} = 86164^{\text{s}}$ – тривалість зоряної доби в середньосонячному часі.

Виходячи із цієї вимоги, СтО повинна бути синхронною і являти собою (рис. 4.8, а):

а) пряму орбіту, коли напрямок руху КА по орбіті збігається з напрямком обертання Землі, тобто ($0^\circ \leq i \leq 90^\circ$);

б) екваторіальну орбіту з нахиленням $i = 0^\circ$ (нагадаємо, що орбіти з нахиленням $i = 180^\circ$ теж є екваторіальними, але для СтО вони не придатні за визначенням);

в) колову за формою орбіту, у якої ексцентриситет $e = 0$;

г) добову орбіту, коли сидеричний період обертання КА T дорівнює зоряній добі, тобто

$$T = T_{30} = T_o. \quad (4.29)$$

Як бачимо, умови формування СтО можна задати таким логіко-аналітичним виразом:

$$(i = 0^\circ) \wedge (e = 0) \wedge (T_o = T_{30}) = 1, \quad (4)$$

.30)

де $\wedge$ – знак логічного множення (кон'юнкції, операції “І”).

Нагадаємо, що у загальному випадку сидеричний період обертання КА залежить тільки від розмірів орбіти і визначається із формули (3.30).

Оскільки СтО являє собою *колово* орбіту, то параметри, що входять у формулу (3.30), приймають значення:

$$H_A = H_{II} = H_o ; r_A = r_{II} = r_o ; a = H_o + R_z = r_o = p .$$

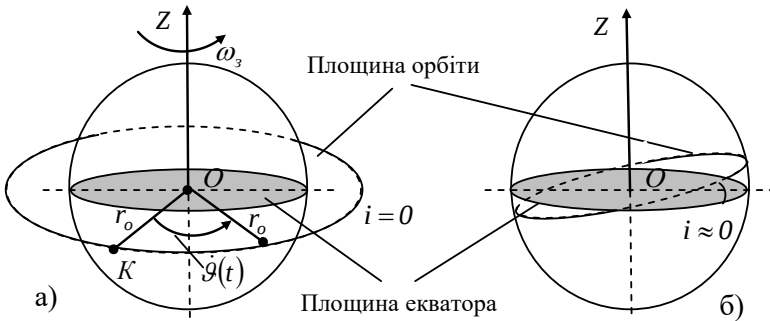


Рис. 4.8. До питання стаціонарних орбіт:
а – строго стаціонарна орбіта; б – квазістаціонарна орбіта

З урахуванням цього формула для розрахунку сидеричного періоду обертання КА на СтО набуває виду:

$$T_o = 2\pi\sqrt{r_o^3 / \mu_o} . \quad (4.31)$$

Приклад 4.4. Розрахувати розміри СтО і лінійну швидкість КА на ній та ПТ на сферичній Землі.

Розв'язання. Для знаходження розмірів із формули (4.31) при $T_o = T_{zo}$ знайдемо радіус СтО $r_o = \sqrt[3]{\mu_o T_{zo}^2 / 4\pi^2} = \sqrt[3]{398600 \cdot 86164^2 / 4\pi^2} \approx 42164 \text{ км}$, а потім її висоту як $H_o \approx r_o - R_z \approx 35800 \text{ км}$. Лінійну швидкість КА на СтО знайдемо із формули (3.57) $V_o = \sqrt{\mu_o / r_o} = \sqrt{398600 / 42171} \approx 3,07 \text{ км/с}$. Для обчислення лінійної швидкості ПТ скористаємось співвідношенням (3.79) $V_{nt} \approx V_o R_z / (R_z + H_o) = 3,07 \cdot 6371 / 42171 \approx 464 \text{ м/с}$. Як бачимо, в даному

випадку лінійна швидкість ПТ дорівнює лінійній швидкості точок земної поверхні $V_{nt} \approx V_z \approx 464 \text{ м/с}$, а це і є передумовою формування СтО.

Що ж стосується *синодичного періоду обертання* КА $T_{\text{син}}$, то нагадаємо (див. розд. 3), що він являє собою інтервал часу між двома послідовними проходженнями КА однієї і тієї ж точки спостереження на *обертовій* Землі.

Для колових екваторіальних орбіт, у тому числі і для СтО, зв'язок між синодичним і сидеричним періодами визначається формулою (3.35), із якої з урахуванням виразів (4.28). (4.29) і (4.31) одержимо для СтО $T_{\text{син}} = \infty$.

На практиці СтО сформувати важко, тому обходяться *квазі-стаціонарними* орбітами (рис. 4.8, б), для яких вдається забезпечити тільки наближені значення одного або декількох параметрів в умові (4.30), тобто:

$$(i \approx 0^\circ) \wedge (e \approx 0) \wedge (T_o \approx T_{zo}) = 1. \quad (4.32)$$

Траса КА на квазістаціонарних орбітах перетворюється із точки в деяку фігуру (петлю, пряму лінію, періодичну криву з невеликою амплітудою – “вісімку” і т.п.).

Коли істотно порушується умова (4.30), наприклад, при $0 < e \ll 1$, то говорять про “хитні” орбіти. Вони одержали таку назву від форми траси КА у вигляді спрямованого відрізка прямої (при $i = 0$), довжина і напрямок якого міняються (хитаються) уздовж екватора.

Як буде показано у розд. 5, для формування СтО бажано використовувати стартові комплекси, розташовані на широтах, близьких до екватора. Прикладом таких засобів може служити бразильський космодром Алкантара, розташований на широті $\varphi \approx 0^\circ$, з якого планується запускати українські РН “Циклон-4”.

Крім того, оригінальним рішенням проблеми запуску КА на СтО є плавучий космодром *Sea Launch* (“Морський старт”), що може запускати українські РН “Зеніт-3SL” в принципі з будь-якої широти Світового океану.

Однією із важливих переваг СтО є можливість створення орбітальних групувань (ОГ) із *малої* кількості КА, за допомогою яких можна обслуговувати практично всю земну кулю (рис. 4.9).

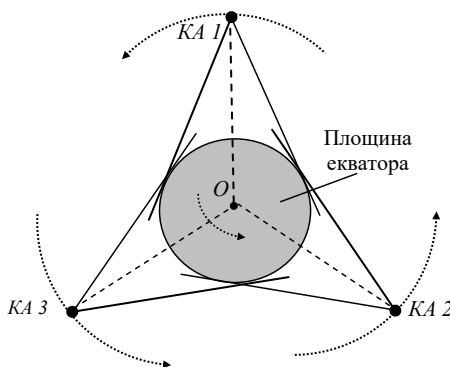


Рис. 4.9. Приклад орбітального групування КА на СтО

Такі ОГ зручні для створення систем виявлення стартів балістичних ракет, ядерних вибухів, космічного зв'язку, телебачення, ретрансляції і т.п.

Отже, СтО, як специфічні орбіти, мають такі *особливості*:

а) для запуску КА на СтО необхідно використовувати космодроми, розташовані на широтах, близьких до екватора, або застосовувати міжорбітальні маневри КА у разі їх запуску з інших широт;

б) для інформаційного обміну між наземними засобами і КА на СтО через значну їх віддаленість потрібні радіолінії з достатнім енергетичним потенціалом;

в) велика висота КА на СтО веде до зниження роздільної здатності БЦА і збільшення площі на земній поверхні, яку накриває діаграма спрямованості антен, що може бути небажаним з огляду на забезпечення скритності роботи КА, перешкодозахищеності радіоліній, електромагнітної сумісності засобів і т.п.;

г) на сьогоднішній день за міжнародними угодами право на розміщення КА на СтО є регламентованим [30].

Справа в тому, що, як видно із виразів (4.30) і (4.32), на СтО досить “тісно”, тобто мало місця у порівнянні з іншим навколоземним космічним простором.

Тому приєкваторіальні держави, розуміючи важливість СТО та обмеженість місця на них, а також деяку небезпеку від “зависання” КА над їх територіями, зажадали від космічних країн узгодження з ними питань використання такого виду орбіт.

4.6.2. Особливості та параметри високоеліптичних орбіт

Високоеліптичні орбіти (ВЕО) одержали свою назву від великої висоти апогею $H_A \approx 40000$ км, а також від явно вираженої витягнутості через великий ексцентриситет $e \approx 0,7$ (рис. 4.10). Висота перигею таких орбіт вибирається із діапазону $H_P \approx 600...700$ км, а сидеричний період обертання КА становить $T_{вео} \approx 0,5 \cdot T_{зод} \approx 12^h$.

Характерним прикладом ВЕО служать орбіти КА типу “Молния”. Робочі ділянки (РД) орбіт цих КА вибираються в околі апогею A . Завдяки цьому тривалість РД досягає $T_{рд} \approx 6...8$ год, тобто більше половини періоду обертання. Це обумовлено тим, що лінійна швидкість КА в апогеї приблизно в $6...7$ раз менше, ніж у перигеї.

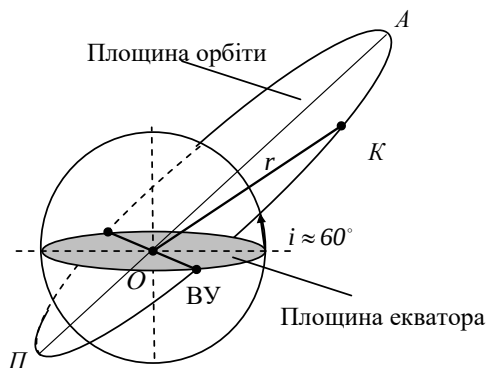


Рис. 4.10. Приклад ВЕО

Дійсно, у загальному випадку лінійна швидкість КА розраховується за формулою (див. розд. 3):

$$V(t) = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (4.33)$$

де $r(t)$ – поточне значення модуля радіуса-вектора КА.

Якщо у формулу (4.33) підставити крайні значення модуля радіуса-вектора, що відповідають точкам апогею $r(t) = r_A$ або перигею $r(t) = r_{\Pi}$ та урахувати, що $r_A + r_{\Pi} = 2a$, то одержимо граничні (екстремальні) значення лінійної швидкості КА

$$V_A = \sqrt{\mu_0 r_{\Pi} / a r_A}; \quad V_{\Pi} = \sqrt{\mu_0 r_A / a r_{\Pi}} \quad (4.34)$$

Як видно із виразів (4.34), екстремальні значення швидкості КА співвідносяться між собою обернено пропорційно відношенню відповідних відстаней:

$$V_A / V_{\Pi} = r_{\Pi} / r_A, \quad (4.35)$$

а поточні значення лінійної швидкості знаходяться в інтервалі $V_A \leq V \leq V_{\Pi}$.

Приклад 4.5. Розрахувати екстремальні значення лінійної швидкості КА на ВЕО, якщо висота апогею $H_A = 40000 \text{ км}$, а висота перигею $H_{\Pi} = 700 \text{ км}$. Порівняти отримані значення відповідно до виразу (4.35).

Розв'язання. Скористаємось формулами (4.34), для чого попередньо знайдемо радіуси апогею $r_A = H_A + R_s = 40000 + 6371 = 46371 \text{ км}$ і перигею орбіти $r_{\Pi} = H_{\Pi} + R_s = 700 + 6371 = 7071 \text{ км}$, а також велику піввісь еліпса $a = 0,5(r_A + r_{\Pi}) = 0,5(46371 + 7071) = 26721 \text{ км}$. Тоді лінійна швидкість КА в апогеї орбіти $V_A = \sqrt{\mu_0 r_{\Pi} / a r_A} = \sqrt{398600 \cdot 7071 / 26721 \cdot 46371} \approx 1,5 \text{ км/с}$, а в перигеї – $V_{\Pi} = \sqrt{\mu_0 r_A / a r_{\Pi}} = \sqrt{398600 \cdot 46371 / 26721 \cdot 7071} \approx 9,9 \text{ км/с}$. При цьому відношення цих швидкостей $V_A / V_{\Pi} = 1,5 / 9,9 \approx 0,15$, що відповідає відношенню радіусів $r_{\Pi} / r_A = 7071 / 46371 \approx 0,15$.

Як бачимо, для ефективного обслуговування НО за допомогою КА на ВЕО бажано використовувати апогейні РД, де лінійна швидкість КА мінімальна, а отже, час перебування КА над цими НО максимальний.

Більше того, на цих же РД швидкість взаємного переміщення КА і обслуговуваних НО мінімальна, що має значення для забезпечення заданого часу спостереження.

Тому для обслуговування НО у північній півкулі Землі вибирають аргумент перигею орбіти із діапазону $\omega \approx 270^\circ \dots 330^\circ$, що забезпечує розташування апогею відносно площини екватора $\omega_A = \omega + 180^\circ \approx 90^\circ \dots 150^\circ$.

При цьому нахилення орбіти, як правило, вибирають близьким до оптимального за критерієм мінімуму збурювань аргументу перигею, тобто $i \approx 60^\circ$.

Що стосується ВЕО КА “Молнія”, то вона є півдобовою, тобто за добу КА робить два оберти навколо Землі, причому один із витків є “західним”, а другий – “східним”. Таку назву вони одержали через географічну довготу ВВ $\lambda_{\text{вв}}$ (рис. 4.11).

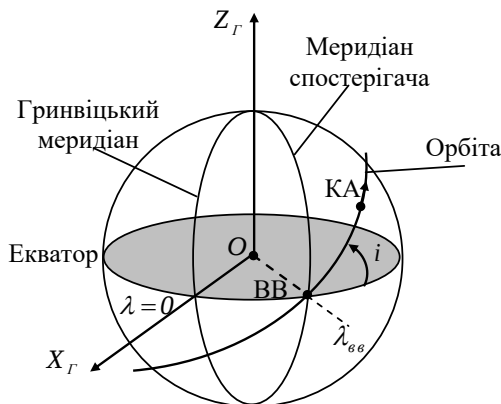


Рис. 4.11. До поняття географічної довготи ВВ орбіти КА

Траса одного із КА типу “Молнія” зображена на рис. 4.12, звідки видно, що для західних витків $\lambda_{\text{вв}}^3 \approx -110^\circ = 110^\circ \text{зд}$, а для східних – $\lambda_{\text{вв}}^c \approx +70^\circ = 70^\circ \text{сд}$, тому для використання обох витків ВЕО необхідно мати наземні засоби, рознесені по довготі приблизно на $\Delta\lambda \approx 180^\circ$, або використовувати КА-ретранслятори.

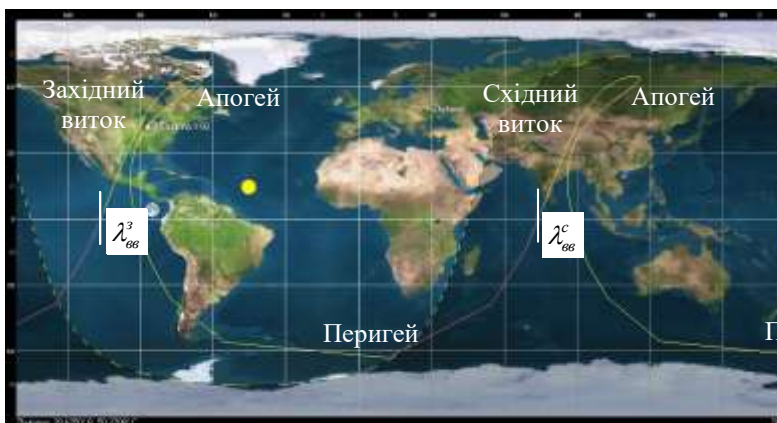


Рис. 4.12. Вид траси КА “Молния”

На практиці для забезпечення безперервності обслуговування заданих районів Землі протягом доби, а також для “накриття” цих районів двома і більше КА одночасно використовують ОГ у складі декількох КА на ВЕО, рознесених спеціальним способом у просторі і часі.

Крім того, відомі варіанти комбінованої побудови ОГ з використанням КА як на ВЕО, так і на СтО.

4.6.3. Особливості та параметри сонячно-синхронних орбіт

ССО – це такі геоцентричні орбіти, площа яких протягом року “відслідковує” положення Сонця. Їх застосовують у тих випадках, коли необхідно забезпечити проходження деякої частини траси КА по освітленій поверхні Землі в один і той же місцевий час.

Це означає, що кут місця Сонця над заданим НО буде одним і тим самим, тобто умови освітленості (без урахування хмарності) будуть однаковими при різних проходах КА над цим НО. Це має принципове значення при вирішенні завдань ОЕСп та інших подібних завдань, коли потрібно одержувати зображення ділянок Землі в оптичному діапазоні випромінювань.

Приклад траєкторії КА на ССО *Ikonos-2* наведений у розд. 3 на рис. 3.12.

Для досягнення ефекту спостереження за Сонцем площиною орбіти КА використовують вікове збурювання інерціальної довготи ВВ орбіти, обумовлене несферичністю Землі, що проявляється в безперервній прецесії лінії вузлів орбіти за певних умов.

Ці умови повинні бути такими, щоб викликати позитивну прецесію лінії вузлів орбіти, тобто зсув площини орбіти у східному напрямку на 360 градусів за рік (близько 1 град. за добу).

Для цього використовують зворотні орбіти ($90^\circ < i < 180^\circ$) з певною висотою. Із практичних міркувань для завдань ОЕСп вибирають висоту КА із діапазону $H \approx 600...800$ км. У цьому випадку досить вибрати нахил орбіти $i \approx 98^\circ$. Тоді сидеричний період обертання КА складатиме $T \approx 96...100$ хв.

Принцип спостереження площиною орбіти за Сонцем пояснюється рис. 4.13. Якщо в деякий момент часу t_1 площина орбіти КА була орієнтована, наприклад, строго по лінії “Земля-Сонце”, то для її орієнтації по цій же лінії в момент t_2 необхідно повернути площину орбіти на кут ϕ_1 . Аналогічно, до моменту часу t_3 необхідно повернути площину орбіти на кут ϕ_2 і т.д.

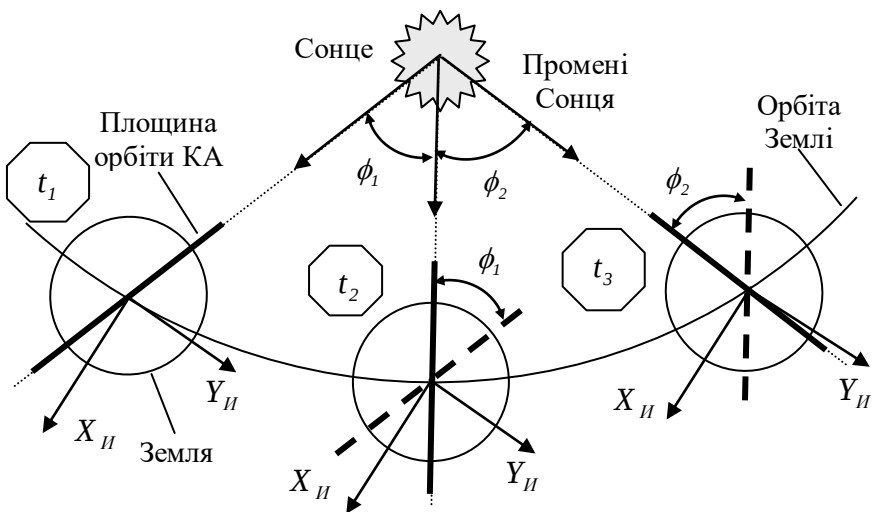


Рис. 4.13. До питання формування ССО

Якщо вважати орбіту руху Землі навколо Сонця коловою, то такий рух можна прийняти за рівномірний. А це означає, що за тропічний рік підсумковий кут повороту площини орбіти КА повинен скласти $\phi_{mp} = 2\pi$ або за середньосонячну добу $\phi_{co} \approx 2\pi / 365 \approx 360^\circ / 365 \approx 1^\circ$.

Математичний апарат для розрахунку параметрів ССО можна представити в такий спосіб.

Зажадаємо, щоб фактична прецесія лінії вузлів орбіти за тропічний рік $\Delta\Omega_{mp}$ дорівнювала необхідній прецесії $\phi_{mp} = 2\pi$ за цей же період часу, тобто

$$\Delta\Omega_{mp} = \Delta\Omega_e \cdot B_{mp} = \phi_{mp},$$

де $\Delta\Omega_e \approx -A \cos i / p^2$ – прецесія лінії вузлів за один виток (знак “–” означає, що для прямих орбіт ($0^\circ < i < 90^\circ$) площина орбіти зміщується у західному напрямку);

$A = 4,15196 \cdot 10^5 \text{ км}^2$ – константа, що враховує форму Землі;

$90^\circ \leq i \leq 180^\circ$ – необхідний діапазон нахилення орбіти для

забезпечення прецесії її площини у східному напрямку;

$p \approx a(1 - e^2)$ – фокальний параметр орбіти;

$a \approx 0,5(H_A + H_{II}) + R_3$ – велика піввісь орбіти;

H_A, H_{II} – висота апогею і перигею орбіти відповідно;

$R_3 = 6371 \text{ км}$ – середній радіус Землі;

$e \approx (H_A - H_{II})/2a$ – ексцентриситет орбіти;

$B_{mp} \approx \Gamma_{mp} / T_{op}$ – кількість витків за тропічний рік;

$\Gamma_{mp} = 365,2422 \text{ зд}$ – тривалість тропічного року у середньосонячних добах (див. розд. 2) ;

$T_{op} \approx T + \Delta T_e$ – драконічний період обертання КА;

$T = 2\pi\sqrt{a^3 / \mu_0}$ – сидеричний період обертання КА;

$\mu_0 = 3,98602 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі;

$\Delta T_e \approx A(1 - 4 \cos^2 i) / \sqrt{\mu_0 p}$ – вікове збурення періоду обертання КА за виток.

У наведених формулах знаком приблизної рівності $\approx$ підкреслено факт розгляду *збуреного* руху КА.

Виходячи із цих співвідношень, обрана ССО українських КА ОЕСп типу “Січ” [48, 52, 57].

При цьому для опису орбіти даного КА замість класичного вектора $\tilde{R}_0$ (3.21) прийнято вектор

$$\tilde{R}_\Omega = \{a_\Omega, e_\Omega, \omega_\Omega, i_\Omega, \Omega, t_\Omega\},$$

елементи якого “прив’язані” не до точки перигею, а до моменту проходження супутником ВВ орбіти t_Ω .

Такий підхід є зручним як для еліптичних, так і особливо для колових орбіт.

У цьому випадку драконічний період обертання КА на *еліптичній* орбіті

$$T_{\partial p \Omega} = 2\pi \sqrt{a_{\Omega}^3 / \mu_0} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_3}{\mu_0 a_{\Omega}^2 (1 - e_{\Omega}^2)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_{\Omega} \right) \frac{\sqrt{(1 - e_{\Omega}^2)^3}}{(1 + e_{\Omega} \cos \omega_{\Omega})^2} + \frac{(1 + e_{\Omega} \cos \omega_{\Omega})^3}{(1 - e_{\Omega}^2)} \right] \right\}, \quad (4.36)$$

де $\varepsilon_3 \approx 2,63 \cdot 10^{10} \text{ км}^5 / \text{с}^2$ – параметр, що враховує полярний стиск Землі.

Нахилення ССО розраховується за формулою

$$i_{\Omega} = \arccos \left[-2\pi \sqrt{\mu_0 a_{\Omega}^7} (1 - e_{\Omega}^2)^2 / \Gamma_{mp} \varepsilon_3 \right], \quad (4.37)$$

причому тривалість тропічного року підставляється у середньосонячних секундах $\Gamma_{mp} = 365,2422 \cdot 86400^{\circ}$.

Якщо орбіта близька до колової ($e_{\Omega} \approx \varepsilon_3 / \mu_0 R_3 \approx 0,001624$, $R_3 = 6378,140 \text{ км}$ – екваторіальний радіус Землі), то її висоту приймають умовно постійною і рівною

$$H_{\Omega} = a_{\Omega} - R_3, \quad (4.38)$$

де $R_3 = 6371 \text{ км}$ – середній радіус Землі.

Драконічний період обертання КА на таких орбітах можна одержати із виразу (4.36) з урахуванням (4.38):

$$T_{\partial p \Omega} = 2\pi \sqrt{(R_3 + H_{\Omega})^3 / \mu_0} \left[1 - \varepsilon_3 (3 - 2,5 \sin^2 i_{\Omega}) / \mu_0 (R_3 + H_{\Omega})^2 \right]$$

Нахилення орбіти у цьому випадку можна знайти із формули (4.37) з огляду на (4.38) як

$$i_{\Omega} = \arccos \left[-2\pi \sqrt{\mu_0 (R_3 + H_{\Omega})^7} / \Gamma_{mp} \cdot \varepsilon_3 \right]. \quad (4.39)$$

Приклад 4.6. Розрахувати необхідне нахилення колової ССО, якщо її висота вибрана $H_{\Omega} = 800 \text{ км}$.

Розв'язання. Скористаємось безпосередньо формулою (4.39), врахувавши значення аргументів, поданих у поясненнях до виразів (4.36) і (4.37):

$$i_{\Omega} = \arccos \left[-2\pi \sqrt{\mu_0 (R_s + H_{\Omega})^7} / \Gamma_{mp} \cdot \varepsilon_s \right] = \\ = \arccos \left[-2\pi \sqrt{398600(6371+800)^7} / 365,2422 \cdot 86400 \cdot 2,63 \cdot 10^{10} \right] \approx 98,6^{\circ}.$$

Крім того, у випадку ССО замість інерціальної довготи ВВ Ω , що визначає положення площини орбіти КА відносно ТВРД, виявилось зручнішим використовувати місцевий середньосонячний час у ВВ t_{Ω} , що визначає положення площини орбіти відносно середнього Сонця.

З урахуванням сказаного, наприклад, для КА “Січ-2” обрана ССО з такими параметрами:

висота орбіти $H_{\Omega} \approx 667$ км ;

велика піввісь $a_{\Omega} \approx 7038$ км ;

нахилення $i_{\Omega} \approx 98^{\circ}$;

драконічний період обертання $T_{op\Omega} \approx 5872^s \approx 97,87^m$;

ексцентриситет орбіти $e_{\Omega} \approx 0,000462$;

аргумент перигею $\omega_{\Omega} \approx 0$;

прецесія лінії апсид $\Delta\omega_{\Omega} \approx 0,22$ град/виток ;

місцевий середньосонячний час у ВВ $t_{m\Omega} \approx 22^h 30^m$;

відхилення цього часу за 5 років не більше, ніж на величину $\Delta t_{m\Omega} = \pm 30^m$.

Особливістю ССО є те [55], що їх неможливо сформувати при:

$B_{c\phi} < 7$ – для колових орбіт;

$B_{c\phi} < 5$ – для еліптичних орбіт,

де $B_{c\phi}$ – кількість витків орбіти за середньосонячну добу.

Повний перелік можливих варіантів формування ССО наведений у табл. 4.2. При цьому для задач ВСП Землі здебільшого застосовують майже колові орбіти на низьких висотах із діапазону $600 \leq H \leq 800$ км.

Таким чином, специфічність розглянутих видів орбіт полягає у тому, що вони поєднують кращі властивості класичних орбіт і дозволяють якісно вирішувати окремі цільові завдання КСС.

При цьому для використання переваг цих та інших орбіт створюють системи із декількох КА – орбітальні групування.

4.7. ТЕХНОЛОГІЯ СТВОРЕННЯ ОРБІТАЛЬНИХ ГРУПУВАНЬ

Оскільки просторово-часові, інформаційні, енергетичні та інші можливості одиночних КА обмежені, то для більш якісного виконання цільових завдань КІС створюють системи із однотипних КА – орбітальні групування (ОГ). У зв'язку з цим на практиці виникає необхідність вибору балістичної структури ОГ, її створення та безперервної підтримки у заданому стані.

4.7.1. Балістична структура орбітального групування та час його існування

Під **орбітальним групуванням** розуміють сукупність однотипних КА, організованих у певну балістичну структуру (БС) для ефективного виконання цільового завдання.

Балістична структура $\tilde{B}$ – це упорядковане просторово-часове розміщення декількох КА у космічному просторі [42].

Вона задається множиною КА в ОГ $\tilde{K}_\Sigma = \{K_n\}$, $n = \overline{1, N}$ і їхнім просторово-часовим положенням (ПЧП) $\tilde{R}_{0n}(t)$:

$$\tilde{B} = \{N, \tilde{R}_{0n}(t)\}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Кількість КА у складі ОГ залежить від характеру цільового завдання КСС, вимог до неї, а також від тактико-технічних характеристик окремих КА. Часто як визначальна вимога до КСС виступає *безперервність* спостережень за всією земною поверхнею або окремими районами (регіонами) на ній. При цьому, як правило, задається *кратність одночасного накриття* обслуговуваних районів огляду.

Наприклад, якщо одиночний КА може обслуговувати заданий район протягом часу $\tau_{p\partial}$, названим *тривалістю* робочої ділянки (РД) орбіти, і потрібно, щоб одночасно обслуговували цей район не менше M КА, то умову безперервності обслуговування такого району на добовому інтервалі T_{cd} можна забезпечити, якщо у складі ОГ функціонує N КА, причому

$$N \geq M \frac{T_{cd}}{\tau_{p\partial}}. \quad (4.40)$$

У цьому випадку завдання формування БС полягає:

а) у розподілі N площин орбіт за інерціальною довготою ВВ Ω (просторова структура);

б) у розташуванні N КА на цих орбітах за часом проходження ними однойменних точок орбіти (часова структура).

Очевидно, що параметри орбіт одного КА відносно іншого і відносно поверхні Землі повинні визначатись $6N$ функціями польотного часу, тобто

$$\tilde{R}_{0n}(t) = \{a_n(t), e_n(t), i_n(t), \omega_n(t), \Omega_n(t), t_{\Pi n}(t)\}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Як просторова, так і часова структури можуть бути рівномірними або нерівномірними. При рівномірній *просторовій структурі* площини орбіт зміщені за інерціальною довготою ВВ Ω на величину кроку

$$\Delta\Omega = 360^\circ / N. \quad (4.41)$$

Тоді інерціальна довгота ВВ n -ї орбіти визначатиметься як

$$\Omega_n = \Omega_1 + (n-1)\Delta\Omega, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.42)$$

де Ω_1 – інерціальна довгота ВВ першої орбіти в ОГ.

Часова структура, як правило, розглядається відносно моментів проходження кожним КА точки перигею або ВВ орбіти.

Наприклад, при рівномірній структурі часове зміщення проходження точки перигею визначається як

$$\Delta t_{\Pi} = T_{cd} / N. \quad (4.43)$$

Тоді час проходження n -м КА точки перигею можна визначити за формулою

$$t_{In} = t_{I1} + (n-1)\Delta t_I, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.44)$$

де t_{I1} – час проходження точки перигею першим КА у площині орбіти.

Приклад 4.7. Сформувати балістичну структуру із N КА на ВЕО, яка забезпечує не менше ніж двократне безперервне накриття заданого НО полем зору БЦА $M \geq 2$, якщо тривалість РД орбіти кожного КА $\tau_{po} = 6^h$.

Розв'язання. Скориставшись формулою (4.40) при $M = 2$, знайдемо мінімально необхідну кількість КА в ОГ $N' = M T_{co} / \tau_{po} = 2 \cdot 24 / 6 = 8$. Далі для забезпечення умови $M \geq 2$ прийемо $N = N' + 1 = 9$. Виходячи з цього, на основі формул (4.41) і (4.43) отримаємо $\Delta\Omega = 360^\circ / N = 360^\circ / 9 = 40^\circ$, $\Delta t_I = T_{co} / N = 24^h / 9 = 2^h 40^m$, а далі з використанням залежностей (4.42) і (4.44) сформуємо балістичну структуру ОГ.

Якщо КА в ОГ розміщені на колових або близьких до колових орбітах, то їхній розподіл у кожній площині можна здійснити за аргументом широти u . Наприклад, при рівномірному розподілі одержимо

$$\Delta u = 360^\circ / N; \quad (4.45)$$

$$u_n(t) = u_1(t) + (n-1)\Delta u, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.46)$$

де $u_1(t)$ – аргумент широти першого КА у площині орбіти в момент часу t .

Зауважимо, що у випадку колових орбіт рівномірний розподіл КА у площині орбіти відповідає рівномірному розподілу за часом і навпаки. Для еліптичних орбіт рівномірний розподіл КА у площині орбіти забезпечити неможливо, оскільки рух КА є нерівномірним.

Очевидно, що через обмежену надійність КА, витрати палива в системах керування їхнім рухом, помилки виводу їх на орбіти, а також внаслідок впливу збурювальних факторів із часом БС може змінюватися (деформуватися). Зрозуміло, що подібні зміни можуть вплинути на якість виконання цільових завдань ОГ.

При цьому проміжок часу, протягом якого ОГ виконує поставлене завдання із заданою ймовірністю, називається **часом активного існування ОГ**.

Для збільшення цього часу необхідно проводити корекцію орбіт КА і відновлювати склад ОГ, створювати в ній надлишковість КА для перекриття їхніх зон огляду, забезпечувати високу надійність апаратури і т.п.

Як уже відзначалось, однією із відмітних ознак ОГ є розподіл КА за інерціальною довготою ВВ орбіти. Однак на практиці більш важливо провести вибір *географічної* довготи ВВ орбіти $\lambda_{\text{вв}}$, оскільки це дає можливість забезпечити рух КА над певним районом обслуговування, забезпечувати ізотрасовість орбіт і т.д.

При цьому географічна довгота ВВ орбіти $\lambda_{\text{вв}}$ виступає як функція інерціальної довготи Ω та поточного польотного часу t і її можна розраховувати за формулою [63, 64]

$$\lambda_{\text{вв}}(t, t_{\text{п}}, \Omega) = \Omega_1 - \tilde{s}(\Omega_1) - T(\Delta\Omega_{\text{вв}} + \omega_3), \quad (4.47)$$

де Ω_1 – інерціальна довгота ВВ орбіти на першому витку;

$\tilde{s}(\Omega_1)$ – всесвітній зоряний час, виражений у градусній мірі, на момент проходження КА ВВ орбіти на першому витку;

$\Delta\Omega_{\text{вв}}$ – прецесія інерціальної довготи ВВ орбіти за виток.

4.7.2. Особливості орбітальних групувань на сонячно-синхронних орбітах

Залежно від типу БЦА орбітальні групування на ССО можуть складатися із однотипних або із різнотипних КА. Стосовно до завдань ВСп у першому випадку використовуються тільки КА ОЕСп або тільки КА РЛСп. У другому випадку – КА обох типів.

Нагадаємо, що КА ОЕСп застосовують для спостережень тільки за *освітленими* Сонцем НО, а КА РЛСп можуть застосовуватися для спостережень як за освітленими, так і за слабо освітленими і неосвітленими НО.

ОГ із однотипних КА на ССО. Нехай є можливість створити ОГ з N КА, причому на кожному КА встановлена БЦА одного і того ж типу з однаковими параметрами поля зору (діаграми спрямованості). Потрібно синтезувати раціональну в деякому сенсі балістичну структуру ОГ із цих КА.

Для спрощення завдання виберемо *однаковими* для всіх КА: нахилення орбіт ($i_1 = i_2 = \dots i_n \dots = i_N$, $n = \overline{1, N}$, $\Delta i = 0$); висоти апогею ($H_{A1} = H_{A2} = \dots H_{An} \dots = H_{AN}$, $n = \overline{1, N}$, $\Delta H_A = 0$); висоти перигею ($H_{П1} = H_{П2} = \dots H_{Пn} \dots = H_{ПN}$, $n = \overline{1, N}$, $\Delta H_{П} = 0$).

Тоді можливі варіанти побудови балістичних структур ОГ можна представити табл. 4.3.

Далі залежно від обраного критерію ефективності ОГ q можна із табл. 4.3 вибрати раціональний (в ідеальному випадку – оптимальний) варіант її балістичної структури за правилом

$$W_{**}^o = \underset{q}{opt}(W_{**}). \quad (4.48)$$

При цьому критеріями ефективності ОГ q можуть бути:

- а) оперативність одержання ЦІ заданого складу і якості;
- б) площа спостережуваних НО;
- в) кратність накриття заданого НО полем зору БЦА;
- г) періодичність спостереження одного і того ж НО;
- д) тривалість спостереження одного і того ж НО;
- е) достовірність ЦІ та ін.

ОГ із різнотипних КА на ССО. Зрозуміло, що використання КА з різними типами БЦА дозволяє розширити можливості ОГ.

Наприклад, спільне використання КА ОЕСп і КА РЛСп може підвищити ефективність виконання завдань спостереження незалежно від часу доби і року та метеоумов.

Один із можливих підходів до синтезу балістичної структури ОГ із різнотипних КА на ССО полягає в такому.

Позначимо множину варіантів БС для ОГ із КА першого типу (див. табл. 4.3) $\overline{W}_1 = \{W_{**}^1\}$, другого типу $\overline{W}_2 = \{W_{**}^2\}$, j -го типу $\overline{W}_j = \{W_{**}^j\}$, $j = \overline{1, J}$.

Тоді за аналогією з виразом (4.48) залежно від обраного критерію ефективності ОГ Q можна вибрати раціональний (в ідеальному випадку – оптимальний) варіант балістичної структури для різнотипних КА за правилом

$$W_{**}^{\Sigma} = \underset{Q}{opt} \left[\bigcap_{j=1}^J \overline{W_j} \right]. \quad (4.49)$$

Для вирішення такого оптимізаційного завдання можна використовувати аналітичні, графічні, імітаційні моделі, реалізовані в сучасних моделюючих комплексах, наприклад, *WXtrack*, *Orbitron*, *STKv6* і т.п.

4.7.3. Приклади побудови орбітальних групувань

На практиці ОГ застосовують для створення КС навігації, зв'язку, глобального контролю Землі, виявлення стартів ракет і ядерних вибухів і т.п.

Приклад ОГ з дев'ятьма КА на ВЕО з періодом обертання $T \approx 12^h$ та одним КА на СтО зображений на рис. 4.14.

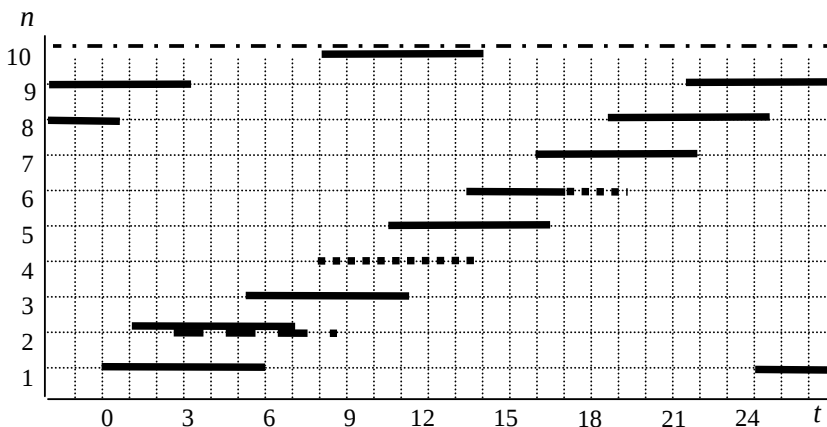


Рис. 4.14. Приклад ОГ на ВЕО з резервним КА на СтО

При цьому для конкретності обрана розрахункова тривалість РД еліптичних орбіт $\tau_{po} \approx 6^h$, необхідна кратність обслуговування заданих районів $M \geq 2$.

Як видно із рис. 4.14, при штатних умовах за рахунок одного надлишкового КА на ВЕО у будь-який момент часу доби на РД перебувало б не менше двох КА. При цьому розрахунковий час зсуву РД орбіт суміжних КА відповідно до формули (4.43) становив би $\Delta t \approx 2^h 40^m$. Однак через зсув РД орбіти КА2, відмову КА4 і скорочення РД КА6 ця вимога не виконується.

Для виходу із подібних ситуацій передбачають у складі ОГ резервні КА, розширення тривалості РД орбіт суміжних КА, запуск на орбіту нових КА і т.п.

Наприклад, на рис. 4.14 показаний резервний КА10 на СтО, котрий включений у роботу замість КА4, що відмовив. Застосування СтО виправдано тим, що при вдалому виборі географічної довготи “зависання” КА на ній можна, в принципі, продублювати кожен із високоеліптичних КА у складі ОГ.

Приклад побудови ОГ із 5-ти КА на ВЕО наведений на рис. 4.15. При цьому забезпечується тільки однократне (з деяким запасом) обслуговування заданих районів.

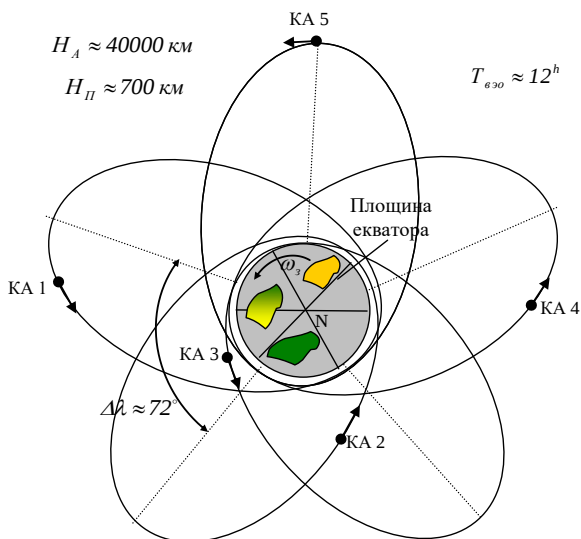


Рис. 4.15. Приклад побудови ОГ із 5-ти КА на ВГО
(вид з північного полюса Землі)

Іншим прикладом ОГ може служити супутникова система виявлення стартів ракет і ядерних вибухів США із шістьма КА типу *IMEWS* на СтО (рис. 4.16). При цьому в одному “гнізді” на орбіті перебуває два КА (робочий і резервний), а самі гнізда рознесені у площині екватора рівномірно на кут $\Delta\lambda \approx 120^\circ$.

Отже, супутники цієї системи постійно “висять” над Індійським, Тихим і Атлантичним океанами, що забезпечує охоплення контролем майже всієї земної кулі, крім тільки приполярних регіонів. Для забезпечення радіозв’язку між КА та наземними засобами використовуються КА-ретранслятори, а також розташування самих наземних засобів у різних регіонах Землі.

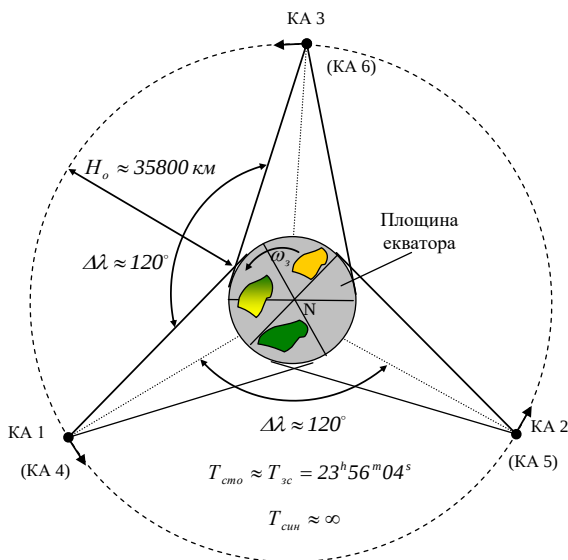


Рис. 4.16. Приклад ОГ КА типу IMEWS
(вид з північного полюса Землі)

Крім того, типовими прикладами багатосупутникових ОГ можуть служити [9, 36] космічні навігаційні системи ГЛОНАСС (Росія) і GPS (Global Positioning System – система глобального позиціонування) “NAVSTAR” (США), в яких функціонують десятки КА на специфічних орбітах, причому на кожній із багатьох орбіт знаходиться декілька супутників, рознесених у часі.

Космічна навігаційна система GPS “NAVSTAR” (рис. 4.17) має у своєму складі ОГ, яке номінально включає 24 штатних та 2 резервних КА. Ці КА функціонують на 6-ти колових *півдобових* орбітах з висотою $H_o \approx 20000 \text{ км}$ та нахиленням $i \approx 55^\circ$, рознесених по довготі на $\Delta\lambda \approx 60^\circ$. На кожній орбіті перебуває по 4 КА, рознесених за аргументом широти на кут $\Delta u \approx 30^\circ$. Така побудова ОГ дозволяє у будь-якій точці земної поверхні одночасно спостерігати не менше 4-х КА, що забезпечує досить точне рішення навігаційних завдань.

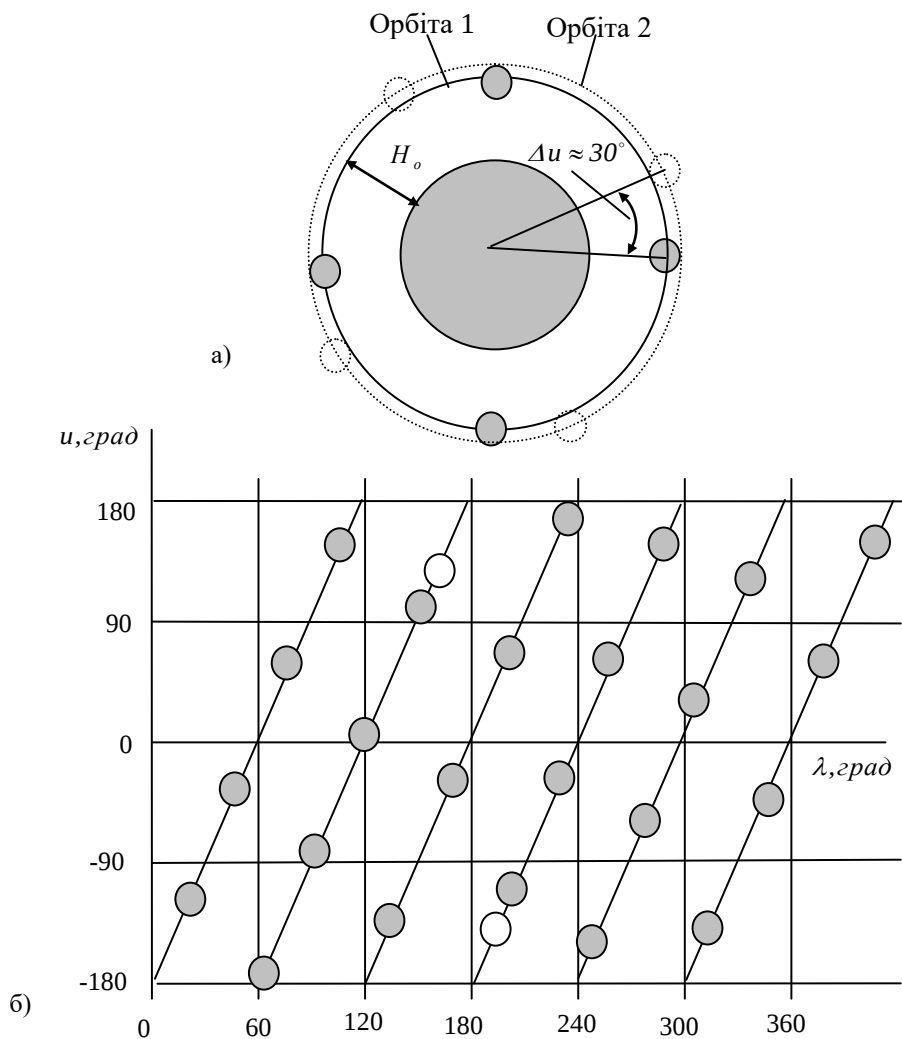


Рис. 4.17. Приклад ОГ системи GPS:
а – вид з північного полюса Землі; б – вид на площині

Глобальна навігаційна супутникова система ГЛОНАСС складається із 24-х штатних КА на колових орбітах з нахиленим $i \approx 64,8^\circ$ у трьох орбітальних площинах по 8 КА в кожній з них. Довготи ВВ трьох орбітальних площин рознесені на кут

$\Delta\lambda \approx 120^\circ$. Номінальний період обертання КА становить $T = 11^h 15^m 44^s$. Висота колової орбіти $H_o \approx 19100 \text{ км}$. У кожній орбітальній площині 8 КА рознесені по аргументу широти на $\Delta u \approx 45^\circ$, а аргументи широти 8 КА в трьох орбітальних площинах зрушені $\Delta u \approx \pm 15^\circ$.

Як видно з наведених прикладів, орбітальні засоби сучасних складних КІС являють собою ОГ з декількох однотипних або різнотипних КА, що дає змогу істотно розширювати їхні можливості по ефективному вирішенню цільових завдань.

Контрольні питання

1. У чому полягають відмінності між диференціальними рівняннями збуреного і незбуреного руху КА?
2. Які збурення найбільш істотні для низьких орбіт?
3. В яких випадках збурення орбіт можуть бути корисними?
4. На які елементи орбіт найбільше впливає несферичність Землі і чому?
5. Для яких цілей на практиці можна використовувати прецесію лінії вузлів?
6. Як можна мінімізувати прецесію лінії апсид?
7. На які елементи орбіт найбільше впливає атмосфера Землі і чому?
8. Від чого залежить час балістичного існування КА на орбіті і як його можна збільшити?
9. Для яких орбіт необхідно враховувати збурення, викликані притяганням Сонця і Місяця?
10. Що таке стаціонарна орбіта і чим вона цікава для практики?
11. Що таке високоеліптична орбіта і чим вона цікава для практики?
12. Що таке сонячно-синхронна орбіта і коли її використовують?
13. Що являють собою орбітальні групування КА і навіщо їх створюють?
14. Якими параметрами орбіт різняться КА у складі орбітального групування?

Розділ 5

КЕРОВАНІЙ ОРБІТАЛЬНИЙ РУХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Як відзначалося у розд. 2, керований орбітальний рух КА відбувається під дією спеціально створюваних реактивних сил. Тому його називають *реактивним*.

Зазначимо, що реактивний рух широко застосовується не тільки в ракетно-космічній техніці, а й в авіації. Однак в останньому випадку як один із компонентів робочого тіла двигуна (окислювача) використовується кисень атмосфери Землі, у той час як РН несе цей компонент із собою. У цьому принципова відмінність між реактивними двигунами літаків і ракет і, отже, причина обмеження висоти польотів для авіації.

Метою керування орбітальним рухом КА може бути переведення його із однієї орбіти на іншу, корекція параметрів орбіти, а також стикування або посадка КА і т.п.

Крім того, незважаючи на те, що *виведення* КА на орбіти зазвичай не відносять до їхнього керованого руху, ми з навчальною метою розглянемо тут деякі питання даного етапу життєвого циклу КА, оскільки при цьому використовується *керований* рух РН.

Отже, будемо говорити про керований рух КА в широкому розумінні. З урахуванням цього матеріал розділу базується на відомостях, запозичених із [4, 18, 20, 25, 26, 39, 44, 48, 49, 59, 60], і містить у собі:

- а) фізичні основи *реактивного* руху;
- б) *запуск* РН і *виведення* КА на задану (проміжну або штатну) орбіту;
- в) міжорбітальні *маневри* для переведення КА із проміжної орбіти на штатну;
- г) періодичну *корекцію* параметрів штатної орбіти.

5.1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ РЕАКТИВНОГО РУХУ

Ракета – літальний апарат, що рухається завдяки реактивній силі, яка виникає при спрямованому відкиданні частини його власної маси (продуктів горіння палива), що безупинно міняється з часом. Такий літальний апарат називають *тілом змінної маси* (ТЗМ).

Тіло змінної маси з дуже малими розмірами у порівнянні з відстанню, яку проходить тіло під дією реактивної сили, розглядають як *точку змінної маси* (тзм).

Класичним прикладом ТЗМ є *одноступінчаста* ракета, початкова маса якої m_n безупинно убуває під час польоту внаслідок витрати палива.

У загальному випадку ракета як ТЗМ складається із таких компонентів:

а) пасивної маси – маси конструкції *ракети* m_p ;

б) *активної* маси – маси палива m_a , яке містить у собі *окислювач* масою m_o та *пальне* масою m_n , причому $m_a = m_o + m_n$;

в) корисної маси – маси *корисного навантаження* (вивідного вантажу) m_{kn} .

Отже, стартова m_{cm} (або початкова m_n) маса будь-якої ракети, у тому числі і РН

$$m_{cm} = m_p + m_a + m_{kn} = m_n. \quad (5.1)$$

Кількісні значення маси компонент у виразі (5.1) для стислості називатимемо *масовими характеристиками* РН.

Для прикладу в табл. 5.1 наведені основні масові характеристики в тоннах ($1t=1000\text{кг}$) деяких українських РН [48]

Таблиця 5.1

Масові характеристики деяких українських РН

Назва РН	Вид старту	Стартова маса, t	Пасивна маса, t	Активна маса, t	Корисна маса, t
Циклон-3	Наземний	189	13	172	4
Зеніт-3SL	Морський	473	42	425	6
Зеніт-3SLB	Наземний	466	37,45	425	3,75

Надалі в процесі польоту РН її поточна маса зменшується за законом

$$m = m(t) = m_{cm} - m_a(t), \quad (5.2)$$

де $m_a(t)$ – маса палива, що зменшується з плином часу t .

Більш складною схемою ТЗМ є складена РН, що включає кілька ракетних блоків або ступенів, кожний з яких має активну m_{ai} і пасивну m_{pi} маси, де i – індекс (номер) окремого ступеня.

Для прикладу на рис. 5.1 зображена двоступенева РН з позначеними масовими характеристиками і співвідношеннями між ними.

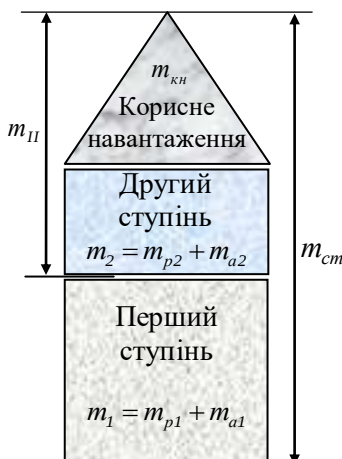


Рис. 5.1. Масові характеристики двоступеневої РН

У процесі польоту такої ракети відбувається **безперервне** відкидання *активних* мас і **дискретне** відкидання *пасивних* мас, тобто для таких ракет характерна не тільки залежність $m_a = m_a(t)$, а і додатково $m_p = m_p(t)$. У цьому випадку поточна маса РН буде зменшуватися за законом

$$m = m(t) = m_{cm} - m_a(t) - m_p(t). \quad (5.3)$$

Наприклад, після відкидання першого ступеня на рис. 5.1 маса РН складатиме величину

$$m_{II} = m_{cm} - m_1 = m_{cm} - m_{a1} - m_{p1} = m_2 + m_{kn}. \quad (5.4)$$

Отже, ракети є літальними апаратами особливого типу. Для опису їхніх траєкторій необхідно знати фізичні *основи реактивного руху і механіки тіл змінної маси*. Остання вивчає закони руху матеріальних точок під дією сил з урахуванням витрати активних мас, а основними співвідношеннями реактивного руху є рівняння І.В. Мещерського і К.Е. Цюлковського.

5.1.1. Основні співвідношення механіки тіл змінної маси. Рівняння І.В. Мещерського

Основні співвідношення механіки ТЗМ базуються на законах класичної механіки, не суперечать їм, а розширюють їх для загальних випадків. Наприклад, другий закон Ньютона (2.17), описуваний диференціальним рівнянням у векторній формі

$$m d\bar{V}/dt = \bar{F}, \quad (5.5)$$

установлює кількісне співвідношення між *постійною* масою матеріальної точки $m = const$, вектором її прискорення $d\bar{V}/dt$ і результуючим вектором зовнішніх сил $\bar{F}_\Sigma = \sum_j \bar{F}_j, j = 1, J$, прикла-

дених до цієї точки.

У випадку ж руху РН ми зустрічаємося з новим фактором, що якісно відрізняється від класичного – *істотною зміною з часом маси ракети за рахунок згорання палива*. Отже, потрібні співвідношення, які враховували б цю особливість.

Одне із таких співвідношень вперше було виведено професором Петербурзького політехнічного інституту І.В. Мещерським у його магістерській дисертації в 1897 р. На честь автора співвідношення назване рівнянням Мещерського [31, 32]. Це рівняння встановлює кількісний зв'язок між масою $m_{зм}$, її прискоренням і рівнодіючим вектором зовнішніх сил, прикладених до цієї точки.

Точкою змінної маси будемо називати геометричну точку, кінцева маса якої змінюється з часом. При цьому закон зміни ма-

си за рахунок відділення матеріальних часток може бути довільним.

При виводі рівняння Мещерського (рівняння руху $m\mathbf{z}$) використовують ряд положень класичної механіки:

а) закон збереження кількості руху системи тіл (2.15);

б) принцип незалежної дії сил: збільшення швидкості точки $m\mathbf{z}$, обумовлені дією зовнішніх сил і процесом випромінювання часток, незалежні і складаються геометрично;

в) принцип “близькодії часток”: взаємодія $m\mathbf{z}$ і відокремлюваної частки припиняється після відділення останньої. Відділяючись, частка надає $m\mathbf{z}$ деяку кількість руху, після чого вона не впливає на рух $m\mathbf{z}$.

Використовуючи ці принципи, можна розглядати тільки рух $m\mathbf{z}$, опускаючи факт руху часток, що відділилися, внаслідок чого рівняння руху набувають форми диференціальних рівнянь.

Розглянемо $m\mathbf{z}$ Ξ (рис. 5.2). Нехай у момент часу t маса точки була m , а її швидкість у деякій абсолютній системі координат – $\bar{\mathbf{V}}$ (рис. 5.2, а). Нехай за час dt , тобто до моменту часу $t + dt$, від точки відділилася частка ξ масою ($-dm$) і набула після відділення абсолютної швидкості $\bar{\mathbf{V}}_\xi$, а швидкість точки Ξ стала $\bar{\mathbf{V}} + d\bar{\mathbf{V}}_\xi$ (рис. 5.2, б).

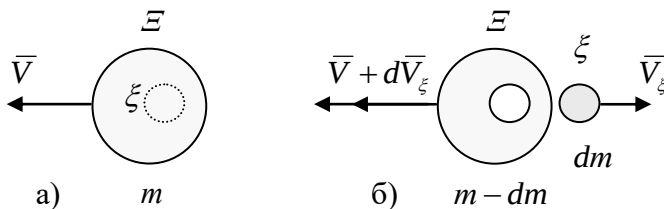


Рис. 5.2. До поняття точки змінної маси

Тоді швидкість частки ξ відносно точки Ξ (відносна швидкість) складе геометричну різницю

$$\bar{\mathbf{V}}_R = \bar{\mathbf{V}}_\xi - \bar{\mathbf{V}}. \quad (5.6)$$

Рівнодіючу зовнішніх сил, прикладених до точки, будемо вважати рівною $\bar{F}_x$. Далі розглянемо механічну систему “*тзм* Ξ – частка ξ , що відділяється”.

Кількість руху цієї системи (див. розд. 2) для моменту часу t визначиться як

$$\bar{Q}_t = m\bar{V}. \quad (5.7)$$

Для моменту же часу $t + dt$ кількість руху складатиме величину

$$\bar{Q}_{t+dt} = [m - (-dm)] \cdot (\bar{V} + d\bar{V}_\xi) + (-dm)\bar{V}_\xi. \quad (5.8)$$

Далі на підставі закону збереження кількості руху зажадаємо, щоб $\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+dt}$. Тоді з урахуванням виразів (5.7) і (5.8) матимемо $m\bar{V} = m\bar{V} + md\bar{V}_\xi + dm\bar{V} + dmd\bar{V}_\xi - dm\bar{V}_\xi$. Далі, нехтуючи малою величиною другого порядку $dmd\bar{V}_\xi$, одержимо співвідношення, що характеризує збільшення швидкості *тзм* Ξ за рахунок відділення частки ξ

$$d\bar{V}_\xi = \frac{dm}{m}(\bar{V}_\xi - \bar{V}). \quad (5.9)$$

Збільшення швидкості *тзм* за рахунок дії зовнішніх сил за малий інтервал часу dt можна визначити, використовуючи вираз (5.5), як

$$d\bar{V}_\xi = \bar{F}_x dt / m. \quad (5.10)$$

Тоді на підставі принципу незалежної дії сил повний диференціал швидкості *тзм* одержимо шляхом додавання складових (5.9) і (5.10):

$$d\bar{V} = d\bar{V}_\xi + d\bar{V}_\xi. \quad (5.11)$$

Зі співвідношень (5.9)...(5.11) після перетворень із урахуванням виразу (5.6) знайдемо

$$md\bar{V}/dt = \bar{V}_R dm/dt + \bar{F}_x. \quad (5.12)$$

Формулу (5.12) називають **рівнянням Мещерського**. Воно виражає основний закон руху *тзм*, який можна сформулювати у такому виді:

добуток маси m на її прискорення дорівнює сумі добутку похідної від маси на відносну швидкість випромінюваних часток та рівнодіючої вектора зовнішніх сил, прикладених до m .

Аналіз рівняння Мещерського. Розглянемо член $\bar{V}_R dm/dt$ у правій частині рівняння Мещерського (5.12). За розмірністю це сила, що залежить від швидкості зміни маси і відносної швидкості випромінюваних часток, тобто обумовлена процесом випромінювання.

Ця сила називається *реактивною* і визначається як

$$\bar{F}_R = \bar{V}_R dm/dt. \quad (5.13)$$

У цій формулі із фізичних міркувань похідна $dm/dt < 0$, оскільки вона характеризує зменшення маси. Тому реактивна сила $\bar{F}_R$ діє протилежно напрямку випромінювання. За модулем ця сила тим більше, чим швидше відбувається процес витрати маси (інтенсивність горіння) і чим більше величина *відносної швидкості випромінювання* (швидкості витікання газів із реактивного сопла) $\bar{V}_R$.

Для сучасних ракет ця швидкість досягає значень $V_R \approx 4...4,5 \text{ км/с}$ [18, 25].

У випадку постійної маси точки Ξ її похідна $dm/dt = 0$, тому і реактивна сила $\bar{F}_R$ перетворюється в нуль. Вона також дорівнює нулю при нульовій швидкості відділення часток $\bar{V}_R$.

Використовуючи вираз (5.13), запишемо *рівняння Мещерського* (5.12) у вигляді

$$m d\bar{V}/dt = \bar{F}_R + \bar{F}_\Sigma. \quad (5.14)$$

У цьому випадку основний закон динаміки m можна сформулювати так:

добуток маси m на її прискорення дорівнює сумі реактивної сили і рівнодіючої зовнішніх сил, прикладених до цієї m .

Порівняємо основні закони руху точок постійної і змінної мас (5.5) і (5.12) або (5.14). За формою відмінність полягає в на-

явності у правій частині рівняння Мещерського додаткового члена (5.13) – реактивної сили $\bar{F}_R$.

Крім того, хоча ліві частини рівнянь за формою ідентичні, у рівнянні Мещерського маса є функцією часу, а у законі Ньютона – це постійна величина. Поклавши у рівнянні Мещерського масу $m = \text{const}$, одержимо із нього вираз (5.5).

Таким чином, рівняння Мещерського є загальним законом динаміки, з якого випливає класичний закон динаміки точки постійної маси – другий закон Ньютона.

5.1.2. Основи теорії реактивного руху.

Перша задача К.Е. Ціолковського

Рівняння Мещерського (5.12) або (5.14) являє собою нелінійне диференціальне рівняння, що у загальному випадку не інтегрується. Для його розв’язання можна застосувати чисельні методи, але вони приведуть до громіздких розрахунків і забезпечать одержання лише часткових результатів.

Тому для практики цікаві ті окремі випадки руху, коли вдається одержати загальне розв’язання рівняння Мещерського. Маючи таке розв’язання в аналітичній формі, можна встановити загальні закономірності, а ряд із них поширити і на випадок руху точки змінної маси.

Ілюстрацією такого положення є задачі К.Е. Ціолковського, який розглядав *інженерні* аспекти створення КА.

Застосовуючи рівняння Мещерського для випадків, коли розв’язок задачі про рух КА може бути отриманий у загальному виді, він дав ряд важливих рекомендацій, які знаходять безпосереднє використання у практиці ракетобудування і у наш час. Ці результати були отримані К.Е. Ціолковським у 1903 р. [31, 32].

При цьому він досліджував два типи задач:

- а) прямолінійний рух ТЗМ (ракети) в ідеальних умовах, коли відсутні зовнішні сили (перша задача);
- б) рух ТЗМ у неоднорідному полі сил тяжіння (друга задача).

Перша задача Ціолковського. Ракета зі змінною масою $m(t)$ рухається при відсутності зовнішніх сил ($\vec{F}_\Sigma = 0$). Відносна швидкість відокремлюваної активної маси постійна за величиною і напрямком ($\vec{V}_R = \text{const}$) і спрямована протилежно вектору швидкості руху ракети $\vec{V}$. У цих умовах необхідно знайти закон руху ракети як ТЗМ.

Розв'язання задачі. З огляду на умови поставленого завдання ($\vec{F}_\Sigma = 0$, $\vec{V}_R = \text{const}$) спроєкуємо рівняння Мещерського (5.12) на напрямок руху ракети. При цьому одержимо

$$m dV/dt = -V_R dm/dt. \quad (5.15)$$

Розділивши далі змінні, запишемо

$$\frac{dV}{dt} / V_R = - \frac{dm}{dt} / m \quad \text{або} \quad \frac{dV}{dt} = -V_R \frac{d}{dt} (\ln m).$$

Інтегруючи це рівняння при початкових умовах $m(t_{cm}) = m_{cm}$, $V(t_{cm}) = V_{cm}$, знайдемо

$$V(t) - V_{cm} = V_R \cdot \ln \frac{m_{cm}}{m(t)}, \quad (5.16)$$

де $m(t) = m_{cm} - \dot{m}(t - t_0) = \dot{m} \cdot \tau$ – поточна маса ракети;

$\dot{m} = dm/dt$ – секундна витрата маси (палива);

$\tau = t - t_{cm}$ – інтервал польоту ракети від моменту старту t_{cm} .

Для першої ділянки руху, коли початкова швидкість ракети $V_{cm} = 0$, із виразу (5.16) одержимо її швидкість у будь-який момент часу після старту (**формула Ціолковського**)

$$V(t) = V_R \cdot \ln \frac{m_{cm}}{m(t)}. \quad (5.17)$$

Ця швидкість називається **характеристичною**. Вона описує рух РН при *ідеальних* умовах польоту, коли не враховується вплив зовнішніх сил, у тому числі і гравітаційних.

Позначивши відношення поточної маси ракети $m = m(t)$ до початкової m_{cm} через μ , подамо *формулу Ціолковського* у вигляді

$$V = -V_R \cdot \ln \mu, \quad (5.18)$$

де $\mu = m/m_{cm}$ – відносна поточна маса ракети.

Аналогічно наприкінці роботи двигуна, коли кінцева маса ракети досягне значення $m = m_\kappa$, швидкість ракети складе

$$V_\kappa = -V_R \cdot \ln \mu_\kappa, \quad (5.19)$$

де $\mu_\kappa = m_\kappa/m_{cm}$ – відносна кінцева маса ракети.

Очевидно, що для *одноступінчастої* ракети при повній витраті палива, коли $m_a(t_\kappa) = 0$, буде справедливим співвідношення $m_\kappa = m_p + m_{\kappa n}$. У цьому випадку ракета досягне максимальної швидкості і формулу (5.16) з урахуванням виразу (5.19) можна подати у вигляді

$$V_{max} = V_R \cdot \ln(m_{cm}/m_\kappa) + V_{cm} = V_R \cdot \ln[m_{cm}/(m_{cm} - m_a)] + V_{cm} \quad (5.20)$$

Цю формулу можна записати і більш компактно:

$$V_{max} = V_R \cdot \ln(1 + Z) + V_{cm}, \quad (5.21)$$

де $Z = m_a/(m_{cm} - m_a) = m_a/(m_p + m_{\kappa n})$ – число Ціолковського.

Приклад 5.1. Розрахувати максимальне значення характеристичної швидкості V_{max} одноступеневої ракети, якщо її стартова маса $m_{cm} = 190t$, маса палива $m_a = 170t$. Знайти для цих умов число Ціолковського Z . Прийняти значення відносної швидкості витікання газів із реактивного сопла $V_R = 4 \text{ км/с}$, а початкову швидкість ракети $V_{cm} = 0$.

Розв'язання. Для знаходження V_{max} скористаємось виразом (5.20) у виді $V_{max} = V_R \cdot \ln[m_{cm}/(m_{cm} - m_a)] + V_{cm} = 4 \cdot \ln[190/(190 - 170)] + 0 = 4 \cdot \ln 9,5 \approx 4 \cdot 2,25 \approx 9 \text{ км/с}$.

Число Ціолковського знайдемо на підставі виразу (5.21) як $Z = m_a/(m_{cm} - m_a) = 170/(190 - 170) = 8,5$.

Отримані результати дозволяють зробити такі висновки:

1. Збільшення швидкості ракети за час роботи її двигуна не залежить від режиму витрати активної маси.

2. Швидкість ракети збільшується пропорційно зростанню відносної швидкості витікання газів із реактивного сопла.

3. Швидкість ракети тим більша, чим менше її відносна кінцева маса μ_k або те ж саме, чим більше число Ціолковського Z . Інакше кажучи, при фіксованих початковій масі ракети m_{cm} і корисного навантаження m_{kn} слід знижувати масу конструкції ракети m_p і збільшувати масу палива m_a .

4. Із розглянутих шляхів збільшення кінцевої швидкості ракети вигідніше йти шляхом поліпшення характеристик двигуна (збільшення відносної швидкості витікання газів V_R), чим удосконалювати конструкцію РН (знижувати μ_k).

5. Отримані результати справедливі для будь-якої області космічного простору. У той же час, оскільки у нашому випадку мова йде про запуски РН із земної поверхні, то цікава інтерпретація окремих залежностей через вагові характеристики ракети, палива, вантажу і т.п.

“Вагова” інтерпретація отриманих результатів. Реактивну силу двигуна F_R зазвичай представляють у вигляді добутку величини вагової секундної витрати палива $\dot{G}_m = g\dot{m}$ на питому тягу двигуна P_n – тягу, що розвивається двигуном при витраті 1 кг палива за одну секунду, тобто

$$F_R = \dot{G}_m \cdot P_n = g\dot{m}P_n, \quad (5.22)$$

де $g = g_0 R_z^2 / (R_z + h)^2$ – прискорення гравітаційного поля на висоті h над Землею;

$g_0 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння на Землі;

$R_z = 6371 \text{ км}$ – середній радіус Землі.

Примітка. Зауважимо, що для узгодження лівої і правої частин виразу (5.22) у системі одиниць СІ питома тяга має розмірність $[P_n] = c$, що не зовсім узгоджується з фізичним тлумаченням цього параметра і викликає певні труднощі для розуміння.

Порівнюючи формулу (5.22) із виразом (5.13), одержимо відносну швидкість витікання газів із реактивного сопла у виді

$$V_R = gP_n. \quad (5.23)$$

Таким чином, відносна швидкість відокремлюваних часток з точністю до постійного множника g дорівнює питомій тязі P_n , обумовленій досконалістю двигуна і застосовуваною паливною парою “пальне-окислювач”.

При цьому на шляху вдосконалення двигунів на практиці настає “насичення”, коли питома тяга наближається до технічно можливої межі [18] $P_n \leq 400...450 \text{ с}$. Звідси на підставі (5.23) можна знайти максимально досяжне на сучасному етапі значення $V_R = gP_n \approx 4...4,5 \text{ км/с}$. Тому використовують і другий шлях – зменшення величини μ_k .

З огляду на те, що в системі одиниць СІ вага G пов’язана з масою m співвідношенням $G = gm$, із виразу (5.19) одержимо

$$\mu_k = G_k / G_{ct}, \quad (5.24)$$

де G_k і G_{ct} – кінцева і початкова (стартова) вага РН відповідно.

Примітка. У ракетній техніці вагу (як і тягу двигунів) часто вимірюють не в ньютонів (H), а у звичних для побуту одиницях: кілограмах, тоннах і т.п. При цьому кількісно вага тіла дорівнює його масі. Тому для розрізнення одиниць маси і ваги останню позначають індексом сили “с”, наприклад, $кгс$, $тс$, причому $1кгс = 9,81H \approx 10H$.

Очевидно, що кінцева вага РН відрізняється від початкової вагою витраченого палива (активної компоненти РН) G_a , тобто $G_{ct} = G_k + G_a$. У свою чергу, кінцева вага РН G_k являє собою суму ваг паливних баків G_b , двигуна G_d , кабелів $G_{каб}$, приладів системи керування $G_{ск}$ та інших елементів конструкції РН G_e , а також ваги корисного навантаження $G_{кн}$, тобто

$$G_k = G_b + G_d + G_{каб} + G_{ск} + G_e + G_{кн}. \quad (5.25)$$

З огляду на те, що на практиці перші три складові кінцевої ваги приблизно пропорційні вазі палива ($G_b + G_d + G_{каб} = \zeta G_a$), формулу (5.25) можна записати як

$$G_{\kappa} = \zeta G_a + G_{\text{ск}} + G_e + G_{\text{кн}}. \quad (5.26)$$

Тоді вираз (5.24) з урахуванням залежності (5.26) запишеться у вигляді

$$\mu_{\kappa} = 1 - \frac{G_a}{(1 + \zeta)G_a + G_{\text{ск}} + G_e + G_{\text{кн}}}. \quad (5.27)$$

Аналіз цього співвідношення показує, що зменшення параметра μ_{κ} , а отже, збільшення кінцевої швидкості V_{κ} при заданій вазі корисного навантаження $G_{\text{кн}}$ можна домогтися:

- а) застосуванням палива з більшою питомою вагою (збільшенням G_a при інших незмінних величинах);
- б) збільшенням ваги палива за рахунок його об'єму (хоча це приводить до збільшення ваги баків, двигуна і кабелів);
- в) удосконаленням конструкції (зменшенням величини ζ);
- г) зменшенням ваги системи керування $G_{\text{ск}}$ та інших елементів конструкції G_e .

Однак і тут є межа, оскільки вага приладів системи керування має свої кінцеві значення, а вага палива не може перевищувати деякої розумної величини. Дійсно, якщо допустити, що вагу палива можна збільшувати безмежно, то, переходячи до граничного значення у виразі (5.27), одержимо

$$\lim_{G_T \rightarrow \infty} \mu_{\kappa} = 1 - 1/(1 + \zeta) = \zeta/(1 + \zeta).$$

Із цього співвідношення видно, що навіть при нескінченному збільшенні стартової ваги РН (ваги палива) величина μ_{κ} для *одноступінчастої* РН прагне до кінцевої межі, а отже, і кінцева швидкість залишається обмеженою.

Справа в тому, що при збільшенні стартової ваги відповідно збільшується вага паливних баків, двигуна та інших елементів, що залежать від геометрії і ваги РН. У польоті вага палива зменшується, а вага конструкції залишається *незмінною*. Звідси у Ціолковського з'явилася ідея *складених (багатоступеневих або багатоступінчастих) ракет*.

В ідеальному варіанті бажано було б безупинно зменшувати вагу конструкції РН у польоті, однак практично скидають тільки відпрацьовані ступені після витрати в них палива. Для *обґрунтування ідеї* багатоступеневих ракет вважатимемо, що n -ступенева РН має постійну швидкість витікання газів $V_R = \text{const}$ у всіх ступенях. Тоді із виразу (5.19) з урахуванням співвідношень (5.3) і (5.4) одержимо значення характеристичної швидкості РН наприкінці роботи першого ступеня (за умови $V_{cm} = 0$)

$$V_{\kappa 1} = V_R \cdot \ln(1 / \mu_{\kappa 1}), \quad (5.28)$$

де $\mu_{\kappa 1} = m_{\kappa 1} / m_{cm} = (m_{cm} - m_{a1}) / m_{cm}$ – відносна маса РН після повної витрати палива у першому ступені;

$m_{\kappa 1} = m_{cm} - m_{a1}$ – маса РН наприкінці роботи першого ступеня (після повної витрати палива в ньому m_{a1});

m_{cm} – стартова (початкова) маса РН.

Аналогічно наприкінці роботи другого ступеня на підставі правила $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ з урахуванням (5.28) отримаємо

$$V_{\kappa 2} = V_R \cdot \ln(1 / \mu_{\kappa 2}) + V_{\kappa 1} = V_R \cdot \ln[1 / (\mu_{\kappa 1} \cdot \mu_{\kappa 2})], \quad (5.29)$$

де $\mu_{\kappa 2} = m_{\kappa 2} / m_{II} = (m_{II} - m_{a2}) / m_{II}$ – відносна маса РН після повної витрати палива у другому ступені;

$m_{\kappa 2} = m_{II} - m_{a2}$ – маса РН наприкінці роботи другого ступеня (після повної витрати палива в ньому m_{a2});

$m_{II} = m_{cm} - m_{a1} - m_{p1}$ – маса РН після повної витрати палива першого ступеня m_{a1} і відкидання його конструкції m_{p1} (початкова маса нової “одноступеневої” РН).

Подібним чином можна знайти значення характеристичної швидкості РН наприкінці роботи n -го ступеня

$$V_{\kappa n} = V_R \cdot \ln(1 / \mu_{\kappa n}) + V_{\kappa(n-1)}. \quad (5.30)$$

Отже, результуюче значення швидкості РН з урахуванням виразів (5.28)...(5.30) складе

$$V_{\kappa} = V_{\kappa n} = V_R \ln[1 / (\mu_{\kappa 1} \cdot \mu_{\kappa 2} \cdot \dots \cdot \mu_{\kappa n})]. \quad (5.31)$$

У формулі (5.31) всі величини $\mu_{\kappa} < 1$. Тому при досить великому числі n значення $\ln(1/\mu_{\kappa n})$ або те ж саме, що значення V_{κ} , можуть бути як завгодно великими.

Приклад 5.2. Розрахувати максимальне значення характеристичної швидкості двоступеневої ракети $V_{\max} = V_{\kappa 2}$, якщо її стартова маса $m_{cm} = 190t$, маса палива $m_a = 170t$. При цьому початкова маса першого ступеня $m_I = 130t$, маса палива в ній $m_{a1} = 120t$, маса другого ступеня разом з масою корисного навантаження $m_{II} = 60t$, а маса палива в ній $m_{a2} = 50t$. Прийняти відносну швидкість витікання газів із реактивного сопла $V_R = 4 \text{ км/с}$, а початкову швидкість ракети $V_{cm} = 0$. Порівняти отримані результати з результатами із прикладу 5.1.

Розв'язання. Для знаходження $V_{\max}$ скористаємось формулою (5.29), обчисливши з урахуванням умови $m_{cm} = m_I + m_{II}$ (див. рис. 5.1) значення відносних мас як $\mu_{\kappa 1} = m_{\kappa 1}/m_{cm} = (m_{cm} - m_{a1})/m_{cm} = (190 - 120)/190 \approx 0,37$; $\mu_{\kappa 2} = m_{\kappa 2}/m_{II} = (m_{II} - m_{a2})/m_{II} = (60 - 50)/60 \approx 0,17$. Тоді за формулою (5.29) $V_{\kappa 2} = V_{\max} = V_R \cdot \ln[1/(\mu_{\kappa 1} \cdot \mu_{\kappa 2})] = 4 \cdot \ln[1/(0,37 \cdot 0,17)] \approx 4 \cdot 2,77 \approx 11 \text{ км/с}$.

Як бачимо, за рахунок двох ступенів можна підвищити максимальне значення характеристичної швидкості РН приблизно на 10% у порівнянні з одноступеневою з такими ж масовими характеристиками.

Таким чином, реальним і єдино можливим шляхом одержання великих кінцевих швидкостей у космічній техніці є створення **багатоступеневих** ракет. Однак збільшення числа ступенів РН спричиняє ускладнення конструктивної схеми, знижує надійність, підвищує вартість.

Тому для кожного завдання існує *оптимальна* кількість ступенів. Ракети середньої дальності, як правило, одноступеневі, міжконтинентальні ракети – двоступеневі і триступеневі. Космічні системи типу “Аполлон” – багатоступеневі.

Прикладне значення формули Ціолковського. Формула Ціолковського, незважаючи на обмеження постановки задачі, знаходить у сучасному ракетобудуванні широке практичне застосування для якісних і кількісних оцінок характеристик ракет.

Наприклад, якщо для оцінки величини поточної або кінцевої швидкості РН точність формули Ціолковського неприйнятна, тому що в ній не враховується дія зовнішніх сил, то для оцінки впливу малих змін *конструктивних параметрів* на кінцеву швидкість вона цілком придатна.

Дійсно. Запишемо формулу Ціолковського (5.18) з урахуванням виразів (5.24) і (5.25) у вигляді, що явно містить конструктивні параметри P_n , G_k , G_a :

$$V_k = gP_n \ln(1 + G_a/G_k). \quad (5.32)$$

Припускаючи зміну параметра P_n малою, можна знайти збільшення кінцевої швидкості, обумовлене цією зміною, у вигляді

$$\Delta V_k(P_n) = \Delta P_n dV_k/dP_n. \quad (5.33)$$

З другого боку, диференціюючи співвідношення (5.32) по параметру P_n , знайдемо

$$dV_k/dP_n = g \ln(1 + G_a/G_k). \quad (5.34)$$

Тоді на основі виразів (5.33) і (5.34) одержимо

$$\Delta V_k(P_n) = g \ln(1 + G_a/G_k) \Delta P_n.$$

Аналогічно можна одержати збільшення швидкості, що обумовлені змінами параметрів G_k і G_a :

$$\Delta V_k(G_a) = g \Delta P_n \Delta G_a/G_{cm};$$

$$\Delta V_k(G_k) = g \Delta P_n \Delta G_k/G_{cm} G_k.$$

Ці співвідношення є простими і зручними для оперативних розрахунків, особливо на етапі проектування ракет. Однак вони дозволяють знаходити тільки *верхні* межі кінцевих швидкостей РН, оскільки отримані для ідеальних умов. У дійсності ж політ РН відбувається в умовах реального навколишнього середовища, вплив якого приводить до *зменшення* цих швидкостей.

5.1.3. Друга задача К.Е. Ціолковського

Як уже відзначалось вище, формула Ціолковського у вигляді (5.17)...(5.21) описує рух РН поза полем земного тяжіння. Вона

зручна для *порівняльного* аналізу літальних апаратів і визначення їх *граничних* льотних характеристик.

Однак для більшості ракет, які становлять практичний інтерес, і насамперед для РН, що стартують із Землі, вона не застосовна, тому що на льотні характеристики таких ракет істотно впливає *земне тяжіння*.

Цей вплив уперше був вивчений Ціолковським, який вважав силу притягання мовби “ланцюгом, що приковує людину до Землі”. Очевидно, що подолання сил земного тяжіння пов’язане з певними витратами енергії, які зменшують кінцеву швидкість ракети.

Використовуючи рівняння Мещерського (5.12), розглянемо криволінійний рух ракети як ТЗМ у полі земного тяжіння при *відсутності атмосфери*.

У цьому випадку на РН діють дві сили: сила тяги і сила земного притягання (сила ваги, вага):

$$mdV/dt = -V_R dm/dt - mg \sin \theta, \quad (5.35)$$

де $mg \sin \theta$ – середньоінтегральна за часом величина складової сили ваги, що діє у напрямку поздовжньої осі ракети;

θ – кут місцевого горизонту (кут нахилу дотичної до траєкторії польоту РН відносно горизонту).

Після інтегрування рівняння (5.35) одержимо

$$V = -V_R \ln \mu - g \tau \sin \theta, \quad (5.36)$$

де $\tau = t - t_{cm}$ – час польоту ракети від моменту старту t_{cm} .

Якщо рух ракети відбувається вертикально ($\theta = 90^\circ$), то рівняння (5.36) набуде вигляду

$$V = -V_R \ln \mu - g \tau,$$

звідки кінцева швидкість ракети визначиться як

$$V_\kappa = -V_R \ln \mu_\kappa - g \tau_\kappa, \quad (5.37)$$

де $\tau_\kappa = t_\kappa - t_{cm}$ – повний (кінцевий) час польоту ракети від моменту старту t_{cm} ;

t_κ – момент закінчення активної ділянки польоту РН.

Перетворивши рівність (5.37) з урахуванням залежностей (5.18), (5.19) і (5.24), одержимо кінцеву швидкість ракети, що рухається вертикально у полі земного тяжіння

$$V_{\kappa} = V_R [\ln(1/\mu_{\kappa}) - (1 - \mu_{\kappa})/n_{cm}], \quad (5.38)$$

де $n_{cm} = P_{cm}/G_{cm}$ – тягоозброєність РН;

P_{cm} – початкова (стартова) тяга РН на рівні моря;

$G_{cm} = g_0 \dot{m} \tau_{\kappa} = G_a / (1 - \mu_{\kappa})$ – стартова вага РН;

G_a – стартова вага палива (активної компоненти) РН.

Із формули (5.38) видно, що кінцева швидкість РН, яка рухається вертикально у полі земного тяжіння, тим більша, чим більша її тягоозброєність (стартове перевантаження) n_{cm} .

Очевидно, що максимальної кінцевої швидкості можна досягти, якщо забезпечити тягоозброєність $n_{cm} \rightarrow \infty$. Це відповідало б *миттєвому* спалюванню палива, що насправді є нереальним. На нинішньому етапі вдається досягти значень тягоозброєності всього лише $n_{cm} = 1,15 \dots 1,20$ [18].

Приклад 5.3. Розрахувати кінцеву швидкість ракети, що рухається вертикально у полі земного тяжіння, як функцію тягоозброєності $V_{\kappa}(n_{cm})$ одноступеневої ракети, якщо її стартова маса $m_{cm} = 190t$, маса палива $m_a = 170t$. Прийняти відносну швидкість витікання газів із реактивного сопла $V_R = 4 \text{ км/с}$, початкову швидкість ракети $V_{cm} = 0$, а тягоозброєність $n_{cm} = 1,15$. Як зміниться ця швидкість, якщо $n_{cm} = 1,20$.

Розв'язання. Для знаходження V_{κ} попередньо знайдемо значення $\mu_{\kappa} = (m_{cm} - m_a)/m_{cm} = (190 - 170)/190 \approx 0,1$. Тоді за формулою (5.38) маємо $V_{\kappa}(1,15) = V_R [\ln(1/\mu_{\kappa}) - (1 - \mu_{\kappa})/n_{cm}] = 4 \cdot [\ln(1/0,1) - (1 - 0,1)/1,15] = 6,08 \text{ км/с}$.

Далі для порівняння знайдемо кінцеву швидкість ракети при $n_{cm} = 1,20$ як $V_{\kappa}(1,2) = V_R [\ln(1/\mu_{\kappa}) - (1 - \mu_{\kappa})/n_{cm}] = 4 \cdot [\ln(1/0,1) - (1 - 0,1)/1,2] = 6,2 \text{ км/с}$.

Як бачимо, по-перше, врахування земного тяжіння дає менше значення швидкості РН у порівнянні з її характеристичною швидкістю (див. приклад 5.1), а, по-друге, збільшення тягоозброєності на 4% ($1,2/1,15 \approx 1,04$) веде до зростання швидкості РН тільки на 2% ($6,2/6,08 \approx 1,02$).

Зауважимо, що коефіцієнт n_{cm} чисельно показує, у скільки разів прискорення РН за рахунок тяги $a_{cm} = P_{cm}/m_{cm}$ перевищує прискорення земного тяжіння на рівні моря $g_0 = G_{cm}/m_{cm}$, тобто

$$a_{cm} = n_{cm} g_0. \quad (5.39)$$

Із формули (5.39) видно, що:

при $n_{cm} = 1$ для РН настає стан повної невагомості;

при $n_{cm} > 1$ ракета відривається від Землі і плавно рухається вертикально нагору;

при $n_{cm} \gg 1$ може проявлятися ефект пострілу.

Зауважимо, що значне збільшення тягоозброєності веде до зростання навантажень, що діють на ракету, обважнення її конструкції і, як наслідок, до збільшення її пасивної маси і зменшення кінцевої швидкості за рівних інших умов.

5.2. ЗАПУСК РАКЕТ-НОСІЇВ І ВИВЕДЕННЯ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ НА ОРБІТУ

Очевидно, що для виведення КА на задану орбіту з параметрами $\tilde{R}_0 = \{a, e, \omega, i, \Omega, t_{II}\}$ необхідно сформулювати і реалізувати цілком певну програму запуску РН і керування її польотом.

Для цього потрібно розрахувати координати точки виведення КА і складові його швидкості в цій точці в деякій СК, тобто необхідно розрахувати *початкові умови* для формування орбіти.

На практиці як початкові умови зазвичай приймають параметри руху центра мас КА в ІСК на момент відключення двигунів РН t_g у точці B (рис. 5.3), а саме:

координати точки виведення X_g, Y_g, Z_g ;

лінійну швидкість КА в цій точці $\dot{X}_g, \dot{Y}_g, \dot{Z}_g$.

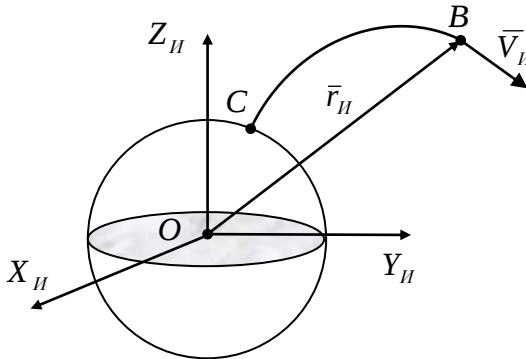


Рис. 5.3. Початкові умови виведення КА на орбіту

Інакше кажучи, з урахуванням виразів (2.42)...(2.44) початкові умови можна подати:

а) радіусом-вектором точки виведення КА на орбіту $\bar{r}_H(t_e) = [X_e \ Y_e \ Z_e]^T$;

б) вектором швидкості КА $\bar{V}_H(t_e) = [\dot{X}_e \ \dot{Y}_e \ \dot{Z}_e]^T$;

в) узагальненим вектором $\tilde{R}_H(t_e) = \{\bar{r}_H(t_e), \bar{V}_H(t_e)\}$.

Формально задачу розрахунку необхідних початкових умов можна представити як знаходження оператора (3.45), який би забезпечив для моменту t_e розв'язок рівняння

$$\tilde{R}_H(t_e) = \tilde{Q}^{H \leftarrow 0} \tilde{R}_0. \quad (5.40)$$

5.2.1. Зв'язок елементів орбіт з початковими умовами

Зв'язок між елементами очікуваної орбіти КА і початковими умовами (5.40) у явному виді можна знайти із формул (3.46) і (3.47). Однак більш повну картину дає перелік формул із [26, 44], які не суперечать раніше введеним, а доповнюють і розширюють їх (деякі індекси опущені):

$i = \arctg \sqrt{(C_1^2 + C_2^2) / C_3^2} = \arccos[(X\dot{Y} - Y\dot{X}) / \sqrt{\mu_0 p}]$ — нахилення орбіти, $(0 \leq i \leq 180^\circ)$;

$p = C^2 / \mu_0 = \left[(X\dot{Y} - Y\dot{X})^2 + (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})^2 + (X\dot{Z} - Z\dot{X})^2 \right] \mu_0^{-1}$ – фокальний параметр орбіти;

$e = f / \mu_0 = \sqrt{1 - p/a}$ – ексцентриситет орбіти;

$a = \mu_0 r / (2\mu_0 - rV^2) = p / (1 - e^2)$ – велика піввісь орбіти;

$\Omega = \arcsin[C_1 / (C \sin i)]$ або $\Omega = \arccos[-C_2 / (C \sin i)]$ – інерціальна довгота ВВ орбіти, $(0 \leq \Omega \leq 360^\circ)$;

$\omega = \arcsin[(f_2 \cos \Omega - f_1 \sin \Omega) / (f \cos i)]$ або

$\omega = \arccos[(f_2 \sin \Omega + f_1 \cos \Omega) / f]$ – аргумент перигею орбіти, $(0 \leq \omega \leq 360^\circ)$;

$u = \arcsin[(Y \cos \Omega - X \sin \Omega) / (r \cos i)]$ або

$u = \arccos[(Y \sin \Omega + X \cos \Omega) / r]$ – аргумент широти КА, $(0 \leq u \leq 360^\circ)$;

$\vartheta = u - \omega$ – істинна аномалія КА, $(0 \leq \vartheta \leq 360^\circ)$;

$t_{II} = t_k - \sqrt{a^3 / \mu_0} (E - e \sin E)$ – час проходження КА перигею;

$E = 2 \arctg(\sqrt{(1-e)/(1+e)} \operatorname{tg} 0,5 \vartheta)$ – ексцентрична аномалія КА;

$\mu_0 = 398602 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційний параметр Землі;

$H_{II} = r_{II} - R_3 = a(1-e) - R_3$ – висота перигею орбіти;

$H_A = r_A - R_3 = a(1+e) - R_3$ – висота апогею орбіти;

$r_{II} = a(1-e) = p / (1+e)$ – модуль радіуса-вектора перигею орбіти;

$r_A = a(1+e) = p / (1-e)$ – модуль радіуса-вектора апогею орбіти;

$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \text{const}$ – вектор кінетичного моменту (інтеграл площ);

тичного моменту (інтеграл площ);

$\vec{f} = \left(\vec{V} \times \vec{C} - \frac{\mu_0 \vec{r}}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{r} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -C_3 & C_2 \\ C_3 & 0 & -C_1 \\ -C_2 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \text{const} -$

вектор (інтеграл) Лапласа;

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = rV \cos \theta - \text{модуль інтеграла площ};$$

$$C_1 = Y\dot{Z} - Z\dot{Y} - \text{компонент інтеграла площ по осі } X_H;$$

$$C_2 = Z\dot{X} - X\dot{Z} - \text{компонент інтеграла площ по осі } Y_H;$$

$$C_3 = X\dot{Y} - Y\dot{X} - \text{компонент інтеграла площ по осі } Z_H;$$

$$C_1X + C_2Y + C_3Z = 0 - \text{рівняння площини орбіти в ІСК};$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - \text{модуль радіуса-вектора КА};$$

$$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} = \sqrt{\mu_0(2/r - 1/a)} = \sqrt{V_r^2 + V_\perp^2} - \text{модуль вектора лінійної швидкості КА};$$

$$\theta = \arctg(V_r/V_\perp) - \text{кут місцевого горизонту};$$

$$V_r = \sqrt{\mu_0/p} \cdot e \cdot \sin \vartheta - \text{модуль вектора радіальної складової лінійної швидкості КА};$$

$$V_\perp = \sqrt{\mu_0/p} \cdot (1 + e \cdot \cos \vartheta) - \text{модуль вектора трансверсальної складової лінійної швидкості КА};$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} - \text{модуль інтеграла Лапласа};$$

$$f_1 = XV^2 - \frac{\mu_0 X}{r} - rV_r \dot{X} - \text{інтеграл Лапласа по осі } X_H;$$

$$f_2 = YV^2 - \frac{\mu_0 Y}{r} - rV_r \dot{Y} - \text{інтеграл Лапласа по осі } Y_H;$$

$$f_3 = ZV^2 - \frac{\mu_0 Z}{r} - rV_r \dot{Z} - \text{інтеграл Лапласа по осі } Z_H;$$

$$\begin{cases} C_1X + C_2Y + C_3Z = 0; \\ \mu_0 r + f_1X + f_2Y + f_3Z = C \end{cases} - \text{рівняння незбуреної орбіти в ІСК}.$$

Використовуючи наведений перелік формул, можна розраховувати:

а) параметри очікуваної орбіти

$$\tilde{R}_0^o = \{a^o, e^o, \omega^o, i^o, \Omega^o, t_{II}^o\}$$

при відомих фактичних початкових умовах її формування

$$\tilde{R}_H^\phi(t_s) = \{\bar{r}_H^\phi(t_s), \bar{V}_H^\phi(t_s)\};$$

б) необхідні початкові умови

$$\tilde{R}_H^n(t_s) = \{\bar{r}_H^n(t_s), \bar{V}_H^n(t_s)\}$$

для формування заданої орбіти

$$\tilde{R}_0^3 = \{a^3, e^3, \omega^3, i^3, \Omega^3, t_H^3\}.$$

Для цього розглянемо ряд додаткових СК, які застосовуються при старті РН і виведенні КА на задану орбіту.

5.2.2. Основні системи координат, які використовуються при виведенні космічних апаратів на орбіту

У розд. 2 уже введений цілий ряд систем координат загального призначення, а саме: ІСК, ГрСК, ГцСК, ГдСК, ГгСК, ТППСК, ТПССК.

Крім того, стосовно до орбітального руху КА у розд. 3 використовувались ОрНСК та інші СК.

Незважаючи на таке різноманіття СК, практика виведення КА на орбіти зажадала ввести ще ряд додаткових СК, що враховують особливості старту і руху РН на вивідному витку орбіти КА [18, 20, 25, 60].

Топоцентричні прямокутні системи координат

СтСК – стартова прямокутна СК $Sx_c y_c z_c$ (рис. 5.4). Її початок знаходиться на поверхні Землі у точці старту C , що задається географічною широтою φ і геоцентричною довготою λ .

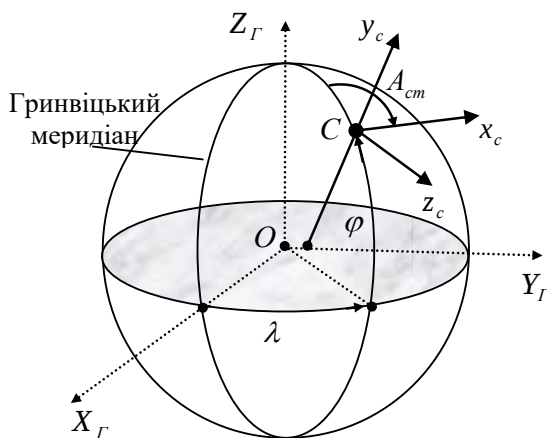


Рис. 5.4. Стартова СК

Основна площина – площина місцевого горизонту, у якій лежать осі x_c і z_c . Вісь x_c задається азимутом запуску (стрільби) A_{cm} , відлічуванім за годинниковою стрілкою від напрямку на Північний полюс до площини траєкторії запуску РН; вісь y_c спрямована вверх прямо протилежно напрямку сили ваги; вісь z_c доповнює систему до правої.

ЗмСК – *земна* прямокутна СК Cx_zy_z . Її початок знаходиться на поверхні Землі у точці старту C , заданій *геоцентричною* широтою φ_u і *геоцентричною* довготою λ . Основна площина – площина місцевого горизонту, у якій лежать осі x_z і z_z . Вісь $x_z \equiv x_c$ задається азимутом запуску (старту) A_{cm} ; вісь y_z спрямована вверх по прямій, що проходить через центр мас Землі і точку старту; вісь z_z доповнює систему до правої. Як бачимо, ця СК відрізняється від попередньої тільки видом (способом відліку) *широти* точки старту.

СтПСК – стартова *початкова* прямокутна СК $Cx_n y_n z_n$. Її початок збігається з початком СтСК. Координатні осі в момент старту збігаються з однойменними осями СтСК і надалі не міняють свого положення відносно *оберткової* Землі.

Таким чином, ця СК є *інерціальною*. Її ще називають *гіроскопічною*, оскільки фізично вона реалізується (зберігається) за допомогою гіроскопів.

СтЗСК – стартова “заморожена” прямокутна СК $Cx_m y_m z_m$. Її початок збігається з початком СтСК. Координатні осі в момент старту збігаються з однойменними осями СтСК і надалі не міняють свого положення *відносно* ІСК. Отже, ця СК є також *інерціальною*.

Барицентричні прямокутні системи координат

ЗвСК – зв’язана прямокутна СК $Cx y z$ (рис. 5.5, а). Її назва походить від того, що вона дійсно жорстко зв’язана з корпусом ракети.

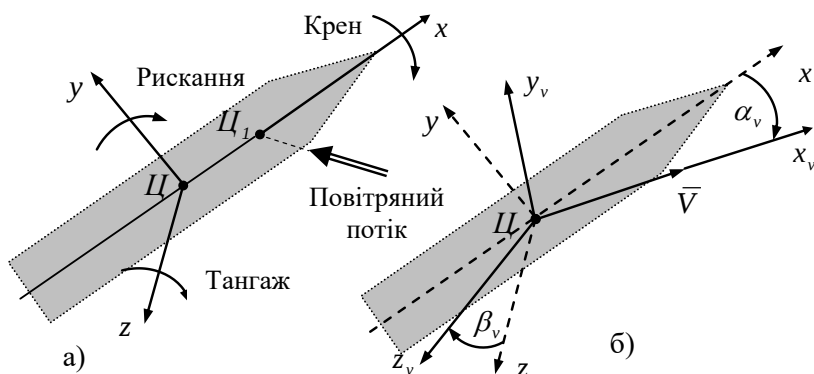


Рис. 5.5. Зв’язана і швидкісна СК

Початок цієї системи збігається із центром мас РН C . Основна площина зазвичай збігається з однією із площин симетрії ракети.

Вісь x спрямована уздовж поздовжньої осі РН у бік вектора тяги. Осі y і z лежать в ортогональних площинах стабілізації РН, причому вісь y розташована у площині траєкторії і спрямована вгору (при горизонтальному русі РН над поверхнею Землі), вісь z доповнює систему до правої.

Ця СК використовується для задання необхідного початкового (програмного) кутового положення РН у просторі відносно деякої базової, наприклад стартової СК, а також для зміни цього положення в процесі польоту РН.

ШвСК – швидкісна прямокутна СК $Cx_v y_v z_v$ (рис. 5.5, б). Її початок сполучений із центром мас ракети C . Основна площина – площина руху РН, у якій лежать осі x_v і y_v . Вісь x_v спрямована уздовж вектора лінійної швидкості ракети $\bar{V}$, вісь y_v спрямована вгору, вісь z_v доповнює систему до правої.

Положення ШвСК відносно ЗвСК задається кутами α_v і β_v .

Кут α_v між площиною $Cx_v z_v$ і віссю x називається *кутом атаки*.

Кут β_v між вектором лінійної швидкості $\bar{V}$ і проекцією осі x на площину $Cx_v y_v$ називається *кутом ковзання*.

Положення ЗвСК відносно СтСК визначається трьома кутами ϑ , ψ і γ (рис. 5.6).

Кут ϑ між віссю x і горизонтальною площиною $Cx_c z_c$ називається *кутом тангажа*.

Кут ψ між проекцією осі x на горизонтальну площину $Cx_c z_c$ і віссю x_c – *кут ризику*.

Кут γ між віссю y і вертикальною площиною, що проходить через вісь x , називається *кутом крену (обертання)*.

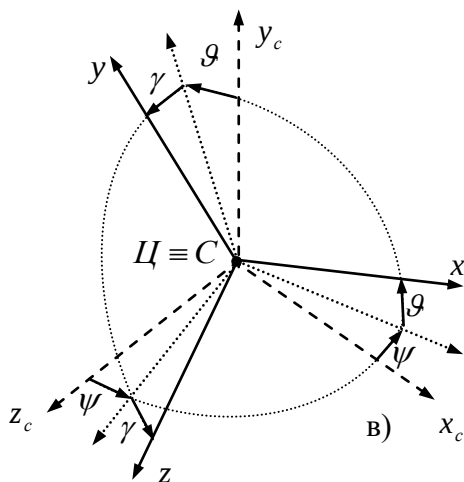


Рис. 5.6. Зв'язана і стартова СК

Кут θ між вектором лінійної швидкості РН $\bar{V}$ і горизонтальною площиною старту Cx_cz_c називають *кутом кидання*, а кут θ між вектором лінійної швидкості $\bar{V}$ і поточною горизонтальною площиною – *кутом місцевого горизонту*.

Зазначимо, що термінологія стосовно до динаміки РН, зокрема назви перерахованих кутів, запозичена в основному із авіації, яка історично випереджала у розвитку ракетну техніку.

Багато із цих термінів застосовують і в теорії польоту КА, але вони не завжди адекватно відображають орієнтацію супутника у порівнянні з літаком.

5.2.3. Сили, що діють на ракети-носії у польоті

У реальних умовах польоту на РН діє система зовнішніх і внутрішніх сил. Зовнішні сили характеризують вплив на ракету навколишнього середовища. До основних складових вектора *зовнішніх* сил відносяться: сила тяги $\bar{P}$; сила ваги $\bar{G}$; аеродинамічна сила $\bar{A}$; керуючі сили $\bar{Y}$ і моменти $\bar{M}$.

Внутрішні сили виникають як за рахунок впливу зовнішніх сил, так і створюються навмисно для забезпечення нормального функціонування РН як літального апарата. Крім того, усередині РН можуть виникати збурювальні моменти, обумовлені конструктивно-технологічними похибками.

Сила тяги є основною рушійною силою РН. Її основу складає реактивна сила $\bar{F}_R$ (5.13), обумовлена енергією відкидання активної маси (газів) РН із відносною швидкістю V_R .

Для створення тяги в сучасних РН використовують два основних види енергії: хімічну і ядерну.

Джерелом *хімічної* енергії служить сама активна маса у виді ракетного палива. При цьому для створення тяги може використовуватися реакція горіння або реакція розкладання палива.

Найпоширеніша *реакція горіння* передбачає наявність у складі активної маси (палива) двох компонентів: окислювача *Ок* і пального *Пл*, (рис. 5.7), а реакція розкладання – наявність активної однокомпонентної маси, процес розкладання якої супроводжується виділенням тепла.

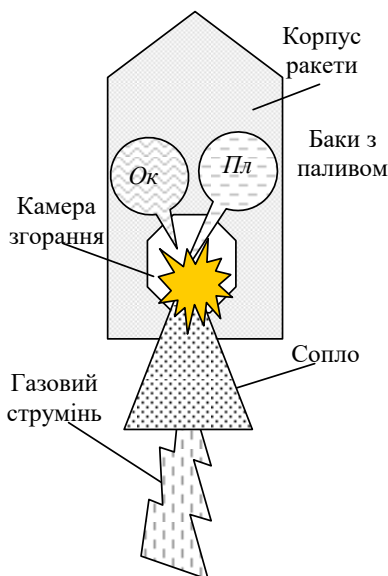


Рис. 5.7. Принцип роботи ракетного двигуна

При використанні ядерного джерела енергії активна маса виступає в ролі робочого тіла, що нагрівається за рахунок ядерного палива.

Таким чином, будь-яке джерело енергії призначене для нагрівання активної маси, за рахунок чого зростає її тиск в обмеженому об'ємі (камері згорання) і при наявності вільного виходу (сопла) відбувається відкидання газового струменя від РН. При цьому відповідно до третього закону Ньютона виникає реактивна сила, що рухає РН у протилежну сторону.

Рівність (5.13) справедлива для ракетного двигуна з так званим ідеальним соплом, у якого тиск витічного струменя газів на зрізі сопла p_c дорівнює статичному тиску зовнішнього середовища p і визначає величину ідеальної тяги ракетного двигуна.

У реальних же умовах політ РН відбувається в атмосфері, тиск якої міняється з висотою $p = p_h$ від одиниці на рівні моря до нуля у космічному просторі, тобто $0 \leq p_h \leq 1$.

Для забезпечення в цих умовах ідеальної тяги, обумовленої формулою (5.13), необхідно, щоб площа вихідного перерізу соп-

ла двигуна s_c змінювалася протягом польоту РН нескінченно від якогось початкового значення, що практично неможливо. Тому на тягу РН впливають навколишнє середовище і конструктивні особливості двигуна.

З урахуванням цього тяга ракетного двигуна $\bar{P}$ в реальних умовах може бути представлена сумою векторів динамічної (реактивної) $\bar{F}_R$ і статичної $\bar{P}_{cm}$ складових

$$\bar{P} = \bar{F}_R + \bar{P}_{cm}, \quad (5.41)$$

де $P_{cm} = s_c(p_c - p_h)$ – модуль вектора статичної тяги.

Оскільки складові вектора (5.41) колінеарні, то його модуль можна подати алгебраїчною сумою

$$P = F_R + P_{cm} = F_R + s_c(p_c - p_h). \quad (5.42)$$

Ця рівність виражає поточне значення тяги і показує, що вона зростає по мірі підйому РН і досягає найбільшого значення у вакуумі (при $p_h = 0$).

Вираз (5.42) можна подати і в іншому виді, наприклад, з урахуванням атмосферного тиску на рівні моря p_0 :

$$P = F_R + s_c(p_c - p_0) + s_c(p_0 - p_h). \quad (5.43)$$

Отже, оскільки на рівні моря $p_h = p_0$, то і тяга на рівні моря в момент старту РН складатиме

$$P_0 = F_R + s_c(p_c - p_0). \quad (5.44)$$

Тоді з урахуванням рівнянь (5.43) і (5.44) поточне значення тяги ракетного двигуна

$$P = P_0 + s_c p_0 (1 - p_h / p_0) = P_0 + P_h, \quad (5.45)$$

де $P_h = s_c p_0 (1 - p_h / p_0)$ – висотна характеристика двигуна.

Висотна характеристика визначає приріст тяги з висотою за рахунок зменшення атмосферного тиску. Цей приріст становить $P_h \approx (0,1 \dots 0,2) P_0$ [18, 25].

Формули (5.44) і (5.45) дозволяють оцінювати вплив на величину тяги двигуна його характеристик і конструктивних параметрів (s_c , p_c), а також навколишнього середовища (p_h , p_0).

Поряд з наведеними формулами для розрахунку тяги широко використовуються залежності, засновані на секундній ваговій витраті палива $\dot{G}_a$ і питомій тязі двигуна P_n [18].

Наприклад, із виразів (5.22) і (5.23) з урахуванням (5.45) одержимо

$$P_n = V_R / g + s_c (p_c - p_h) / \dot{G}_a .$$

Оскільки другий доданок у цьому виразі малий у порівнянні з першим, то

$$P_n \approx V_R / g .$$

Як бачимо із останньої формули, питома тяга двигуна залежить у першу чергу від відносної швидкості витікання газів V_R , обумовленої компонентами ракетного палива.

Сила ваги (вага) тіла $\overline{G}$ на поверхні Землі у ГрСК являє собою результуючий вектор двох сил (рис. 5.8):

а) сили притягання Землі (або сили земного притягання) $\overline{F}_3$, обумовленої гравітаційною взаємодією мас;

б) відцентрової сили інерції $\overline{F}_{\text{вц}}$, обумовленої обертанням Землі.

З урахуванням цього можна записати

$$\overline{G} = \overline{F}_3 + \overline{F}_{\text{вц}} .$$

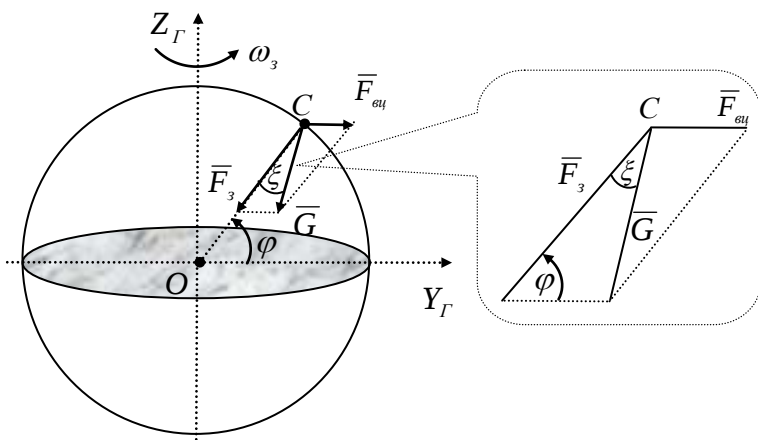


Рис. 5.8. Сила ваги і її компоненти

При цьому сила $\bar{F}_3$ спрямована до центра Землі, а сила $\bar{F}_{vu}$ – перпендикулярна до осі обертання Землі. У підсумку напрямок сили ваги $\bar{G}$ збігається з прямовисною лінією в даній точці.

Значення складових сили ваги для *сферичної* моделі Землі можна розрахувати за такими формулами:

$$F_3 = mg ; F_{vu} = mV_3^2 / \rho_\varphi = m\omega_3^2 R_3 \cos\varphi , \quad (5.46)$$

де m – маса тіла (ракети);

$V_3 = V_\varphi \cos\varphi = \omega_3 R_3 \cos\varphi$ – лінійна швидкість обертання точки, розташованої на поверхні Землі на широті φ ;

$V_\varphi \approx 465 \text{ м/с}$ – лінійна швидкість обертання точки, розташованої на екваторі Землі;

$\rho_\varphi = R_3 \cos\varphi$ – радіус обертання точки на широті φ ;

$\omega_3 = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі.

Як видно зі співвідношення (5.46), величина відцентрової сили змінюється від нуля на полюсах ($|\varphi| = 90^\circ$) до максимального значення на екваторі ($\varphi = 0^\circ$). Тому вага тіла на полюсах більше, ніж в інших точках земної поверхні. Напрямок сили ваги

відрізняється від сили земного притягання через те, що вектори $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_{\text{вц}}$ не колінеарні.

Тому для знаходження ваги тіла G можна скористатись теоремою косинусів у виді

$$G^2 = F_3^2 + F_{\text{вц}}^2 - 2F_3F_{\text{вц}} \cos \varphi. \quad (5.47)$$

При цьому встановлено, що найбільше відхилення прямої лінії від напрямку сили притягання спостерігається на широті $|\varphi| \approx 45^\circ$ і становить близько $\xi \approx 6'$ [18].

Приклад 5.4. Розрахувати вагу підготовленої до старту РН “Зеніт-3SL” (див. табл. 5.1), якщо її запуск проводиться із космодрому Байконур ($\varphi_{\text{ст}} = +47,5^\circ$). Прийняти, що Земля має сферичну форму з радіусом $R_3 = 6371 \text{ км}$.

Розв’язання. Для розрахунків скористаємось формулами (5.46) у виді

$$F_3 = mg = 473 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 4640130 \text{ Н};$$

$$F_{\text{вц}} = m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi_{\text{ст}} = 473 \cdot 10^3 \cdot (7,292115 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6371 \cdot 10^3 \cdot \cos 47,5^\circ \approx 10825 \text{ Н}.$$

Далі із формули (5.47) знайдемо вагу РН у вигляді

$$G = \sqrt{F_3^2 + F_{\text{вц}}^2 - 2F_3F_{\text{вц}} \cos \varphi_{\text{ст}}} = \sqrt{4640130^2 + 10825^2 - 2 \cdot 4640130 \cdot 10825 \cdot \cos 47,5^\circ} \approx 4632823 \text{ Н}.$$

Як бачимо, вага РН за рахунок дії відцентрової сили інерції на широті $\varphi_{\text{ст}} = +47,5^\circ$ зменшується у порівнянні з її вагою на полюсі Землі на величину $\Delta G = F_3 - G = 4640130 - 4632823 = 7307 \text{ Н} \approx 730 \text{ кгс}$. Очевидно, що при розташуванні космодрому в околі екватора Землі ця різниця зросте ще більше.

Крім того, якщо врахувати, що Земля має не сферичну форму (див. розд. 1), а більш точно описується *еліпсоїдом обертання* Красовського, то внаслідок цього сама сила земного притягання (крім полюсів і екватора) має додаткове відхилення від напрямку на центр Землі. Воно найбільше на широті $|\varphi| \approx 45^\circ$ і становить приблизно $6'$.

Таким чином, сила ваги на полюсах і екваторі спрямована до центра Землі, а в інших точках земної поверхні відхилена від цього напрямку.

При цьому максимальна величина відхилення має місце на широті $|\phi| \approx 45^\circ$ і може становити з урахуванням несферичності Землі близько $12'$.

Ці похибки необхідно враховувати не тільки при визначенні вагових характеристик стартуючих РН, а і в задачах вибору дислокації стартових позицій, побудови систем координат, вибору напрямків старту і т.п.

Аеродинамічні сили виникають при русі РН у щільних шарах атмосфери Землі, здійснюючи в основному протидію цьому руху.

Нагадаємо (див. підр. 4.3), що рівнодіючу цих сил $\bar{A}$ називають *повною аеродинамічною силою*, а її складові у ШвСК Cx_v, y_v, z_v – силою лобового опору $\bar{A}_x^v$, піднімальною силою $\bar{A}_y^v$ і бічною силою $\bar{A}_z^v$, причому

$$\bar{A} = \bar{A}_x^v + \bar{A}_y^v + \bar{A}_z^v. \quad (5.48)$$

Сила лобового опору $\bar{A}_x^v$ спрямована по дотичній до траєкторії руху РН, перебуває в одній площині з нею і завжди орієнтована у бік, протилежний руху ракети. Вона виникає при будь-якій орієнтації поздовжньої осі РН.

Піднімальна сила $\bar{A}_y^v$ діє у площині траєкторії руху РН і спрямована перпендикулярно до сили лобового опору. Вона має місце тільки тоді, коли поздовжня вісь РН становить із вектором її швидкості $\bar{V}$ кут атаки α_v .

Примітка. Ця складова має важливе значення в авіації для підйому літаків під час зльоту, утримання їх у горизонтальному положенні під час польоту та для забезпечення їх посадки.

Бічна сила $\bar{A}_z^v$ діє перпендикулярно до площини траєкторії. Вона виникає тоді, коли поздовжня вісь РН утворює із вектором її швидкості $\bar{V}$ кут ковзання β_v .

Іноді аеродинамічні сили розраховують у ЗвСК $\mathcal{C}_{xyz}$. При цьому відповідні складові називають: $\bar{A}_x$ – поздовжньою, $\bar{A}_y$ – нормальною і $\bar{A}_z$ – поперечною.

Механізм утворення аеродинамічних сил визначається швидкістю польоту РН, а їх величина залежить від площі поперечного перерізу ракети, її кута атаки, компоновання двигунів і параметрів їхніх струменів на зрізі сопел, а також від висоти польоту і стану атмосфери.

На практиці сукупність перерахованих факторів зводять до трьох параметрів:

коефіцієнта, що характеризує аеродинамічну форму РН;
швидкісного напору;
площі міделевого перерізу.

З урахуванням цього у ШвСК $\mathcal{C}_{x_v y_v z_v}$ аеродинамічні сили, що діють на РН у польоті, можна розрахувати за формулами:

$$A_x^v = C_x^v q_v S_m; \quad A_y^v = C_y^v q_v S_m; \quad A_z^v = C_z^v q_v S_m, \quad (5.49)$$

де C_x^v , C_y^v і C_z^v – безрозмірні аеродинамічні коефіцієнти сили лобового опору, піднімальної і бічної сил відповідно;

$q_v = 0,5 \rho V^2$ – швидкісний напір;

ρ – щільність атмосфери;

V – лінійна швидкість польоту РН;

S_m – площа міделевого перерізу РН у відповідній площині.

Формули (5.49) враховують спільний вплив щільності повітря ρ і лінійної швидкості польоту РН V на аеродинамічні сили через швидкісний напір q_v . Щільність повітря досить швидко зменшується зі збільшенням висоти польоту РН, тому швидкісний напір має порівняно великі значення у приземному шарі атмосфери (на висотах $h \leq 15 \dots 17$ км), де аеродинамічні сили досягають максимальних значень.

У ЗвСК $\mathcal{C}_{xyz}$ аеродинамічні сили, що діють на РН у польоті, можна розрахувати за аналогічними формулами:

$$A_x = C_x q_v S_m; A_y = C_y^\alpha q_v S_m \alpha_v; A_z = -C_z^\beta q_v S_m \beta_v, \quad (5.50)$$

де C_x , C_y^α і C_z^β – безрозмірні аеродинамічні коефіцієнти поздовжньої, нормальної і поперечної сил.

Виникнення аеродинамічних сил являє собою складну картину. Тому при первинному їхньому визначенні зазвичай використовують наближені розрахунки, засновані на обробці статистичних матеріалів, які потім уточнюють і коректують за результатами продувок моделей РН в аеродинамічних трубах.

Розрахунок аеродинамічних сил і їхнє подальше підтвердження зводяться до визначення і експериментального уточнення безрозмірних коефіцієнтів C_x^* , C_y^* і C_z^* , де знак * узагальнено виражає відповідні верхні індекси у формулах (5.49) та (5.50).

Параметри атмосфери, що впливають на величину аеродинамічних сил, різні для різних пір року, доби, широти місцевості і т.п. Тому при проведенні розрахунків цим зазвичай зневажають і за основу приймають параметри *міжнародної стандартної атмосфери* (див. розд. 1).

Керуючі сили і моменти. У загальному випадку РН здійснює криволінійний рух, переміщаючись у просторі по заздалегідь наміченій програмі. Її завдання полягає в тому, щоб вивести корисний вантаж (КА) у задану точку простору і задати йому необхідні початкові характеристики руху.

Отже, політ РН на активній ділянці траєкторії повинен бути *керованим*, причому керувати необхідно як поступальним, так і обертальним рухом ракети. При цьому для керування поступальним рухом РН необхідно, щоб керуюча сила була прикладена до її *центра мас*, а для керування обертальним рухом – до геометричного центра, тобто до *центра тиску*, що не обов'язково збігається із центром мас. В останньому випадку виникають *керуючі моменти*, величина яких визначається добутком керуючої сили на плече.

Для створення керуючих сил і моментів на РН установлюють *системи керування рухом* (польотом), основними компонентами

яких виступають чутливі, підсилювально-перетворюючі і виконавчі елементи, а також сама РН як об'єкт керування. Практично керування польотом РН здійснюється за рахунок зміни величини і напрямку рівнодіючої *керуючої* сили $\bar{F}_\kappa$ як геометричної суми сил тяги двигунів $\bar{P}$ і аеродинамічних сил $\bar{A}$

$$\bar{F}_\kappa = \bar{P} + \bar{A}.$$

У свою чергу, за наявності на РН крім основних (маршових) ще і додаткових (керуючих) двигунів результуючий вектор тяги $\bar{P}$ можна представити через суму векторів *маршових* $\bar{P}_m$ і *керуючих* $\bar{P}_\kappa$ двигунів

$$\bar{P} = \bar{P}_m + \bar{P}_\kappa.$$

Через проекції на осі ЗвСК цей вираз можна записати як

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m + P_\kappa \cos \delta \\ P_\kappa \sin \delta \\ P_\kappa \cos \delta_n \end{bmatrix},$$

де δ і δ_n – кути відхилення осей камер керуючих двигунів, що задаються програмою керування польотом РН.

Таким чином, вмикаючи і вимикаючи керуючі двигуни, а також змінюючи орієнтацію їхніх камер, можна змінювати напрямок польоту РН за рахунок сил тяги.

Принцип створення керуючих моментів за допомогою аеродинамічних сил $\bar{A}$ заснований на тому, що лінія дії цих сил проходить не через центр мас РН C (див. рис. 5.4, а), а перетинає її повздовжню вісь x у точці C_1 (центрі тиску). У результаті виникає момент від аеродинамічних сил, який представляють у вигляді моментів навколо осей ЗвСК z і y :

$$M_z = -C_y^\alpha q_v S_m \alpha_v (x_{cm} - x_{cm}) = m_z^\alpha q_v S_m l \alpha_v;$$

$$M_y = -C_y^\beta q_v S_m \beta_v (x_{cm} - x_{cm}) = m_y^\beta q_v S_m l \beta_v,$$

де $m_z^\alpha = -C_y^\alpha (x_{cm} - x_{cm})/l$; $m_y^\beta = -C_y^\beta (x_{cm} - x_{cm})/l$;

x_{cm} і x_{cm} – відстань від носка РН до центра тиску і центра мас відповідно;

l – довжина РН (розмір уздовж осі x).

При цьому залежно від положення центра тиску C_1 відносно центра мас РН C аеродинамічні моменти можуть бути стабілізуючими або перекидаючими.

Наприклад, якщо $x_{cm} > x_{cm}$, то $m_z^\alpha < 0$, момент M_z прагне зменшити кут атаки α_v і тому є стабілізуючим. У протилежному випадку цей момент буде перекидаючим.

Отже, залежно від взаємного розташування центра тиску і центра мас РН вона може бути статично стійкою або статично нестійкою.

При обертанні РН навколо центра мас C можуть виникати *демпфувальні* моменти, що перешкоджають цьому обертанню:

$$\Delta M_x = -m_x^w \rho V S_M l^2 w_x;$$

$$\Delta M_y = -m_y^w \rho V S_M l^2 w_y;$$

$$\Delta M_z = -m_z^w \rho V S_M l^2 w_z,$$

де m_x^w , m_y^w , m_z^w – похідні від коефіцієнтів аеродинамічного моменту по кутовій швидкості обертання РН w , знайдені експериментальним або розрахунковим шляхом.

Результуючу силу $\bar{F}_K$ можна розкласти на такі складові:

тангенціальну $\bar{F}_\tau$, розташовану у площині траєкторії (старту) і спрямовану по дотичній до неї уздовж вектора лінійної швидкості;

нормальну $\bar{F}_n$, діючу у площині старту РН;

бічну $\bar{F}_b$, діючу перпендикулярно до площини старту РН.

Очевидно, що модуль першої складової визначається величиною тангенціального компонента сили тяги P_τ і сили лобового опору A_x

$$F_\tau = P_\tau + A_x$$

і може служити для регулювання *швидкості польоту* РН.

Зміна тангенціальної складової досягається зміною тяги основних двигунів (форсуванням або дроселюванням), а також вмиканням або вимиканням різних двигунів РН.

Аналогічно визначаються й інші складові, які можна змінювати за рахунок додання РН відповідних кутів атаки і ковзання.

5.2.4. Схеми виведення космічних апаратів на різні орбіти

З урахуванням сказаного *старт і рух* РН відбувається за таким алгоритмом [20]:

а) старт і *вертикальний* політ протягом перших 10...15 с. Вертикальний рух простіше реалізувати конструктивно, а також він дозволяє швидше подолати щільні шари атмосфери, що має істотне значення при невисокій тягоозброєності РН $n_{cm} \approx 1,15...1,2$;

б) невелике відхилення руху РН від вертикального напрямку за рахунок малої зміни кута атаки $0 < \alpha_v(t) < \alpha_{onm}$ при польоті в досить щільних шарах атмосфери. Цей прийом запобігає ушкодженню РН при її обмеженій міцності;

в) політ РН із оптимальним кутом атаки $\alpha_v(t) \approx \alpha_{onm}$, що відповідає прийнятним енерговитратам для виведення КА в задану точку простору.

Виведення КА на задану (робочу) орбіту може здійснюватися за такими *схемами*:

а) *пряме* виведення на низькі колові або майже колові орбіти;

б) виведення на ВЕО або СтО із *проміжною* балістичною ділянкою та з маневром у площині орбіти (компланарний перехід);

в) виведення на ВЕО або СтО з використанням проміжної орбіти і просторового маневру (некомпланарний перехід).

При цьому для перших двох схем положення площини орбіти у просторі задається нахиленням i та інерціальною довготою ВВ Ω (рис. 5.9), які визначаються залежностями [26, 44]:

$$i = \arccos(\sin A_{cm} \cos \varphi_{cm}); \quad (5.51)$$

$$\Omega = \lambda_{\text{вв}} + \tilde{S}; \quad (5.52)$$

$$\lambda_{\text{вв}} = \lambda_{cm} - \Delta\lambda; \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \arctg(\sin \varphi_{cm} \operatorname{tg} A_{cm}) = \arcsin(\operatorname{tg} \varphi_{cm} / \operatorname{tgi}) = \\ &= \arctg(\operatorname{tg} \varphi_{cm} \cos i); \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\tilde{S} \approx \tilde{S}_0 + \omega_z(t_{0cm} - \tau_{cz}), \quad (5.55)$$

де A_{cm} – азимут старту (запуску) РН;

$\varphi_{cm}, \lambda_{cm}$ – широта і довгота точки старту;

$\lambda_{\text{вв}}$ – географічна довгота ВВ орбіти КА;

$\tilde{S}_0$ – зоряний час у середньосонячну гринвіцьку північ дати запуску РН у кутовій мірі;

$\omega_z = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ – кутова швидкість обертання Землі;

t_{0cm} – всесвітній час старту РН;

τ_{cz} – інтервал часу від моменту старту до моменту перетинання КА площини екватора.



Рис. 5.9. Положення орбіти у просторі

Наприклад, при виводі КА на ВЕО з використанням низької еліптичної опорної орбіти інтервал τ_{c9} можна розрахувати як суму інтервалів часу

$$\tau_{c9} = \Delta t_a + \Delta t_{on} + \Delta t_g, \quad (5.56)$$

де Δt_a – тривалість активної ділянки РН;

Δt_{on} – тривалість руху КА по опорній орбіті (див. підр. 5.3);

Δt_g – тривалість руху КА від точки перигею робочої (апогею опорної) орбіти до моменту перетинання площини екватора.

При виводі КА на ССО опорна орбіта, як правило, не застосовується. Тому формула (5.56) набуває вигляду

$$\tau_{c9} = \Delta t_a + \Delta t_g. \quad (5.57)$$

Якщо задані необхідні просторове положення орбіти Ω та i , координати точки старту φ_{cm} , λ_{cm} і дата запуску, то із виразів (5.52)...(5.56) неважко знайти необхідний всесвітній час старту РН в задану дату:

$$t_{0cm} = (\Omega - \lambda_{cm} + \Delta\lambda - \tilde{S}_0) / \omega_3 + \tau_{c9}. \quad (5.58)$$

Якщо задано необхідне значення географічної довготи ВВ $\lambda_{\text{вв}} = \lambda_{\text{вв}}^*$, то необхідний всесвітній час старту РН в задану дату можна знайти як

$$t_{0cm} = (\Omega - \lambda_{\text{вв}}^*) / \omega_3 + \tau_{c9}. \quad (5.59)$$

Для переходу до поясного або місцевого часу слід скористатися формулами, наведеними у підр. 2.2.

Приклад 5.5. Розрахувати можливий діапазон нахилень орбіти КА i , який можна забезпечити за рахунок змін азимута запуску РН із космодрому Байконур ($\varphi_{cm} = +47,5^\circ$) в межах $-90^\circ \leq A_{cm} \leq 90^\circ$ (див. рис. 5.9).

Розв'язання. Для розрахунків скористаємось формулою (5.51), задаючи значення азимуту старту із заданого діапазону з кроком $\Delta A_{cm} = 30^\circ$. Тоді

$$i_1 = \arccos(\sin A_{cm1} \cos \varphi_{cm}) = \arccos(\sin 0^\circ \cos 47,5^\circ) = \arccos 0 = 90^\circ;$$

$$i_2 = \arccos(\sin A_{cm2} \cos \varphi_{cm}) = \arccos(\sin 30^\circ \cos 47,5^\circ) \approx \arccos 0,3378 \approx 70^\circ;$$

$$i_3 = \arccos(\sin A_{cm3} \cos \varphi_{cm}) = \arccos(\sin 60^\circ \cos 47,5^\circ) \approx \arccos 0,5851 \approx 54^\circ;$$

$$\begin{aligned}
i_4 &= \arccos(\sin A_{cm4} \cos \varphi_{cm}) = \arccos(\sin 90^\circ \cos 47,5^\circ) \approx \arccos 0,6756 \approx 47,5^\circ; \\
i_5 &= \arccos(\sin A_{cm5} \cos \varphi_{cm}) = \arccos[\sin(-30^\circ) \cos 47,5^\circ] \approx \arccos(-0,338) \approx 110^\circ; \\
i_6 &= \arccos(\sin A_{cm6} \cos \varphi_{cm}) = \arccos[\sin(-60^\circ) \cos 47,5^\circ] \approx \arccos(-0,585) \approx 126^\circ; \\
i_7 &= \arccos(\sin A_{cm7} \cos \varphi_{cm}) = \arccos[\sin(-90^\circ) \cos 47,5^\circ] \approx \arccos(-0,676) \approx 132^\circ.
\end{aligned}$$

Як видно із отриманих результатів, за рахунок вибору азимуту старту можна забезпечити різні нахилення орбіти, але тільки у діапазоні $i \geq |\varphi_{cm}|$.

Приклад 5.6. Розрахувати необхідний всесвітній час запуску КА 21.03.2011 на ССО з параметрами $i = 98^\circ$, $e = 0$, $H_o = 680 \text{ км}$, $\Omega = 0^\circ$, якщо запуск проводиться із космодрому Байконур ($\varphi_{cm} = +47,5^\circ$, $\lambda_{cm} = +66^\circ$) за допомогою РН “Зеніт”, тривалість активної ділянки траєкторії якої $\Delta t_a = 300^s$, а тривалість руху КА до моменту перетинання площини екватора $\Delta t_s = 60^m$.

Розв’язання. Скористаємось виразом (5.58), для чого обчислимо $\Delta \lambda = \arcsin(\operatorname{tg} \varphi_{cm} / \operatorname{tg} i) = \arcsin(\operatorname{tg} 47,5^\circ / \operatorname{tg} 98^\circ) \approx -8,8^\circ$. Крім того, врахуємо, що 21 березня (день весняного рівнодення) $S_o \approx 12^h$, а $\tilde{S}_o = 180^\circ$. Далі із (5.57) отримаємо $\tau_{cs} = \Delta t_a + \Delta t_s = 300^s + 60^m = 1^h 05^m$. Тоді з урахуванням кутової швидкості Землі $\omega_s = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \approx 15 \text{ град/год}$ знайдемо, що $t_{0cm} = (\Omega - \lambda_{cm} + \Delta \lambda - \tilde{S}_o) / \omega_s + \tau_{cs} = (0 - 66 - 8,8 - 180) / 15 + 1^h 05^m \approx -17^h + 1^h 05^m \approx -15^h 55^m$.

Отриманий результат означає, що старт РН треба здійснити майже на 16^h раніше, ніж наступить 21 березня, тобто 20 березня о $8^h 05^m$ за всесвітнім часом або о $10^h 05^m$ – за київським.

5.2.5. Способи створення керуючих моментів

Як уже відзначалось раніше, на РН у польоті діє три різних за природою групи сил: аеродинамічні, газореактивні і гравітаційні. Очевидно, що на перші дві групи цих сил можна штучно впливати, а отже, використовувати їх для створення керуючих моментів.

Виходячи з цього, на практиці найчастіше застосовують такі основні *способи* створення керуючих моментів РН [18, 25]:

- а) зміна аеродинамічних характеристик РН;
- б) зміна напрямку лінії дії тяги РН;
- в) зсув центра мас РН відносно лінії дії тяги;
- г) створення різниці тяг протилежних двигунів РН.

Для зміни аеродинамічних характеристик РН застосовують *повітряні рулі*. Як правило, використовують чотири рулі, осі обертання яких лежать у площинах симетрії і перпендикулярні до поздовжньої осі РН. Попарне відхилення рулів в одну сторону приводить до створення керуючих моментів у площинах тангажа і ристання, а в різні сторони – навколо поздовжньої осі РН (по крену).

Величина цих моментів залежить від площі рулів, кутів їхнього відхилення, місця розташування і швидкісного напору. Цей спосіб ефективний тільки у межах щільних шарів атмосфери. Тому він може застосовуватися в основному на перших ступенях РН.

Для реалізації інших способів застосовують газоструменеві рулі, керуючі (рульові) двигуни, а також основні (маршові) двигуни.

Газоструменеві рулі являють собою чотири пластини відповідної форми, установлені у потоці газів, що витікають із сопла двигуна. Площини симетрії рулів проходять через вісь симетрії струменя. При відхиленні рулів порушується симетрія обтікання газів, внаслідок чого виникає керуючий момент.

Рульові двигуни – це газореактивні двигуни малої потужності, що установлені на периферії РН у площинах її стабілізації і мають шарнірну підвіску. Керуючий момент при цьому виникає за рахунок реактивної сили струменя, що відхиляється на заданий кут від лінії дії тяги маршового двигуна. При цьому центр тиску керуючої сили не збігається із центром мас РН, внаслідок чого утворюється плече, а отже, і керуючий момент.

Рульові двигуни ускладнюють конструкцію РН, збільшують її вагу, створюють додаткові збурювальні аеродинамічні і конструктивно-технологічні моменти. Проте у сучасних РН вони знаходять найбільше застосування.

Це обумовлено тим, що поряд із прямою функцією керування рульові двигуни дозволяють вдало вирішувати ряд додаткових завдань, зокрема, підвищують надійність запуску РН, полегшують поділ РН на ступені, забезпечують задану точність виведення корисного вантажу останнім ступенем.

Керування за допомогою *маршового двигуна* здійснюється за рахунок:

а) застосування декількох *рухомих* камер згорання (при багатокамерній конструкції);

б) хитання в кардані однієї камери (при однокамерній конструкції РН);

в) форсування (збільшення) і дроселювання (зменшення) тяги окремих камер багатокамерного двигуна;

г) вдування газу або упорскування рідини в певну зону сопла для перерозподілу тиску по його довжині.

При *багатокамерній* конструкції РН завдання керування вирішується найбільш просто для випадку чотирикамерного двигуна (якщо число камер більше, то завжди можна вибрати для керування чотири з них). Чотирикамерні двигуни добре вписуються в діаметр ракети. Вони забезпечують триканальне керування кутовим рухом РН (по тангажу, рисканню і крену).

При цьому спрощується система керування рухом РН, оскільки відпадає необхідність у рульових двигунах, зменшуються енергетичні втрати на керування. У той же час існує проблема забезпечення рухливості потужних камер згорання, що вирішуються за принципом “двигун сам себе хитає”.

При *однокамерному* маршовому двигуні керування РН також здійснюється за рахунок його хитання у карданному підвісі. Однак при цьому забезпечується керування тільки по двох каналах: по тангажу і рисканню.

Для керування по крену необхідні спеціальні керуючі органи. За рахунок форсування і дроселювання камер двигуна, розташованих на деякій відстані від поздовжньої осі РН (для створення плеча), можна досягти певної різниці тяг, причому цим способом можна змінювати величину і напрямок керуючих моментів.

Однак при керуванні польотом РН у щільних шарах атмосфери необхідні варіації тяги становлять до 50%. При такій глибині зміни тяги процес горіння у двигуні може бути нестійким, а енергетичні втрати – неприпустимо великими. Тому даний спосіб застосовують поза атмосферою (на II і III ступенях РН). Крім того, при такому способі потрібні додаткові двигуни для керування по крену.

При *вдуванні газу* або *упорскуванні рідини* в сопла виникає ефект, аналогічний дії газоструменевих рулів. Перевагою цього способу є простота привода. До недоліків відносять неможливість керування по крену, а також нелінійну залежність керуючої сили від витрат маси робочого тіла. Тому цей спосіб ефективний тоді, коли потрібні невеликі керуючі зусилля.

Таким чином, виведення КА на робочу орбіту – це складний, енергоємний, дорогий процес. Для вирішення цього завдання необхідно знати параметри робочої орбіти, вибрати момент старту і азимут запуску РН та реалізувати оптимальну програму керування її рухом.

5.3. МІЖОРБІТАЛЬНІ МАНЕВРИ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

У загальному випадку під *маневром* КА розуміють цілеспрямовану зміну параметрів його орбіти за допомогою керуючих сил. При цьому істотні зміни цих параметрів застосовують для *переходу* КА з однієї орбіти на іншу і говорять про *міжорбітальні маневри*. У випадку ж невеликих змін параметрів використовують поняття *коригувальних маневрів* або *корекції орбіти*.

Оскільки в нинішній час відома велика кількість видів маневрів [4, 26, 31, 44, 55, 59], які мають різні цілі, вимагають різних енергетичних витрат, реалізуються різними складовими керуючої сили, то цікаво здійснити їхню класифікацію.

5.3.1. Класифікація маневрів космічних апаратів

Маневри КА можна класифікувати (рис. 5.10) відповідно до використовуваних складових імпульсу швидкості, кількості змінюваних параметрів орбіти, типу (тяги) двигунів, геометричного положенням площин орбіт, часу роботи двигунів, кількості кроків зміни одного параметра орбіти і т.п.

При цьому відповідно до положення **площин орбіт** маневри розділяють на компланарні і некомпланарні (просторові).

Компланарним маневром КА називають такий маневр, при якому початкова і кінцева орбіти лежать в *одній площині*, тобто при маневрі не змінюються нахилення орбіти i та інерціальна довгота ВВ Ω .

У протилежному випадку маневр називається **некомпланарним** або *просторовим*.

За **часом** роботи двигунів маневри розділяють на *імпульсні* і *безперервні*. В останньому випадку застосовують двигуни малої тяги. При проведенні імпульсних маневрів використовують, як правило, потужні маршові двигуни, час роботи яких набагато менший, ніж період обертання КА. На відміну від них, час роботи двигунів малої тяги може перевищувати цей період.

За кількістю **кроків** зміни одного параметра орбіти маневри розділяють на одноразові, багаторазові.

Багаторазові маневри здійснюють за рахунок багаторазового вмикання двигунів. Кожний із багаторазових маневрів може проводитися одним із способів одноразового маневру. Їх підрозділяють на однорідні (незв'язані) та неоднорідні (зв'язані).

Однорідні маневри використовуються для послідовного зменшення похибок руху.

Неоднорідні маневри застосовуються для зменшення енергетичних витрат, а також у випадку, коли кількість змінюваних параметрів перевищує кількість вільних компонентів швидкості при одноразовому маневрі.

При неоднорідному маневрі проходить почергове зміщення траєкторії уздовж найбільш ефективних напрямків або уздовж фіксованих напрямків таким чином, щоб сумарне зміщення рівнялось заданому. Крім ознак, за якими проводиться класифікація, маневри ще характеризують енергетичними показниками.

5.3.2. Енергетичні характеристики маневрів

Проведення маневру вимагає певних енергетичних витрат. Якщо як керуюча сила використовується реактивна тяга двигу-

нів, то енергетичні витрати представляють у вигляді витрат робочого тіла (палива, газу) за час проведення маневру.

Однією з таких характеристик є *абсолютні витрати* робочого тіла (абсолютні витрати маси КА)

$$\Delta m = m_0 - m, \quad (5.60)$$

де m_0 – початкова маса робочого тіла на борту КА;

m – його поточна маса.

Однак така характеристика не показує, яку частку робочого тіла витрачено на проведення маневру. Тому більш зручним показником є *відносні* витрати маси КА, які з урахуванням формули (5.60) можна подати як

$$\xi_m = \Delta m / m_0 = (m_0 - m) / m_0 = 1 - m / m_0. \quad (5.61)$$

Ще більш інформативним, інтегральним енергетичним показником маневрів КА є *імпульс характеристичної швидкості* ΔV (див. підр. 5.1), під яким розуміють таке збільшення швидкості КА, яку він одержав би при миттєвому згоранні палива у його двигуні.

Нагадаємо, що характеристична швидкість визначається як *збільшення швидкості КА під дією тільки сили тяги* при його *прямолінійному* русі. При цьому вважається, що на КА не діють ніякі інші сили, у тому числі і *гравітаційні*.

Умови прямолінійного руху дають можливість вважати, що одиничний вектор збільшення швидкості КА $\Delta \bar{V}_0$ має той же напрямок, що і одиничний вектор сили тяги $\bar{P}_0$. Тоді векторне диференціальне рівняння руху КА в ідеальних умовах описуватиметься рівнянням Мещерського (5.12) у вигляді

$$\Delta \bar{V}_0 dV / dt = \bar{P}_0 P / m.$$

Якщо проінтегрувати це рівняння, опустивши одиничні вектори, і врахувати, що

$$P = \dot{m} V_R; \quad \dot{m} = -dm / dt,$$

то одержимо

$$\Delta V = -V_R dm / m, \quad (5.62)$$

де $\dot{m}$ – секундні витрати палива;

V_R – відносна швидкість витікання газів із сопла.

Для двигунів на хімічному паливі відносна швидкість витікання газів із сопла у вакуумі постійна, тобто $V_R = \text{const}$.

З огляду на це, проінтегрувавши вираз (5.62), одержимо

$$\Delta V = -V_R \ln(1 - \Delta m/m).$$

Такий же вид має формула для розрахунку збільшення швидкості при миттєвому витрачанні палива.

Отже, *характеристична швидкість* пов'язана із витратою маси та зміною вектора швидкості КА і тому є наочною і зручною енергетичною характеристикою маневрів. Вона являє собою *скалярну* величину, модуль якої завжди *більше нуля* і може тільки *збільшуватися* з кожним вмиканням двигуна.

При маневруванні КА часто виникає необхідність декількох вмикань двигунів. При цьому для кожного вмикання вектор тяги може бути орієнтований у просторі різними способами, включаючи і реверс (розворот КА на 180°) відносно попередніх вмикань.

У даному випадку має місце важливе для теорії імпульсних маневрів положення, яке свідчить про те, що *при заданій витраті маси характеристична швидкість не залежить від кількості вмикань двигуна*.

Доведемо це положення. Очевидно, що кожному i -му вмиканню реактивного двигуна на підставі формули (5.62) відповідає приріст характеристичної швидкості КА

$$\Delta V_i = -V_R \ln(1 - \Delta m_i/m_i), \quad (5.63)$$

де m_i – початкова маса КА перед i -м вмиканням двигуна;

Δm_i – зміна маси КА при i -му вмиканні.

Використовуючи залежність (5.63), отримаємо послідовність таких залежностей для n вмикань:

$$\Delta V_i = -V_R \ln(1 - \Delta m_i/m_i);$$

$$\Delta V_2 = -V_R \ln[1 - \Delta m_2 / (m_1 - \Delta m_1)];$$

$$\dots$$

$$\Delta V_n = -V_R \ln[1 - \Delta m_n / (m_1 - \Delta m_1 - \Delta m_2 - \dots - \Delta m_{n-1})].$$

Склавши ці рівняння, одержимо:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = -V_R \ln \left[\left(\frac{m_1 - \Delta m_1}{m_1} \right) \left(\frac{m_1 - \Delta m_1 - \Delta m_2}{m_1 - \Delta m_1} \right) \times \dots \right. \\ \left. \times \left(\frac{m_1 - \Delta m_1 - \Delta m_2 - \Delta m_3 - \dots - \Delta m_n}{m_1 - \Delta m_1 - \Delta m_2 - \dots - \Delta m_{n-1}} \right) \right].$$

Аналізуючи співмножники під знаком логарифма, бачимо, що чисельник попереднього дробу дорівнює знаменнику наступного дробу. Тому після відповідних скорочень одержимо

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = -V_R \ln[(m_1 - \Delta m_1 - \Delta m_2 - \dots - \Delta m_n) / m_1].$$

Позначивши суми відповідно як $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = \Delta V_\Sigma$, $\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n = \Delta m_\Sigma$, остаточно знайдемо

$$\Delta V_\Sigma = -V_R \ln(1 - \Delta m_\Sigma / m_1). \quad (5.64)$$

Таким чином, як видно із виразу (5.64), сумарне збільшення швидкості визначається тільки зміною маси, незалежно від того, була ця маса витрачена при одному чи при декількох вмиканнях двигуна.

При цьому з урахуванням викладеного показник (5.61) набуває вигляду

$$\xi_m = 1 - \exp(-\Delta V / V_R). \quad (5.65)$$

Характеристична швидкість, як еквівалент витрати маси, набула широкого поширення для опису маневрів, які проводяться за допомогою реактивних двигунів на хімічному паливі. Однак при вивченні і розрахунку маневрів, які проводяться за допомогою безперервної тяги (двигуни малої тяги), використовується інший енергетичний показник. Розглянемо його.

Із теорії реактивного руху відомо, що найбільш економічним режимом роботи двигуна є режим створення тяги постійної потужності. Потужність реактивного струменя газів дорівнює корисній потужності двигуна і визначається формулою

$$N = 0,5 P V_R. \quad (5.66)$$

У свою чергу, сила тяга визначається залежністю

$$P = \dot{m} V_R. \quad (5.67)$$

Підставляючи вираз (5.67) у формулу (5.66), одержимо співвідношення для секундних витрат маси

$$\dot{m} = 2N / V_R^2. \quad (5.68)$$

Далі. Сила тяги (5.67), що прикладена до КА з масою m , відповідно до другого закону Ньютона додасть йому прискорення

$$a = P / m = \dot{m} V_R / m, \quad (5.69)$$

яке викличе певну зміну параметрів орбіти.

Отже, для оцінки витрат на маневрування необхідно знайти залежність прискорення від витрати маси КА. Для визначення такої залежності знайдемо із співвідношення (5.68) значення швидкості V_R і підставимо його у вираз (5.67). Тоді одержимо

$$\dot{m} = 0,5 m^2 a^2 / N. \quad (5.70)$$

Оскільки $\dot{m} = -dm/dt$, то вираз (5.70) матиме вигляд диференціального рівняння зміни маси КА

$$dm/dt = -m^2 a^2 / 2N \quad \text{або} \quad dm/m^2 = -a^2 dt / 2N.$$

Інтегруючи це рівняння на інтервалі часу $[t_0, t_k]$, знайдемо

$$\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m} = \frac{1}{2N} \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt. \quad (5.71)$$

Отже, для визначення закону витрати маси КА досить знати закон зміни його прискорення, викликаного силою тяги. Перетворюючи вираз (5.71) з урахуванням формули (5.60), одержимо

$$\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m - \Delta m} - \frac{1}{m} = \frac{\Delta m}{m(m - \Delta m)} = \frac{1}{2N} \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt.$$

З урахуванням цієї залежності показник (5.61) можна подати у вигляді

$$\xi_m = \frac{m_0}{2N} \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt \left/ 1 + \frac{m_0}{2N} \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt \right. . \quad (5.72)$$

При невеликих відносних витратах маси ця формула набуває більш простого виду

$$\xi_m \approx \frac{m_0}{2N} \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt . \quad (5.73)$$

Таким чином, для імпульсних маневрів відносні витрати маси визначаються залежністю (5.65), а для маневрів з безперервною тягою – формулою (5.73).

5.3.3. Основні види міжорбітальних маневрів космічних апаратів

Міжорбітальні маневри застосовують тоді, коли неможливо або невигідно виводити КА відразу на задану орбіту [20].

Для переходу із початкової орбіти на задану застосовують *перехідні* орбіти. При цьому, як правило, особливо не обмежують тривалість маневрів у часі, але вимагають мінімальних енергетичних витрат ($\Delta V = \min$) на їх проведення.

На практиці найбільший інтерес становлять маневри, які показані на рис. 5.11.

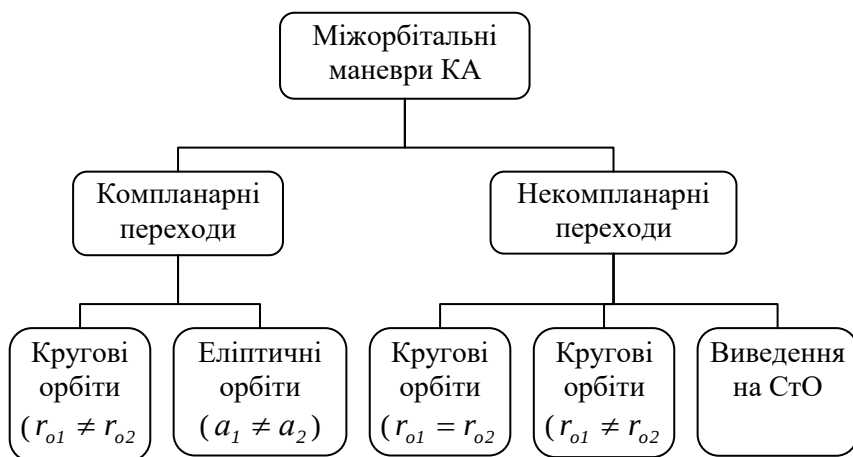


Рис. 5.11. Поширені види міжорбітальних маневрів

Серед *компланарних* маневрів найбільш поширені переходи КА:

- а) із колової орбіти радіуса r_{o1} на колову радіуса r_{o2} ;
- б) із еліптичної орбіти розміру a_1 на еліптичну розміру a_2 .

Серед *некомпланарних* маневрів застосовують переходи КА:

- а) між коловими орбітами однакового радіуса ($r_{o1} = r_{o2}$);
- б) між коловими орбітами різних радіусів ($r_{o1} \neq r_{o2}$);
- в) при виведенні КА на СтО.

5.3.4. Компланарні переходи

Перехід є *компланарним*, якщо він здійснюється між орбітами, що знаходяться в *одній площині*, причому у цій же площині лежить і перехідна орбіта.

Нагадаємо, що для переводу КА на орбіту з більшими розмірами потрібне збільшення повної енергії КА і навпаки.

Для забезпечення економічності компланарних маневрів імпульси швидкості ΔV варто прикладати в апсидальних точках орбіти (в апогеї A або перигеї P), причому для збільшення повної енергії КА імпульс ΔV необхідно орієнтувати по вектору

лінійної швидкості КА $\bar{V}$, а для зменшення – проти цього вектора (рис. 5.12). Саме така технологія керування прийнята при компланарних маневрах, що і забезпечує максимальне збільшення (зменшення) інтеграла енергії (3.10) при фіксованих витратах робочого тіла КА.

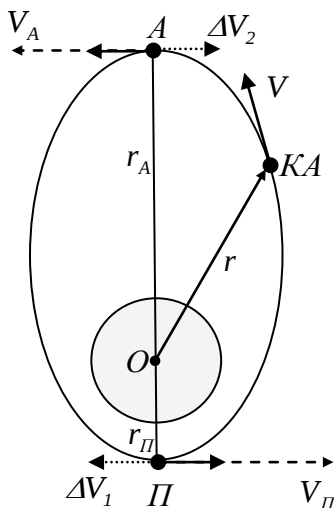


Рис. 5.12. Вигідні точки прикладення імпульсів швидкості

Для визначення витрат палива на міжорбітальні переходи використовується *імпульсна* апроксимація активних ділянок орбіти.

Таке спрощення засноване на тому, що для маневрів використовуються термохімічні (рідинні і твердопаливні) реактивні двигуни, час роботи яких значно *менше* тривалості пасивних ділянок перехідних орбіт.

Тому вважають, що до КА прикладається такий імпульс, який змінює *миттєво* величину і напрямок його швидкості, але не змінює його координати, а це, у свою чергу, спрощує розрахунки необхідних витрат палива.

Переходи між коловими орбітами. Очевидно, що колові компланарні орбіти різних радіусів не можуть перетинатися, то-

му для переходу із однієї на іншу потрібно не менше двох імпульсів швидкості.

Природним варіантом перехідної орбіти є еліпс мінімальної енергії, що торкається своїми апсидальними точками колових орбіт – перехід В. Хомана (хоманівський перехід), зображений на рис. 5.13, а.

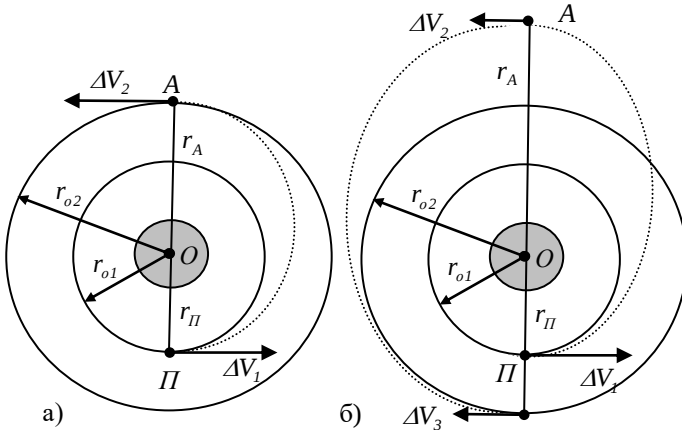


Рис. 5.13. Переходи між коловими компланарними орбітами:
а – двоімпульсний; б – тріімпульсний

Для обчислення необхідної швидкості на перехід по еліпсу мінімальної енергії можна користуватися інтегралом енергії (3.10) або формулою для розрахунку лінійної швидкості КА:

$$V(t_i) = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r(t_i)} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (5.74)$$

де t_i – часове положення КА на орбіті в i -й апсидальній точці, наприклад, в апогеї або перигеї.

Лінійну швидкість КА на коловій орбіті радіуса r_o визначимо за формулою (див. розд. 3)

$$V_{oj} = \sqrt{\mu_0 / r_{oj}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.75)$$

Нехай КА рухається по коловій орбіті радіуса r_{o1} , а потрібно перевести його на колову орбіту більшого радіуса r_{o2} (див. рис. 5.13, а). Очевидно, що такий перехід слід здійснювати по еліптичній орбіті з радіусом перигею $r_{II} = r_{o1}$ і радіусом апогею $r_A = r_{o2}$. Виходячи з цього і прийнятих допущень, вважатимемо, що перший імпульс швидкості величиною ΔV_1 прикладається в точці II , яка стає перигеєм перехідної еліптичної орбіти. При цьому величина швидкості КА в цій точці миттєво зростає до значення

$$V_{II} = V_{o1} + \Delta V_1 = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r_{o1}} - \frac{1}{a} \right)} = V_{o1} \sqrt{\frac{2r_{o2}}{r_{o1} + r_{o2}}}, \quad (5.76)$$

де $V_{o1} = \sqrt{\mu_0 / r_{o1}}$ – колова швидкість КА на початковій (першій) орбіті;

$a = 0,5(r_{o1} + r_{o2}) = 0,5(r_{II} + r_A)$ – велика піввісь перехідної орбіти.

Якщо далі нічого не вживати, то КА рухатиметься по еліптичній орбіті з параметрами r_A (радіус апогею) і r_{II} (радіус перигею). Якщо ж в апогеї A прикласти другий імпульс швидкості ΔV_2 , то лінійна швидкість КА миттєво зросте до значення

$$V_{o2} = V_A + \Delta V_2 = \sqrt{\mu_0 / r_{o2}}, \quad (5.77)$$

де $V_A = \sqrt{\mu_0 (2/r_A - 1/a)} = V_{o2} \sqrt{2r_{o1}/(r_{o1} + r_{o2})}$ – швидкість КА в апогеї перехідної орбіти.

При цьому КА продовжить рух по необхідній (другій) коловій орбіті радіуса r_{o2} .

Очевидно, що сумарний імпульс швидкості на такий перехід можна обчислити з урахуванням виразів (5.76) і (5.77) як

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = V_{o1} \left(\sqrt{\frac{2r_{o2}}{r_{o1} + r_{o2}}} - 1 \right) + V_{o2} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_{o1}}{r_{o1} + r_{o2}}} \right). \quad (5.78)$$

Приклад 5.7. Розрахувати необхідний сумарний імпульс швидкості для переходу КА з колової орбіти висотою $H_{o1} = 200 \text{ км}$ на колову орбіту висотою $H_{o2} = 600 \text{ км}$. Прийняти радіус сферичної Землі $R_s = 6371 \text{ км}$.

Розв'язання. Скористаємось виразом (5.78). Для цього попередньо знайдемо відповідні радіуси цих орбіт $r_{o1} = H_{o1} + R_s = 200 + 6371 = 6571 \text{ км}$, $r_{o2} = H_{o2} + R_s = 600 + 6371 = 6971 \text{ км}$, а потім колові швидкості КА на цих орбітах за формулою (5.75). $V_{o1} = \sqrt{\mu_0 / r_{o1}} = \sqrt{398600 / 6571} \approx 7,79 \text{ км/с}$; $V_{o2} = \sqrt{\mu_0 / r_{o2}} = \sqrt{398600 / 6971} \approx 7,56 \text{ км/с}$. Далі для зручності знайдемо окремо доданки виразу (5.78), а потім обчислимо їх суму:

$$\Delta V_1 = V_{o1} \left[\sqrt{2r_{o2} / (r_{o1} + r_{o2})} - 1 \right] = 7,79 \left[\sqrt{2 \cdot 6971 / (6571 + 6971)} - 1 \right] \approx 0,11 \text{ км/с};$$

$$\Delta V_2 = V_{o2} \left[1 - \sqrt{2r_{o1} / (r_{o1} + r_{o2})} \right] = 7,56 \left[1 - \sqrt{2 \cdot 6571 / (6571 + 6971)} \right] \approx 0,22 \text{ км/с};$$

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 \approx 0,11 + 0,22 \approx 0,33 \text{ км/с}.$$

Для спрощення співвідношення (5.78) розділимо його на V_{o1} і застосуємо поняття відносного радіуса $\tilde{r}_o = r_{o2} / r_{o1}$. Тоді одержимо формулу у відносних величинах

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_o}{1+\tilde{r}_o}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_o}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_o}} \right). \quad (5.79)$$

Аналіз рівняння (5.79) показує, що

$$\lim_{\tilde{r}_o \rightarrow \infty} \Delta \tilde{V}_\Sigma = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Ця величина в сумі з коловою швидкістю відповідає *параболічній* швидкості (див. розд. 3) для точки з радіусом r_{o1} . Якщо продиференціювати рівняння (5.79) по змінній $\tilde{r}_o$ і прирівняти отримане значення до нуля, то одержимо точку екстремуму (критичну точку) $\tilde{r}_{ок} \approx 15,58$, у якій $\max \Delta V_\Sigma \approx 0,536$.

На рис. 5.14 показана [20] залежність необхідної швидкості для двоімпульсного хоманівського переходу між коловими компланарними орбітами від відносного радіуса $\tilde{r}_o$ (у логарифмічному масштабі).

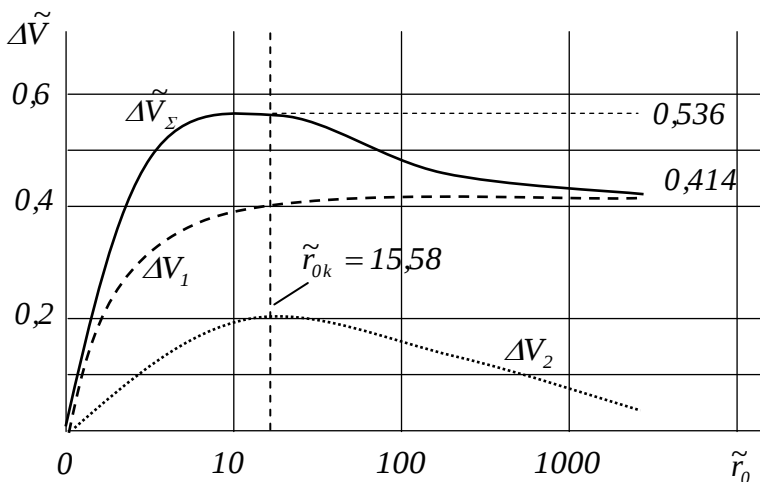


Рис. 5.14. До ефективності компланарних переходів

Як видно із рис 5.14, величина першого імпульсу обмежена значенням параболічної швидкості відходу КА на нескінченність $\Delta\tilde{V}_1 \approx 0,414$ і в цьому випадку другий імпульс прагне до нуля. Цим і пояснюється поведінка сумарних витрат палива із точкою максимуму $\tilde{r}_{ок} \approx 15,58$.

Якщо величина $\tilde{r}_o$ стає більшою деякого граничного значення, то оптимальним за сумарною швидкістю є *триімпульсний* перехід (див. рис. 5.13, б), запропонований А.А. Штернфельдом. Цей перехід називають також *біеліптичним*, оскільки він складається із *двох* еліпсів переходу. При цьому відношення сумарної швидкості до колової на початковій орбіті радіусом r_{o1} можна знайти із формул (5.76) і (5.77)

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_\Sigma = \Delta\tilde{V}_1 + \Delta\tilde{V}_2 + \Delta\tilde{V}_3 = & \sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{1+\tilde{r}_A}} - 1 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_A}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_o}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_o}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_A}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - 1 \right), \end{aligned} \quad (5.80)$$

де $\tilde{r}_A = r_A / r_{o1}$ – відношення радіуса апогею першої перехідної орбіти до радіуса початкової колової орбіти.

Порівняльний аналіз (див. рис. 5.14) дво- і триімпульсних маневрів при $\tilde{r}_A = \text{const}$ показує таке:

а) якщо $0 \leq \tilde{r}_o \leq 11,94$, то вигіднішим є двоімпульсний хоманівський перехід;

б) якщо $11,94 < \tilde{r}_o < 15,58$, то можна використовувати будь-який із переходів;

в) якщо $\tilde{r}_o \geq 15,58$, то вигіднішим стає триімпульсний перехід Штернфельда.

Переходи між еліптичними орбітами. На відміну від колових еліптичні орбіти можуть мати точки перетинання або точку торкання. У цих випадках можливий одноімпульсний перехід, але у загальному випадку він не буде оптимальним за витратами швидкості. Тому на практиці, як правило, розглядаються дво- і триімпульсні переходи.

Найбільш просто знаходяться оптимальні орбіти для двоімпульсного переходу. У цьому випадку перший імпульс визначається із умови, що перехідна орбіта матиме хоча б одну загальну точку з кінцевою орбітою. У цій точці прикладається другий імпульс, що вирівнює швидкості.

Розглянемо переходи між еліптичними орбітами за таких умов (рис. 5.15):

а) напрямки обертання КА на обох орбітах однакові;

б) кутові положення граничних точок перехідної орбіти довільні;

в) початкова і кінцева орбіти не перетинаються і не мають загальних точок;

г) кут між лініями апсид обох орбіт $\delta\omega \leq 90^\circ$.

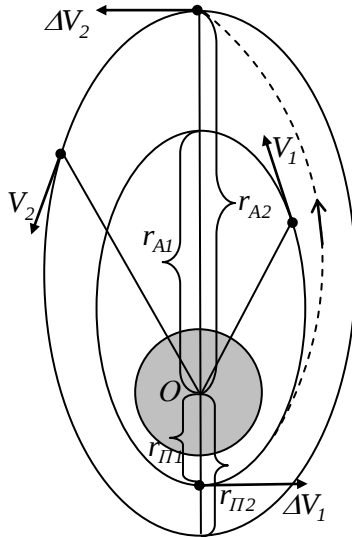


Рис. 5.15. Двоїмпульсний перехід між співвісними компланарними еліптичними орбітами

Для зазначених умов встановлено, що *мінімум швидкості* при двоїмпульсному маневрі досягається при переході із *перигею* внутрішньої орбіти в *апогей* зовнішньої.

Через оборотність руху оптимальний перехід із зовнішньої орбіти на внутрішню повинен виконуватися із *апогею* зовнішньої орбіти в *перигей* внутрішньої.

Мінімальна сумарна швидкість досягається при збігу ліній апсид обох орбіт ($\delta\omega=0^\circ$).

При цьому, використовуючи вирази (5.76) і (5.77), можна одержати такі залежності:

$$\Delta V_1 = V_o(r_{П1}) \left[\sqrt{2r_{A2}/(r_{П2} + r_{A2})} - \sqrt{2r_{A1}/(r_{П1} + r_{A1})} \right]; \quad (5.81)$$

$$\Delta V_2 = V_o(r_{A2}) \left[\sqrt{2r_{П2}/(r_{П2} + r_{A2})} - \sqrt{2r_{П1}/(r_{П1} + r_{A1})} \right], \quad (5.82)$$

де $V_o(r_{П1})$, $V_o(r_{A2})$ – колові швидкості на орбітах радіусів $r_{П1}$ та r_{A2} відповідно.

5.3.5. Некомпланарні переходи

Некомпланарні (просторові) переходи застосовують тоді, коли початкова і кінцева орбіти лежать у *різних* площинах. Поворот площини орбіти зазвичай вимагає значних витрат характеристичної швидкості.

Задача *оптимального* імпульсного некомпланарного переходу між довільними орбітами поки не вирішена, однак відомо, що *зміну площини орбіти варто проводити в точці, де швидкість КА мінімальна.*

Вектор імпульсу швидкості для здійснення маневру з поворотом площини знаходять за формулою

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1,$$

де $\bar{V}_2$ – кінцевий вектор швидкості КА в точці маневру;

$\bar{V}_1$ – початковий вектор швидкості КА в точці маневру.

При цьому величина імпульсу швидкості складає

$$\Delta V = \sqrt{V_2^2 + V_1^2 - 2V_2 \cdot V_1 \cdot \cos \Delta \gamma}, \quad (5.83)$$

де $\Delta \gamma$ – двогранний кут повороту площини орбіти (кут некомпланарності), наприклад, кут зміни нахилення орбіти ($\Delta \gamma = \Delta i$), кут зміни інерціальної довготи ВВ орбіти ($\Delta \gamma = \Delta \Omega$).

З урахуванням цього на практиці найбільш поширені такі часткові *варіанти* некомпланарних маневрів:

а) одноімпульсні переходи між коловими орбітами одного радіуса;

б) двоімпульсні переходи між коловими орбітами різних радіусів;

в) двоімпульсні переходи для виведення КА на СтО;

г) триімпульсні переходи між коловими орбітами.

Наприклад, для випадку **одноімпульсного переходу між коловими орбітами одного радіуса** ($r_{o2} = r_{o1}$) у точках їхнього перетинання із формули (5.83) одержимо

$$\Delta V = 2 \cdot V_o \sin \Delta \gamma / 2.$$

Як видно із цієї формули, для повороту площини орбіти на кут $\Delta\gamma = 60^\circ$ характеристична швидкість маневру повинна дорівнювати коловій V_o , а на кут $\Delta\gamma = 90^\circ$ – параболічній $\sqrt{2} \cdot V_o$.

Двоімпульсні переходи між коловими орбітами різних радіусів ($r_{o2} > r_{o1}$) реалізують за такими схемами:

Схема 1 (рис. 5.16). Перший імпульс повертає площину перехідної орбіти на кут $\Delta\gamma$ і одночасно збільшує швидкість КА до такої величини, щоб радіус апогею перехідної орбіти дорівнював $r_A = r_{o2}$. Другий імпульс швидкості забезпечує перехід КА на колову орбіту.

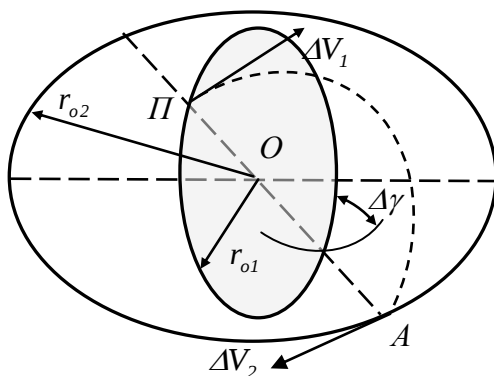


Рис. 5.16. Двоімпульсний перехід між некомпланарними коловими орбітами різних радіусів (схема 1)

Схема 2 (рис. 5.17). Перший імпульс збільшує швидкість КА до такої величини, щоб радіус апогею перехідної орбіти дорівнював $r_A = r_{o2}$, але кут некомпланарності при цьому не змінюється.

В апогеї перехідної орбіти другий імпульс швидкості змінює кут некомпланарності $\Delta\gamma$ і збільшує швидкість КА до колової.

Схема 3 (рис. 5.18). Перший імпульс збільшує швидкість КА до такої величини, щоб радіус апогею перехідної орбіти $r_A = r_{o2}$.

Одночасно цей імпульс повертає площину перехідної орбіти на кут некомпланарності $\Delta\gamma_1$ ($\Delta\gamma_1 < \Delta\gamma$).

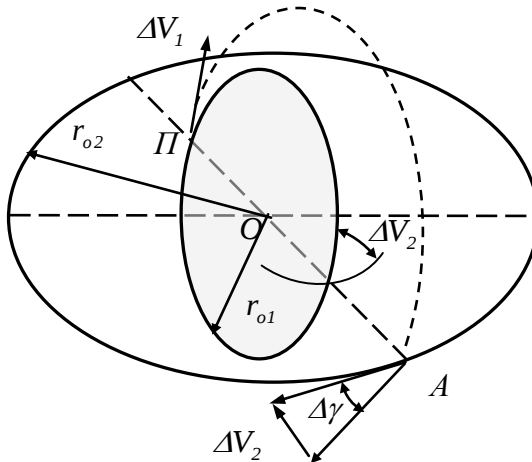


Рис. 5.17. Двоїмпульсний перехід між некомпланарними коловими орбітами різних радіусів (схема 2)

В апогеї перехідної орбіти другий імпульс повертає площину орбіти на кут $\Delta\gamma_2 = \Delta\gamma - \Delta\gamma_1$ і збільшує швидкість КА до колової.

Аналіз цих схем показує, що схема 1 є явно неоптимальною, оскільки поворот площини перехідної орбіти здійснюється на орбіті меншого радіуса r_{o1} , де лінійна швидкість КА більша. При переході за схемою 3 відношення сумарного імпульсу швидкості до колової швидкості на орбіті радіуса r_{o1} на підставі виразу (5.83) з урахуванням залежностей (5.76) і (5.77) визначається формулою

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{V}_s = (\Delta\tilde{V}_1 + \Delta\tilde{V}_2)/V_{o1} = & \sqrt{\frac{1+3\tilde{r}_o}{1+\tilde{r}_o}} - 2\sqrt{\frac{2\tilde{r}_o}{1+\tilde{r}_o} \cos \Delta\gamma_1} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_o}} \sqrt{\frac{3+\tilde{r}_o}{1+\tilde{r}_o}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_o} \cos(\Delta\gamma - \Delta\gamma_1)}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Якщо покласти $\Delta\gamma_1 = 0$, то ця формула визначає витрати характеристичної швидкості для схеми 2. Однак простого аналітичного виразу для знаходження оптимального значення кута першого повороту $\Delta\gamma_1$ одержати не вдається.

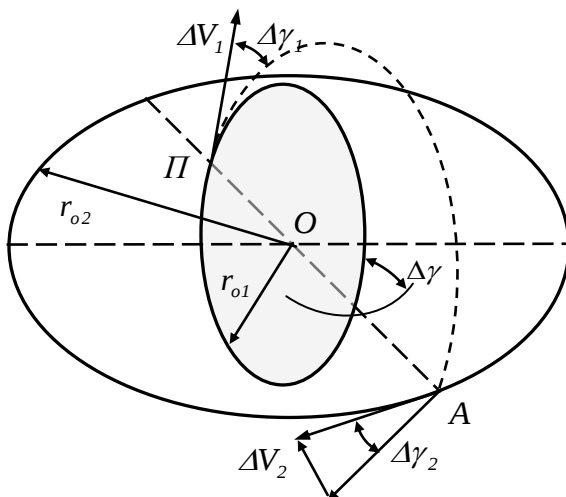


Рис. 5.18. Двоїмпульсний перехід між некомпланарними коловими орбітами різних радіусів (схема 3)

Тому чисельними методами знайдено, що цей кут не повинен перевищувати $\Delta\gamma_1 \leq 5,5^\circ$. Тоді, підставляючи у вираз (5.84) значення із діапазону $\Delta\gamma_1 = 0 \dots 5,5^\circ$, можна знайти мінімум $\Delta\tilde{V}_\Sigma$.

При виведенні КА на **СтО** використовують ці ж схеми. При цьому початкова орбіта вибирається низькою, а її нахилення мінімально можливим (для КА, що запускаються із космодрому Байконур, мінімальне нахилення $i = 51^\circ$). Тоді, використовуючи ці значення, можна знайти, що сумарна характеристична швидкість становить:

а) для схеми 1 при повороті площини орбіти на кут некомпланарності $\Delta\gamma = i = 51^\circ$

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 8075 \text{ м/с} + 1478 \text{ м/с} = 9533 \text{ м/с};$$

б) для схеми 2, коли поворот площини перехідної орбіти здійснюється в апогеї,

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 2457 \text{ м/с} + 2413 \text{ м/с} = 4870 \text{ м/с};$$

в) для схеми 3, коли першим імпульсом реалізується поворот площини перехідної орбіти на кут $\Delta \gamma_1 = 3^\circ$, а другим – площина орбіти повертається на кут $\Delta \gamma_2 = 48^\circ$,

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 2501 \text{ м/с} + 2329 \text{ м/с} = 4830 \text{ м/с}.$$

Таким чином, схема виведення 3 у порівнянні зі схемою 2 дає виграв у швидкості приблизно 40 м/с . Схема виведення 1 є найбільш невідгідною.

Цей факт підтверджує висновок про те, що *зміну площини орбіти варто робити там, де швидкість КА мінімальна*.

Подальшого зменшення витрат характеристичної швидкості при виведенні КА на СтО можна досягти, якщо змінити схему маневру, а саме [20]:

а) використовувати *триімпульсні* схеми виведення із трьома поворотами площини орбіти і висотою апогею перехідної орбіти $H_A \approx 40000 \text{ км}$, що приводить до зменшення швидкості на величину близько 300 м/с , але до збільшення часу переходу до *11 діб*;

б) використовувати гравітаційне поле Місяця при досить близькому прольоті КА (близько 5000 км) в околі вузла його орбіти відносно площини екватора Землі, що приводить до зменшення швидкості у порівнянні із двоімпульсним переходом на величину близько 500 м/с (без урахування коригувальних маневрів).

Подальшим розвитком методів оптимізації некомпланарних маневрів є **триімпульсний перехід**.

У триімпульсних схемах закладена ідея одержання високої перехідної орбіти, в апогеї якої при мінімальній лінійній швидкості другим імпульсом ΔV_2 (рис. 5.19) виконується поворот площини перехідної орбіти на основну величину кута некомпланарності.

Найпростішим маневром є маневр із одним поворотом площини перехідної орбіти, причому лінії апсид перехідних півеліпсів збігаються з лінією перетину площин початкової (радіус r_{o1}) і кінцевої (радіус r_{o2}) орбіт.

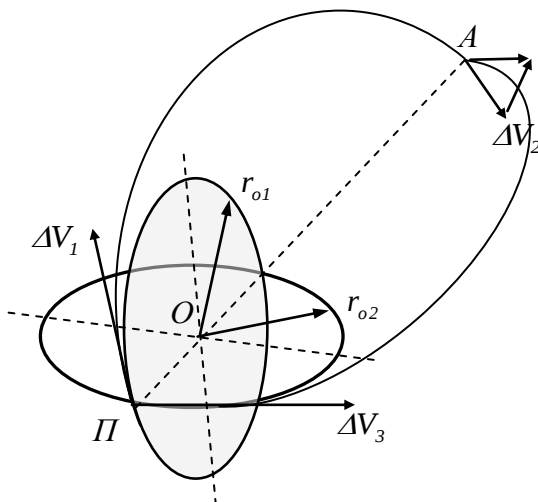


Рис. 5.19. Триімпульсний перехід

У загальному випадку, при різних радіусах колових орбіт, перехід з одним поворотом площини перехідної орбіти реалізується за такою схемою:

після першого імпульсу формується перехідна орбіта з радіусами перигею $r_{\Pi} = r_{o1}$ і апогею $r_A > r_{o2}$, яка компланарна з початковою;

другий імпульс прикладається в апогеї перехідної орбіти і повертає її площину на кут некомпланарності $\Delta\gamma$, причому радіус апогею залишається попереднім, а радіус перигею збільшується до значення r_{o2} ;

третій імпульс прикладається в перигеї перехідної орбіти, яка компланарна з кінцевою орбітою, і реалізує перехід на колову орбіту радіусом r_{o2} .

Можна показати [20], що при такій схемі міжорбітальних переходів відношення сумарної імпульсної швидкості КА до його

лінійної швидкості на початковій коловій орбіті визначається формулою

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = \Delta V_\Sigma / V_{o1} = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3) / V_{o1} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{1+\tilde{r}_A}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_A}} \times \\ \times \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_A} + \frac{2\tilde{r}_o}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - 4 \sqrt{\frac{\tilde{r}_o}{(1+\tilde{r}_A)(\tilde{r}_o + \tilde{r}_A)}} \cos \Delta\gamma + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_o}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - 1 \right),$$

де $\tilde{r}_o = r_{o2} / r_{o1}$, $\tilde{r}_A = r_A / r_{o1}$.

Як випливає із наведеної формули, величина відносної сумарної швидкості залежить від відносного радіуса $\tilde{r}_o$, кута некомпланарності орбіти $\Delta\gamma$ і відносного радіуса апогею перехідної орбіти $\tilde{r}_A$, який можна вибирати. Залежно від зазначених параметрів оптимальними можуть бути дво- або триімпульсні переходи.

Найбільш загальною постановкою завдання знаходження оптимальних триімпульсних маневрів є переходи із трьома поворотами площини перехідних орбіт.

Відношення сумарної імпульсної швидкості до швидкості КА на початковій коловій орбіті для такого переходу визначається формулою [20]

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = \sqrt{\frac{1+3\tilde{r}_A}{1+\tilde{r}_A}} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{1+\tilde{r}_A}} \cos \Delta\gamma_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_A}} \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_A} + \frac{2\tilde{r}_o}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - 4 \sqrt{\frac{\tilde{r}_o}{(1+\tilde{r}_A)(\tilde{r}_o + \tilde{r}_A)}} \cos \Delta\gamma_2 + \\ + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_o}} \sqrt{\frac{\tilde{r}_o + 3\tilde{r}_A}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_A}{\tilde{r}_o + \tilde{r}_A}} \cos(\Delta\gamma - \Delta\gamma_1 - \Delta\gamma_2),$$

де $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2$ – кути повороту перехідних орбіт при першому і другому імпульсах відповідно.

Порівняльний аналіз витрат швидкості для дво- і триімпульсних некомпланарних міжорбітальних переходів показує, що виграшу у сумарній швидкості близько 10% для триімпульсних переходів можна досягти у діапазоні кутів $\Delta\gamma \geq 45^\circ$.

5.4. КОРИГУВАЛЬНІ МАНЕВРИ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Коригувальним маневром, або корекцією орбіти, називають керований рух КА, здійснюваний для усунення невеликих відхилень окремих параметрів його орбіти від розрахункових або заданих значень. Відмітною рисою коригувальних маневрів КА є їхній *імовірнісний* характер, обумовлений самою природою виникаючих відхилень параметрів орбіт або помилок, а також статистичним методом обробки результатів їхніх вимірів.

Корекцію орбіти здійснюють, як правило, рідинними реактивними двигунами малої тяги в імпульсному режимі їхньої роботи. При цьому результат корекції залежить від орієнтації і величини вектора тяги двигуна і точки (моменту орбітального часу) його прикладення.

Якщо під час міжорбітальних маневрів говорять здебільшого про імпульс швидкості $\Delta\bar{V}$, то під час коригувальних маневрів поряд із цим частіше вживають поняття *імпульсу корекції* $\delta\bar{V}$, причому, як правило, коригувальні імпульси менші від міжорбітальних ($\delta V < \Delta V$) і значно менші від лінійної швидкості КА ($\delta V \ll V$).

Якщо напрямок імпульсу корекції збігається з напрямком орбітального руху КА, то корекція називається *прискорювальною*, а у протилежному випадку – *гальмівною*. Для створення гальмівного імпульсу найчастіше розвертають КА навколо власного центра мас таким чином, щоб сопла коригувальних двигунів орієнтувалися по ходу руху КА.

Виходячи з цього, коригувальні маневри КА найзручніше описувати в барицентричних СК. При цьому імпульси корекції зазвичай розкладають на складові по осях цих СК, що полегшує

формування відповідних програм корекції (програм керування орбітальним рухом КА).

5.4.1. Системи координат для коригувальних маневрів

На практиці для розрахунку і реалізації програми корекції орбіт КА використовують праві прямокутні барицентричні СК:

орбітальну рухому СК (ОрРСК) $KX_oY_oZ_o$;

швидкісну СК (ШвСК) $KX_vY_vZ_v$.

ОрРСК $KX_oY_oZ_o$ (рис. 5.20) має початок відліку у центрі мас КА K . Основна площина – площина орбіти. Вісь Y_o спрямована уздовж радіуса-вектора КА. Вісь X_o лежить в основній площині і спрямована у бік руху КА. Вісь Z_o спрямована перпендикулярно до орбіти КА і доповнює систему до правої.

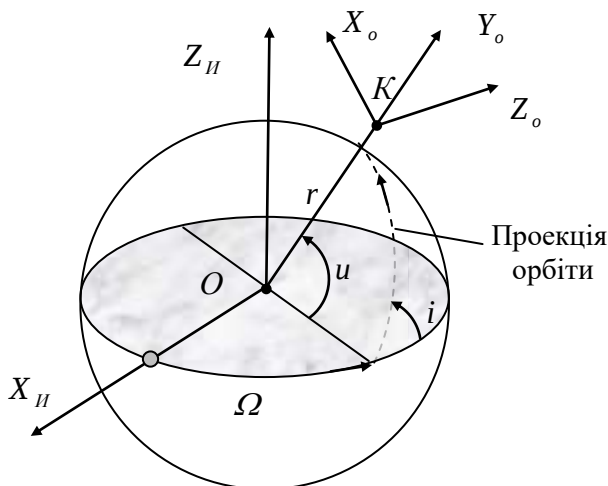


Рис. 5.20. Орбітальна рухома СК

Положення ОрРСК в ІСК визначається істинною аномалією g (або аргументом широти u) і радіусом-вектором КА r .

ШвСК (рис. 5.21) також має початок відліку у центрі мас КА. Основною площиною даної СК є площина орбіти, у якій лежать осі X_v і Y_v .

При цьому вісь X_v спрямована вздовж вектора лінійної швидкості КА $\vec{V}$. Напрямок осі Y_v збігається з напрямком радіуса-вектора КА. Вісь $Z_v \equiv Z_o$ спрямована перпендикулярно до площини орбіти і доповнює систему до правої.

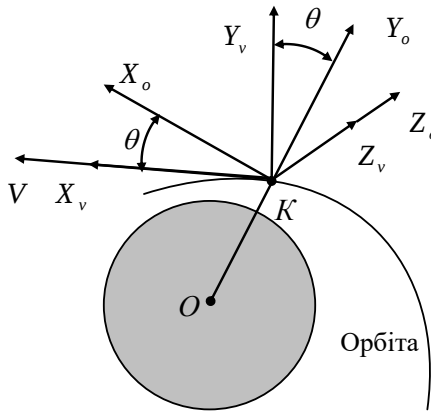


Рис. 5.21. Швидкісна СК

Як видно із рис. 5.21, ШвСК повернута відносно ОрСК навколо осі $Z_v \equiv Z_o$ на кут місцевого горизонту θ .

5.4.2. Складові імпульсу корекції в різних системах координат

Довільно орієнтований у просторі вектор імпульсу корекції $\delta\vec{V}$ (рис. 5.22, а) задамо в ОрСК кутом β у вертикальній площині і кутом α – у горизонтальній площині рисунка.

Проекції цього вектора на осі ОрСК залежать від модуля цього вектора δV та зазначених кутів його орієнтації і мають такі назви [26]:

$\delta V_x = \delta V \cos \alpha \cos \beta$ – трансверсальна;

$\delta V_y = \delta V \sin \beta \cos \alpha$ – радіальна;

$\delta V_z = \delta V \sin \alpha$ – ортогональна.

Складові вектора $\delta \bar{V}$ у ШвСК (рис. 5.22, б) називаються ін-акше, а саме:

$\delta V_\tau = \delta V \cos(\beta - \theta) \cos \alpha$ – тангенціальна;

$\delta V_n = \delta V \sin(\beta - \theta) \cos \alpha$ – нормальна;

$\delta V_b = \delta V_z = \delta V \sin \alpha$ – бінормальна.

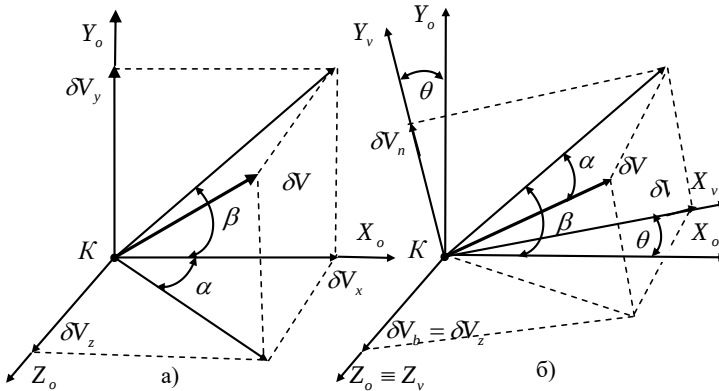


Рис. 5.22. Складові імпульсу корекції в ОрПСК

Як видно із опису і аналізу орбітальної і швидкісної СК, складові імпульсів корекції можуть по-різному впливати на параметри орбіти КА.

5.4.3. Вплив складових імпульсу корекції на елементи орбіт космічних апаратів

З огляду на те, що між складовими імпульсу корекції, які задаються у різних СК, існує однозначний зв'язок, то надалі, де це доречно, обмежимося аналізом складових тільки в одній із СК.

При цьому очевидно, що оскільки тангенціальна і нормальна складові лежать у площині орбіти, то їх і варто використовувати для зміни тих елементів, які знаходяться у цій площині, тобто

великої півосі a , ексцентриситету e , фокального параметра p , аргументу перигею ω , а також періоду обертання КА T , середньої аномалії M і т.п.

У той же час, оскільки бінормальна складова спрямована перпендикулярно до площини орбіти, то її можна застосовувати для корекції положення цієї площини, тобто для зміни інерціальної довготи ВВ орбіти Ω та її нахилання i .

Розглянемо **методику** знаходження залежності між величиною і точкою прикладення коригувальних імпульсів та змінами відповідних елементів орбіт.

По-перше, прийнемо виправдане практикою допущення, що складові імпульсу корекції значно менші лінійної швидкості КА: $\delta V_j \ll V_j$, $j = \{\tau, n, b\}$.

По-друге, для знаходження величини змін (варіацій) тих параметрів орбіт, які явно пов'язані з лінійною швидкістю КА $\chi_j = \chi(V_j)$, шляхом диференціювання відповідних виразів знайдемо їхні диференціали як функції від змін лінійної швидкості КА, тобто від імпульсу корекції: $\delta \chi_j = \chi(\delta V_j)$.

По-третьє, для розрахунку величини змін інших елементів орбіт, зв'язаних однозначно з попередніми елементами рівняннями $\phi = \phi(\chi)$, скористаємось залежністю виду $\delta \phi = \phi(\delta \chi)$.

По-четверте, для вибору вигідної точки прикладення коригувального імпульсу дослідимо отримані результати на екстремум відносно істинної аномалії КА $\mathcal{A}$, тобто знайдемо функцію $\mathcal{G}_{onm} = \phi(\max \delta \chi_k \wedge \min \delta V_j)$.

Цей запис означає, що оптимальною точкою прикладення коригувального імпульсу є точка з такою істинною аномалією $\mathcal{G}_{onm}$, у якій одержить максимальне збільшення параметр орбіти χ_k при мінімальному імпульсі δV_j .

Покажемо використання методики на прикладі *тангенціальної складової*. Зауважимо, що оскільки тангенціальний імпульс діє у площині орбіти, то він не змінює її орієнтацію у просторі,

тобто не впливає на інерціальну довготу ВВ Ω та нахилення орбіти i . Отже, збільшення цих параметрів $\delta\Omega_\tau = 0$, $\delta i_\tau = 0$.

Для визначення впливу даного імпульсу на велику піввісь a скористаємося співвідношенням для лінійної швидкості КА (3.56) у вигляді

$$V = \sqrt{\mu_0(2/r - 1/a)}, \quad (5.85)$$

де r – модуль радіуса-вектора КА.

Із цього виразу випливає, що зв'язок між варіаціями $\delta a_\tau = \phi(\delta V_\tau)$ має вигляд

$$\delta a_\tau = 2a^2 V \mu_0^{-1} \delta V_\tau. \quad (5.86)$$

Скориставшись формулою (3.30), можна аналогічно знайти залежність між варіаціями сидеричного періоду обертання КА T і великої півосі

$$\delta T_\tau = 3T^2 \cdot \delta V_\tau / 2a, \quad (5.87)$$

а з урахуванням зв'язків між періодом обертання (3.30), середнім рухом (3.32) і середньою аномалією (3.51) можна одержати варіації останньої

$$\delta M_\tau = -3V \cdot \delta V_\tau / \sqrt{\mu_0 a}. \quad (5.88)$$

Аналогічно можна показати, що за рахунок тангенціального імпульсу отримують приріст ексцентриситет орбіти

$$\delta e_\tau = 2(e + \cos \vartheta) \cdot V^{-1} \delta V_\tau \quad (5.89)$$

і аргумент перигею ω

$$\delta \omega_\tau = 2 \sin(\vartheta - \omega) \cdot \delta V_\tau / eV. \quad (5.90)$$

Отже, тангенціальний імпульс корекції змінює розміри і форму орбіти, її орієнтацію у власній площині, а також період обертання КА.

Приклад 5.8. Розрахувати тангенціальний імпульс корекції, який збільшить сидеричний період обертання КА на величину $\delta T = 10^s$, якщо КА знаходиться на орбіті з висотою апогею $H_A = 800 \text{ км}$ та висотою перигею $H_\Pi = 600 \text{ км}$. Прийняти радіус сферичної Землі $R_s = 6371 \text{ км}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (5.87). Для цього знайдемо велику піввісь орбіти $a = 0,5(H_A + H_\Pi + 2R_s) = 0,5(800 + 600 + 2 \cdot 6371) = 7071 \text{ км}$ та

сидеричний період $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu_0} = 2\pi\sqrt{7071^3/398600} \approx 5917^s \approx 98,6^m$. Далі із формули (5.87) отримаємо шукане значення тангенціального імпульсу $\delta V_\tau = 2a \cdot \delta T_\tau / 3T^2 = 2 \cdot 7071 \cdot 10 / 3 \cdot 5917^2 \approx 1,3 \text{ м/с}$.

Відносно *нормального* імпульсу зазначимо, що оскільки він також діє у площині орбіти, то її орієнтація у просторі за рахунок нього не змінюється, тобто $\delta \Omega_n = 0$, $\delta i_n = 0$. Крім того, у цьому випадку практично не змінюється значення лінійної швидкості КА, а отже, залишаються незмінними велика піввісь ($\delta a_n = 0$), період обертання ($\delta T_n = 0$) і середня аномалія ($\delta M_n = 0$).

У той же час із геометричних міркувань зрозуміло, що нормальний імпульс повинен якимось чином впливати на ексцентриситет орбіти і аргумент її перигею. Дійсно, як показано в [26], ці параметри орбіти одержують прирости, задавані виразами:

$$\delta e_n = -r \sin \vartheta \cdot \delta V_n / aV, \quad (5.91)$$

$$\delta \omega_n = 2ae + r \cos(\vartheta - \omega) \cdot \delta V_n / aeV. \quad (5.92)$$

Таким чином, нормальний імпульс коректує форму орбіти і її орієнтацію у власній площині.

Що стосується *бінормального* імпульсу, то його головне призначення – змінювати положення орбіти у *просторі*. Можна показати [26, 44, 55], що цей імпульс викликає зміни інерціальної довготи ВВ і нахилення орбіти, які описуються формулами:

$$\delta \Omega_b = \sin(\vartheta - \omega) \cdot \delta V_b / V \cos \theta \sin i; \quad (5.93)$$

$$\delta i_b = \cos(\vartheta - \omega) \cdot \delta V_b / V \cos \theta. \quad (5.94)$$

Крім того, бінормальна складова імпульсу корекції залежно від нахилення орбіти викликає зміни аргументу перигею

$$\delta \omega_b = \sin(\vartheta - \omega) \cdot \delta V_b / V \cos \theta \operatorname{tg} i. \quad (5.95)$$

Отже, бінормальний імпульс коректує положення орбіти у просторі і у власній площині.

Таким чином, наведені формули дозволяють знайти кількісні співвідношення між величиною і видом коригувальних імпульсів та очікуваними змінами елементів орбіти. При цьому резуль-

тати корекції залежать від величини лінійної швидкості та істинної аномалії КА. Отже, виникає необхідність вирішення завдання оптимізації з метою визначення енергетично вигідних точок прикладення імпульсів корекції на орбіті.

5.4.4. Аналіз ефективності імпульсів корекції

Як показано вище, **тангенціальний імпульс** змінює, у першу чергу, велику піввісь, ексцентриситет і аргумент перигею орбіти. Тому проведемо аналіз ефективності впливу тангенціального імпульсу саме на ці параметри.

Оскільки із рівняння (5.86) випливає, що величина змін *великої півосі* залежить від значень лінійної швидкості КА, яка відповідно до виразів (5.74) і (3.56)...(3.59) міняється у межах $V_A \leq V \leq V_{II}$, то очевидно, що максимального ефекту корекції можна досягти у точці *перигею*

$$\delta a_{\tau \max} = 2a^2 V_{II} \mu_0^{-1} \cdot \delta V_{\tau}, \quad (5.96)$$

а мінімального – у точці апогею

$$\delta a_{\tau \min} = 2a^2 V_A \mu_0^{-1} \cdot \delta V_{\tau}. \quad (5.97)$$

Вплив тангенціальної складової на *ексцентриситет* орбіти неважко визначити із формули (5.89), звідки випливає, що ефективність корекції у цьому випадку залежить від двох змінних – лінійної швидкості та істинної аномалії. Тому, щоб знайти оптимальні точки прикладення тангенціального імпульсу, необхідно дослідити вираз (5.89) по цих змінних на екстремум.

При цьому, поклавши $\cos \vartheta = \pm 1$ і з огляду на те (див. розд. 3), що

$$V_{II}/(1+e) = V_A/(1-e),$$

одержимо

$$\delta e_{\tau \max} = 2(1+e)V_{II}^{-1} \cdot \delta V_{\tau} = 2(1-e)V_A^{-1} \cdot \delta V_{\tau}. \quad (5.98)$$

Отже, для корекції ексцентриситету орбіти тангенціальний імпульс можна прикладати як у її *перигеї* ($\vartheta = 0$), так і в *апогеї* ($\vartheta = \pi$). Однак, як видно із формули (5.98), для збільшення екс-

центриситету тангенціальний імпульс повинен бути в перигеї прискорювальним, а в апогеї – гальмівним.

Що стосується ефективності корекції *аргументу перигею*, то, як видно із формули (5.90), необхідно використовувати ті точки прикладення тангенціального імпульсу, де $\sin(\vartheta - \omega) = \pm 1$, тобто точки з істинною аномалією $\vartheta = \omega \pm 90^\circ$.

Можна показати, що ці точки лежать на перетинанні еліпса із центральною лінією BB' (див. рис. 3.4). У цьому випадку одержимо

$$\delta\omega_{\tau max} = 2e^{-1} \sqrt{a(1-e^2)} \mu_0^{-1} \cdot \delta V_\tau. \quad (5.99)$$

У той же час, як впливає із рівняння (5.90), у точках, де $\sin(\vartheta - \omega) = 0$, а отже, $\vartheta = \omega$ або $\vartheta = \omega \pm \pi$, корекція аргументу перигею тангенціальним імпульсом неможлива, тобто $\delta\omega_{\tau min} = 0$. Такими точками є апогей і перигей орбіти.

Нормальний імпульс змінює ексцентриситет орбіти і аргумент перигею. Аналіз виразу (5.91) показує, що найбільша зміна *ексцентриситету* під впливом нормального імпульсу відбувається на *другій фокальній лінії* $P_2P'_2$ (див. рис. 3.4).

У точках перетину цієї лінії з орбітою ексцентриситет отримує приріст, який визначається за формулою

$$\delta e_{n max} = V_n^{-1} (1+e) \sqrt{1+e^2} \cdot \delta V_n. \quad (5.100)$$

У той же час у цих точках аргумент перигею під впливом нормального імпульсу змінюватись не буде. Максимальна зміна *аргументу перигею* відбувається в перигеї і апогеї орбіти. У цьому випадку має місце співвідношення

$$\delta\omega_{n max} = \frac{1+e}{e} \sqrt{\frac{a(1-e)}{\mu_0(1+e)}} \cdot \delta V_n. \quad (5.101)$$

Ексцентриситет орбіти в такому разі не змінюється. Однак цей висновок справедливий лише для *малих значень* імпульсів корекції.

У загальному ж випадку нормальний імпульс, викликаючи зміну аргументу перигею, змінює величину істинної аномалії і відповідну зміну ексцентриситету.

Біномальний імпульс корекції змінює інерціальну довготу ВВ, нахилення орбіти і аргумент перигею. Вплив точки прикладення біномального імпульсу на зміну орбітальних параметрів можна простежити із рівнянь (5.93)...(5.95). З них видно, що зміни інерціальної довготи ВВ, нахилення і аргументу перигею залежать від аргументу широти в точках корекції.

Із наведених даних випливає, що зміни *нахилення орбіти* біномальним імпульсом доцільно здійснювати в одному із вузлів орбіти ($u = 0$ або $u = 180^\circ$), а зміну *інерціальної довготи* ВВ орбіти і *аргументу перигею* – у точках з аргументом широти $u = 90^\circ$ або $u = 270^\circ$.

При цьому максимальні зміни цих параметрів можна обчислити за формулами:

$$\delta \Omega_{bmax} = (V \cos \theta \sin i)^{-1} \cdot \delta V_b ; \quad (5.102)$$

$$\delta i_{bmax} = (V \cos \theta)^{-1} \cdot \delta V_b ; \quad (5.103)$$

$$\delta \omega_{bmax} = (V \cos \theta \operatorname{tg} i)^{-1} \cdot \delta V_b . \quad (5.104)$$

Для наочності отримані результати наведені на рис. 5.23. Проведений аналіз показав, що ексцентриситет орбіти і аргумент перигею змінюються як під впливом тангенціального імпульсу, так і під впливом нормального імпульсу. Тому цікаво порівняти ефективність впливу цих імпульсів, рівних за модулем.

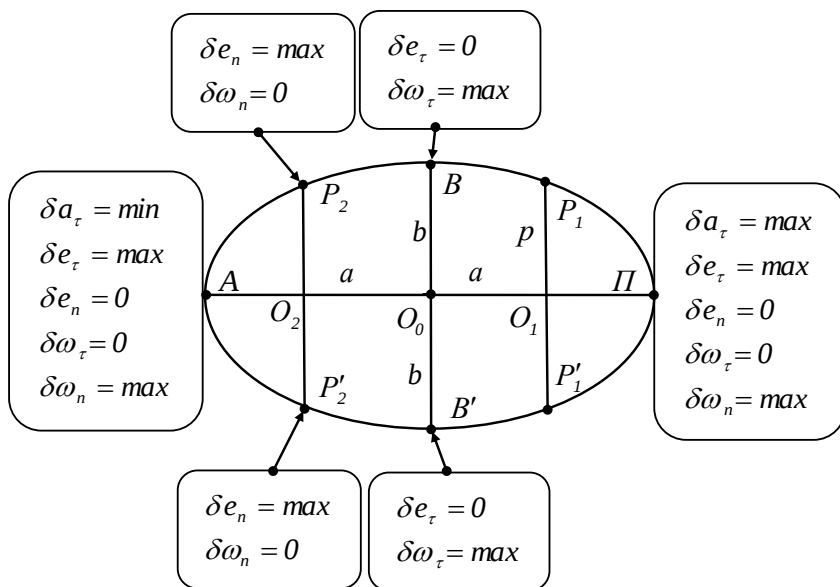


Рис. 5.23. Точки екстремальних змін параметрів орбіти

Для цього, використовуючи залежності (5.98) і (5.100), знайдемо співвідношення $\delta e_{\tau \max} / \delta e_{n \max}$, з якого витікає, що під впливом тангенціального імпульсу ексцентриситет орбіти зміниться у $2/\sqrt{1+e^2}$ рази більше, ніж під впливом нормального імпульсу такої ж величини. Крім того, тангенціальний імпульс, прикладений у перигеї або апогеї орбіти, не змінює орієнтацію лінії апсид.

Аналогічно, порівнюючи вирази (5.99) і (5.101), одержимо $\delta \omega_{\tau \max} / \delta \omega_{n \max} = 2$, що свідчить про те, що зміну орієнтації лінії апсид вигідніше здійснювати за допомогою тангенціальних імпульсів.

Контрольні питання

1. У чому полягає відмінність між другим законом Ньютона і рівнянням Мещерського?
2. Чим відрізняються між собою перша і друга задачі Ціолковського?

3. Чим відрізняється характеристична швидкість ракети від звичайної швидкості її поступального руху?
4. За рахунок чого можна збільшити значення кінцевої швидкості ракети?
5. Які основні системи координат використовують при виведенні КА на задану орбіту?
6. Які сили діють на ракету-носію у польоті?
7. За рахунок чого створюють керуючі сили і моменти при керуванні польотом ракет-носіїв?
8. За якими схемами може здійснюватись виведення КА на задану орбіту?
9. Які види міжорбітальних маневрів найчастіше застосовують на практиці?
10. У чому відмінності між компланарними і некомпланарними маневрами КА?
11. Які основні системи координат використовують при корекції орбіт КА?
12. На які складові розкладають імпульси корекції орбіти і чому?
13. У яких точках орбіти найвигідніше прикладати коригувальні імпульси і чому?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абалкин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике /Под ред. Г.Н. Дубошина. –М.: Наука, 1971. –584 с.
2. Агапов В. DSP F-20 успешно выведен на орбиту //Новости космонавтики. –2000. –Т. 10. –№7 (210). –С. 33–35.
3. Агапов В. США наращивают КА видовой разведки //Новости космонавтики. –2001. –Т. 10. –№12 (227). –С. 34–36.
4. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Ярошевский В.А. Маневрирование космических аппаратов. –М.: Машиностроение, 1970. –416 с.
5. Андреев С.М., Бутейко О.С., Фролов В.Я., Чорний С.В. Принципи побудови космічних систем отримання геоінформації: Навч. посібник. –Харків: ХУПС, 2005. –233 с.
6. Артюшин Л.М., Мосов С.П., Пясковський Д.В., Толубко В.Б. Аерокосмічна розвідка в локальних війнах сучасності: досвід, проблемні питання і тенденції: Монографія. –К.: НАОУ, 2002. –208 с.
7. Астрономический календарь. Постоянная часть /Под ред. В.К. Абалакина. –Изд. седьмое. –М.: Наука, 1981. –704 с.
8. Астрономічний календар на 2000 рік : Випуск сорок шостий /ГАО НАНУ. –К.: Сфера, 1999. –240 с.
9. Бабак В.П., Конін В.В., Марченко В.П. Супутникова радіонавігація. –К.: Техніка, 2004. –328 с.
10. Бакулин П.И., Кононович Э.В., Мороз В.И. Курс общей астрономии: Учебник. –М.: Наука, 1983. –560 с.
11. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. –М.: Наука, 1965. –340 с.
12. Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике /Под общ. ред. В.Г. Демина. –М.: Наука, 1972. –336 с.
13. Белоус Л.М. Физика. Элементы расчета движения космических аппаратов. –Житомир: ЖВУРЭ, 1986. –172 с.

14. Білоус Л.М. Елементи небесної механіки і астродинаміки: Навчальний посібник. –Житомир: ЖВІРЕ, 2001. –56 с.
15. Большой энциклопедический словарь. Математика /Глав. ред. Ю.В. Прохоров. –Изд. третье. –М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. –848 с.
16. Большой энциклопедический словарь. Физика /Глав. ред. Ю.В. Прохоров. –Изд. четвертое. –М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. –944 с.
17. Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Г. Основы экспериментальной космической баллистики. –М.: Машиностроение, 1974. –340 с.
18. Герасюта Н.Ф., Новиков А.В., Белецкая Н.Г. Динамика полета. Основные задачи динамического проектирования ракет: Учебное пособие для вузов /Под ред. С.Н. Конюхова. –Днепропетровск, 1998. –368 с.
19. Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В. Механика полета: Инженерный справочник. –М.: Машиностроение, 1969. – 420 с.
20. Динамика ракет: Учебник для студентов вузов /К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин и др.; Под общ. ред. В.П. Мишина. –Изд. второе. –М.: Машиностроение, 1990. –464 с.
21. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. –Изд. второе. –М.: Наука, 1968. –800 с.
22. Закон України “Про затвердження Загальнодержавної цільової науково-технічної космічної програми України на 2008-2012 роки” від 30 вересня 2008 р. №608-VI.
23. Зарубіжні системи дистанційного зондування Землі з космосу подвійного призначення. Історія створення, принципи дії, застосування і перспективи розвитку /О.О. Негода, В.Б. Толубко, С.П. Мосов, М.Ф. Пічугін. –К.: НАОУ, 2005. –271с.
24. Застосування космічних систем для забезпечення дій збройних сил: Навчальний посібник /М.С. Пастушенко, В.І. Присяжний, В.О. Яндовський та ін.; За ред.. В.І. Ткаченка. – Харків: ХВУ, 2003. –176 с.

25. Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления: Учебник /Под ред. С.Н. Конюхова. –Днепропетровск: АРТ–ПРЕСС, 2004. –544 с.
26. Инженерный справочник по космической технике /Под ред. А. В. Солодова. –М.: Воениздат, 1977. –432 с.
27. Климишин И.А. Астрономия наших дней. –Изд. третье. – М.: Наука, 1986. –560 с.
28. Ковалевский Г.Г., Сергеев М.С. Теория полета космических аппаратов. Часть 1. МО СССР, 1974. –400 с.
29. Космическая геодезия /В.Н. Баранов, Е.Г. Бойко, И.И. Краснорылов, М.М. Машимов, Ю.В. Плахов, М.С. Урмаев, С.Н. Яшин: Учебник. –М.: Недра, 1986. –408 с.
30. Космічне право України: Збірник національних і міжнародних правових актів. –Вид. четверте. –К: Атіка, 2004. –440 с.
31. Космонавтика: Маленькая энциклопедия. –М.: Сов. энциклопедия, 1968. –528 с.
32. Космонавтика: Энциклопедия. –М.: Сов. энциклопедия, 1985. –528 с.
33. Курышев В.И. Курс астрономических наблюдений космических объектов: Учебник. –М.: Воениздат МО СССР, 1965. – 284 с.
34. Лебедев А.А., Нестеренко О.П. Космические системы наблюдения. Синтез и моделирование. –М.: Машиностроение, 1991. –224 с.
35. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. –Изд. третье. –М.: Наука, 1980. –512 с.
36. Лисов И. Состояние навигационной системы ГЛОНАСС //Новости космонавтики. –2000. –Т. 10. –№ (210). –С. 37.
37. Машков О.А., Сівов М.С., Заклевський Д.Є. Організація розвідувальних космічних угруповань в антитерористичній операції в Афганістані (2001–2002 рр.). Прогностичний аналіз: Навчальний посібник. –К.: НАОУ, 2002. – 72 с.
38. Машков О.А., Фриз С.П. Методика оптимізації планування роботи орбітальних засобів космічних систем спостереження //Проблеми створення, випробування, застосування та

експлуатації складних інформаційних систем: Збірник наукових праць. –Житомир: ЖВІРЕ, 2003.–Вип. 6. –С. 80–91.

39. Механика космического полета: Учебник для ВТУЗов / М.С. Константинов и др.; Под ред. В.П. Мишина. –М.: Машиностроение, 1989. –408 с.

40. Мироненко В.М., Фриз П.В., Фриз С.П. Возможный підхід до формалізації процесів у космічних системах спостереження //Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем: Збірник наукових праць. – Житомир: ЖВІРЕ, 2004. –Вип. 10. –С. 54–62.

41. Можаяев Г.В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем. –М.: Машиностроение, 1989. –304 с.

42. Никулин В.Ф. Музей космонавтики имени С.П. Королева в г. Житомире. –Житомир: Волянь, 2010. –336 с.

43. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли /М.К. Тихонравов, И.М. Яцунский, Г.Ю. Максимов и др.; Под ред. М.К. Тихонравова. –М.: Машиностроение, 1967. –296с.

44. Основы теории полета космических аппаратов/ Под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова. –М.: Машиностроение, 1972. –608с.

45. Полет космических аппаратов. Примеры и задачи /Под ред. Г.С. Титова. –М.: Машиностроение, 1980. –252 с.

46. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов. –М.: Наука, 1965. –456 с.

47. Попович П.Р., Скребушевский Б.С. Баллистическое проектирование космических систем. –М.: Машиностроение, 1987. –240с.

48. Ракеты и космические аппараты конструкторского бюро “Южное” /Под общ. ред. С.Н. Конюхова. –Днепропетровск: ГКБ “Южное” им. М.К. Янгеля, 2000. –240 с.

49. Ракеты–носители /В.А. Александров, В.В. Владимиров, Р.Д. Дмитриев, С.О. Осипов; Под ред. С.О. Осипова. –М.: Воениздат, 1981. –315 с.

50. Рябов Ю.А. Движение небесных тел. –Изд. 4-е. –М.: Наука, 1988. –240 с.

51. Савчук А.В., Фриз П.В., Фриз С.П. Алгоритм розрахунку координат Сонця для забезпечення сеансів прийому інформації з космічних апаратів // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем: Збірник наукових праць. – Житомир: ЖВІРЕ, 2004. –Вип. 8. –С. 62–70.

52. Санін Ф.П., Джур Є.О., Кучма Л.Д., Хуторний В.В. Розвиток ракетно–космічної техніки в Україні. –Дніпропетровськ: АРТ–ПРЕС, 2002. –402 с.

53. Системы спутниковой связи /А.М. Бонч–Бруевич, В.Л. Быков, Л.Я. Кантор и др. /Под ред. Л.Я. Кантора. –М.: Радио и связь, 1992. –224 с.

54. Сівов М.С., Закревський Д.Є. Основи бойового застосування космічних засобів. –К.: НАОУ, 2003. –204 с.

55. Скребушевский Б.С. Формирование орбит космических аппаратов. –М.: Машиностроение, 1990. –256 с.

56. Струве О., Линдс Б., Пилланс Э. Элементарная астрономия. –Изд. второе /Пер. с англ. под ред. С.А. Каплана. –М.: Наука, 1967. –484 с.

57. Сучасні космічні системи оптичної зйомки Землі/ А.М. Явтушенко, С.В. Козелков, В.І. Богом'я, С.Д. Ставицький: Навчальний посібник. –К.: НАОУ, 2004. –93 с.

58. Тарасов Е.В. Космонавтика (Механика полета и баллистическое проектирование КЛА). –М.: Машиностроение, 1977. –216 с.

59. Титов Г.С., Иванов В.А., Горьков В.Л. Межорбитальные и локальные маневры космических аппаратов. –М.: Машиностроение, 1982. –248 с.

60. Фертрет М. Основы космонавтики /Пер. с англ. А.Н. Рубашова; Под ред. А.А. Космодемьянского. –М.: Просвещение, 1969. –304 с.

61. Физические величины: Справочник /Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мелихова. –М.: Энергоатомиздат, 1991. –1232 с.

62. Фриз П.В. Методика розрахунків функцій видимості космічних апаратів з наземних пунктів //Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформацій-

них систем: Збірник наукових праць. – Житомир: ЖВІРЕ, 2003. –Вип. 6. –С. 53–60.

63. Фриз П.В. Основы орбитального ruchu космических аппаратов: Навчальний посібник. –Житомир: ЖВІ НАУ, 2008. –268 с.

64. Фриз П.В., Фриз С.П. Теоретические основы полета космических аппаратов: Учебное пособие. –Житомир: ЖВИ НАУ, 2007. –272 с.

65. Фриз С.П. Алгоритм розрахунку умов освітленості заданого району земної поверхні //Вісник Житомирського державного технологічного університету. –2003.–Вип. 1(25) / Технічні науки. –С. 113–117.

66. Ханцеверов Ф.Р., Остроухов В.В. Моделирование космических систем изучения природных ресурсов Земли. –М.: Машиностроение, 1989. –264с.

67. Черный И. Украина–Бразилия: вместе в космос //Новости космонавтики. –2001. –Т. 12. –№9 (227). –С. 36.

68. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли.–М.: Наука, 1965. –540 с.

69. Эскобал П. Методы определения орбит /Пер. с англ.; Под ред. В.Г. Демина. –М.: Мир, 1970. –472 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Азимут

- запуску (старту, стрільби), 263
- КА, 109
- світила, 98

Азимутальна площа, 168, 171

Альмуканторат, 39

Аномалія

- ексцентрична, 133, 134
- істинна, 63, 133
- середня, 135
- сил тяжіння, 47

Апогей, 63, 119, 123

Аргумент

- перигею, 127
- широти, 137

Астероїд, 29

Астрономія, 27

Астрономічний (-а, -е, -і)

- весна, 41
 - довгота, 101
 - календар, 88
 - обсерваторія, 34
 - одиниця, 29
 - осінь, 41
 - сутінки, 178
 - широта, 101
 - щорічник, 40
- Астрономо-балістична ситуація, 159
- Астрофізика, 27
- Атмосфера, 51
- ізотермічна, 52
 - Землі, 51
 - міжнародна, стандартна, 52
 - однорідна, 52
 - прозора, 52

- розріджена, 52
- щільна (приземна), 53
- Афелій, 63

Б

- Балістичний (-а, -е, -і)
 - вимоги, 213
 - група, 20
 - ділянка, 277
 - забезпечення, 21
 - коефіцієнт, 145, 203
 - ракета, 13, 220
 - рух, 72
 - структура, 230
 - траєкторія, 203
 - центр, 22
 - час існування, 26, 201
- Бортовий (-а, -е, -і)
 - засоби, 31, 164, 181, 221
 - інформація, 15, 148, 179
 - комплекс
 - – забезпечувальний, 15
 - – спеціальний, 15
 - – управління, 15
 - комп'ютер, 86
 - система, 149
 - цільова апаратура, 15, 147
 - час, 86

В

- Вага
 - КА, 60, 68
 - кінцева, 252
 - конструктивних елементів, 252
 - корисного навантаження, 252
 - палива, 252, 253
 - питома, 252

- початкова, 252
- ракети, 60, 68, 69, 271
- стартова, 253, 257
- тіла, 60, 68, 69, 206, 271
- Ваговий (-а, -е, -і)
- витрати палива, 251, 269
- інтерпретація, 251
- характеристики, 251, 272
- Вектор
- імпульсів корекції, 306
- кінетичного моменту, 119, 261
- кеплерових елементів, 122
- Лапласа, 120, 261
- орбітальних параметрів, 122, 144, 146
- параметрів руху, 132
- положення, 104, 107, 131, 151
- прискорення, 189, 193
- рядок, 96
- сили (моменту сили), 70, 72, 115
- сили ваги, 269
- станційних параметрів, 149, 161
- стовпець, 96
- тяги, 268
- узагальнений, 105, 109, 161
- швидкості, 104, 105, 108, 115
- Векторний (-а, -е, -і)
- величина, 139
- добуток, 118
- рівняння, 117
- форма, 117
- Венера, 30
- Виведення КА на орбіту, 259
- вискоеліптичну, 277
- задану, 261
- низьку колову, 277
- проміжну, 241, 277
- робочу, 277
- стаціонарну, 277, 297
- штатну, 241

Видимість

- геометрична, 163, 164
- КА із Землі, 147, 163
- наземних об'єктів з КА, 163
- оптична, 163, 164, 167
- радіовидимість, 163
- фізична, 163

Висота

- атмосфери, 51, 198
- вакууму, 53
- однорідної, 52, 53, 200
- стандартної, 52
- щільної, 53
- КА (ШСЗ), 42, 59
- НП, 50, 52, 149
- орбіти КА
- високоеліптичної, 220
- колової, 211
- критичної, 203
- низької, 186
- сонячно-синхронної, 227
- стаціонарної, 129
- світила, 98, 178
- тіла 60, 61
- точки
- апогею, 124, 211
- виведення КА, 187
- звільнення КА, 142
- перигею, 124, 211
- над поверхнею Землі, 60, 61
- над рівнем моря, 111, 149
- над світилом, 206
- хмар, 51

Відстань

- від Землі до Місяця, 55
- від Землі до зірок, 37, 76
- від Землі до Сонця
- в афелії, 29
- в перигелії, 29

- середня, 29, 76
- від КА до небесного тіла, 71, 205
- від Сонця до центра нашої Галактики, 29
- до КА
- від наземних об'єктів (дальність), 170
- від наземних пунктів (дальність), 109, 170
- від поверхні Землі
- — — неферичної, 50
- — — сферичної, 50
- від центра Землі, 50, 59, 110, 115
- до небесного тіла
- зенітна, 98
- полярна, 100
- між взаємодіючими тілами, 59
- між точками
- екліптики, 41
- еліпса
- — між фокусами, 63, 124
- — між центром і вершинами, 124
- на поверхні Землі,
- — міжвиткова, 158
- — між меридіанами, 85
- — між НО, 171
- ракети, 276
- що дорівнює одному парсеку, 28
- що дорівнює світловому року, 29
- Вісь
- світу, 39
- обертання глобуса, 50
- обертання Землі, 50, 94
- симетрії, 284
- Всесвіт, 27
- Вузол орбіти
- висхідний, 126
- низхідний, 126

Г

Галактика, 28
Географічний (-а, -е, -і)
– довгота, 34
– меридіан, 32
– система координат, 33
– широта, 34
Геодезичний (-а, -е, -і)
– довгота, 107
– система координат, 107
– широта, 107
Геоцентричний (-а, -е, -і)
– довгота, 107
– система координат, 106
– широта, 106
Геоїд, 48
Глобус, 36
Гіроскоп, 264
Горизонт (обрій)
– істинний, 38
– математичний, 38
– місцевий, 107
Горизонтальний (-а, -е, -і)
– координати, 102
– паралакс, 175
– площа, 107
– система координат, 98
Гравітаційний (-а, -е, -і)
– взаємодія, 270
– збурення, 187
– параметр
– – Землі, 59
– – Місяця, 205
– – небесного тіла, 205
– – Сонця, 206
– поле, 27
– постійна, 58, 205
– потенціал, 191
– прискорення, 192
– сили, 192

Гомосфера, 52
Гетеросфера, 52

Д

Дальність

- виявлення, 214
- дії, 170, 214
- максимальна, 170, 213
- нахилена, 109
- радіозв'язку, 170
- спостереження, 170, 213

Дні

- рівнодення
- – весняного, 41, 80
- – осіннього, 41
- сонцестояння
- – зимового, 41
- – літнього, 41
- юліанські, 79

Доба, 73

- зоряна, 74
- сонячна, 75
- – істинна, 75
- – середньосонячна, 75

Добовий зсув траси, 158

Довгота

- висхідного вузла
- – інерціальна, 126
- – географічна, 126
- годинного пояса, 84
- меридіана
- – Гринвіцького, 34
- – нульового, 34
- – основного, 85
- – переміни дат, 36
- – початкового, 34
- – спостерігача
- – – в годинній мірі, 83

- — — в градусній мірі, 83
- наземного пункту
- географічна, 34
- геодезична, 107, 111
- геоцентрична, 106
- підсупутникової точки (КА), 155
- світила, 101
- точки старту, 278
- точки “стояння” (зависання) КА, 155

Е

- Екліптика, 40
- Ексцентриситет
 - гіперболи, 210
 - еліпса, 63, 124
 - еліпсоїда, 49
 - кола, 125
 - параболи, 210
 - орбіти, 131, 162
- Елементи орбіти КА, 123
- Еліпсоїд обертання
 - загальний, 48
 - референц-еліпсоїд, 49
- Енергетичні характеристики маневрів КА, 284
- Енергетично вигідні точки корекції орбіти, 313
- Екзосфера, 52
- Енергія
 - виведення, 277
 - відкидання маси, 267
 - кінетична, 61
 - повна, 61
 - подолання сил, 184
 - потенційна, 60
 - розпаду радіоактивних елементів, 48
 - системи “Земля – КА”, 184
 - сонячна, 31
 - хімічна, 267
 - ядерна, 268

Закон (-и)

- витрат маси РН, 243
- всесвітнього тяжіння, 58, 115
- збереження
 - – кількості руху, 66
 - – енергії, 61
- збурення орбіт, 188
- Кеплера
 - – перший, 62
 - – другий, 63
 - – третій, 64
- Ньютона
 - – перший, 68
 - – другий, 68
 - – третій, 69
- руху точки змінної маси, 246

Захід

- Сонця, 176
- світила, 175
- КА, 181

Західний (-а, -е, -і)

- довгота, 35
- меридіан, 83
- напрямом переміщення траси КА, 154
- півкуля
 - – Землі, 36
 - – небесної сфери, 39

Збурення елементів орбіт КА

- аеродинамічні, 199
- вікові, 188
- гравітаційні
 - – за рахунок Землі, 193
 - – за рахунок небесних тіл, 204
- періодичні
 - – довгоперіодичні, 188
 - – короткоперіодичні, 188

Зеніт

- напірямок, 38
 - назва РН, 68, 219, 242
- Зенітна відстань, 98
- Зірка, 29, 37, 65, 76
- Зона видимості, 180
- Зона захвату, 173
- Зона огляду, 168
- конусоїдальна, 169
 - пірамідальна, 171

I

Ізотрасовість, 154, 212, 217

Імпульс

- корекції орбіти, 304
- – біномальний, 312
- – нормальний, 312
- – тангенціальний, 310
- сили, 67
- швидкості
- – лінійної, 290
- – характеристичної, 285

Імпульсний (-а, -е, -і)

- апроксимація, 291
- маневр, 284
- функція, 164

Інтеграл

- енергії, 117
- Лапласа, 120
- площ, 118

Інтегральний (-а, -е, -і)

- показник маневрів, 285
- складова сили ваги, 257

Інформація

- бортова, 15
- – допоміжна, 17
- – телеметрична, 15
- – траєкторна, 15

- службова, 15
- цільова, 12
- земна
- командна, 17
- навчальна, 9
- Іоносфера, 52

К

Кількість

- витків орбіти
- за добу, 145, 158, 228
- за тропічний рік, 226
- за епоху, 145
- діб
- від початку року, 145
- в юліанській даті, 79
- елементів
- атмосфери, 52
- орбіти, 122
- у матриці, 96
- зірок у метagalактиці, 28
- імпульсів
- корекції орбіти, 286
- міжорбітальних переходів, 284
- КА в групуванні, 230
- озону в атмосфері, 51
- об'єктів спостереження, 213
- речовини, 54
- руху
- тіла, 65
- системи тіл, 66, 246
- ступенів РН, 255
- членів розкладання, 192
- Комети, 29
- Корекція орбіти, 304
- гальмівна, 304
- прискорювальна, 304
- Космічний апарат, 15

Космічний простір, 27
 Космогонія, 27
 Космологія, 27
 Космос, 27
 Кульмінація світил, 39
 Кут
 — азимут
 — об'єкта, КА, 108, 109
 — світила, 102
 — запуску РН, 263, 278,
 — атаки, 265
 — годинний, 83, 175
 — заходу світила, 176
 — сходу світила, 176
 — кидання, 266
 — ковзання, 265
 — крену, 265
 — місцевого горизонту, 64, 266
 — місця
 — антени, 179
 — об'єкта, КА, 108, 109, 179
 — світила, 102
 — Сонця, 174, 224
 — ризикання, 274
 — тангажа, 274
 — тіні, 182
 — некомпланарності, 297
 Кутовий (-а, -е, -і)
 — висота, 40
 — відстань, 34, 98
 — координати, 98
 — маневр КА, 154
 — міра часу, 99
 — параметри орбітального руху КА, 118, 128, 137
 — положення
 — КА, 63, 133
 — планети, 63
 — ракети, 265
 — розмір

- Землі із КА, 169
- зони огляду, 168
- Місяця, 55
- Сонця, 31
- розрізнення, 171
- швидкість
- обертання Землі
- — навколо власної осі, 35, 45, 83, 152
- — навколо Сонця, 45, 337
- КА (ШСЗ), 128
- планети, 64

Л

Лінійні параметри руху КА, 139...144

Лінія

- апсид, 63, 122
- вузлів, 122
- переміни дат, 36
- полуденна, 39
- прямовисна, 34, 38, 107, 270
- рівнодення, 73
- фокальна, 124
- центральна, 1254

М

Маневри КА, 283

- багаторазові, 284
- імпульсні, 284
- — одноімпульсні, 295
- — двоімпульсні, 295
- — триімпульсні, 295
- компланарні, 284
- кутові, 154
- некомпланарні, 284
- одноразові, 284
- однорідні, 284
- неоднорідні, 284

Марс, 30
Маса
– атмосфери, 51
– Землі, 45
– КА, 71
– Місяця, 55
– молекулярна, 54
– небесного тіла, 71, 205
– планет, 65
– ракети
– – кінцева, 242
– – конструкції, 242
– – корисна, 242
– – палива, 242
– – поточна, 242
– – початкова, 242
– – стартова, 242
– Сонця, 29
– Сонячної системи, 29
– точки, 244
Матриці, 95
Меридіан, 32
– географічний, 32
– Гринвіцький, 34
– наземного пункту, 32
– небесний, 39
– нульовий, 34
– основний, 85
– початковий, 34
– спостерігача, 83
Меркурій, 30
Метагалактика, 28
Метеорні тіла, 29
Міжорбітальний перехід
– Хомана, 291
– Штернфельда, 294
Місяць
– небесне тіло, 55
– інтервал часу, 80

- драконічний, 80
- зоряний, 80
- календарний, 80
- сидеричний, 80
- синодичний, 80

Модель

- атмосфери, 51...54
- Землі
- форми, 48...50
- гравітаційного поля, 191...193

Момент сили

- аеродинамічний, 275
- демпфірувальний, 276
- збурювальний, 267
- кінетичний, 119
- керуючий, 274
- перекидаючий, 276
- стабілізуючий, 276

Момент часу

- відділення КА від РН, 257, 259
- епоха, 94
- закінчення роботи двигунів, 257, 259
- заходу
- КА, 181
- світил, 176
- Сонця, 176
- зоряного, 88
- корекції орбіти, 304
- кульмінацій
- світил, 177
- Сонця, 74, 75
- ТВРД, 39
- настання сутінок, 178
- перетинання екватора, 126, 278
- КА, 126
- Сонцем, 41
- початку побудови траси КА, 155
- проходження
- КА висхідного вузла орбіти, 130, 145, 146, 156

- КА зеніту, 152
- світилом небесного меридіана, 39
- КА перигею, 128, 150, 162
- рівнодень, 41, 73
- сонячного, 89
- спостережень, 102, 149, 150, 172
- старту, 249
- сходу
- КА, 181
- світил, 176
- Сонця, 176
- Мезосфера, 51

Н

- Надир, 38
- Небо, 37
- Небесний (-а, -е, -і)
 - меридіан, 39
 - механіка, 28
 - сфера, 36
 - тіла (світила), 29
 - екватор, 39
- Нептун, 30

О

- Орбіта
 - Землі, 45
 - КА (ШСЗ), 43
 - Місяця, 55
 - планет, 31
 - Сонця, 40
 - Сонячної системи, 29
- Орбіти КА
 - високі, 211
 - високоеліптичні, 221
 - внутрішні, 298
 - гіперболічні, 118

- добові, 212
- екваторіальні, 201
- еліптичні, 210
- замкнуті, 119
- збурені, 110
- зворотні, 209
- зовнішні, 266
- кеплерові, 92
- кінцеві, 284
- компланарні, 277
- кратні, 212
- квазістаціонарні, 219
- критичні, 203
- колові, 210
- низькі 211
- незбурені, 63
- навколоземні, 28
- некомпланарні, 277
- опорні, 278
- оптимальні, 277
- оскулюючі, 191
- очікувані, 260
- параболічні, 119
- перехідні, 289
- півдобові, 212
- полярні, 211
- початкові, 188
- проміжні, 241
- прямі, 211
- робочі, 88
- середні, 211
- синхронні, 212
- сонячно-синхронні, 212
- стаціонарні, 217
- хитні, 219
- штатні, 238
- Орбітальний (-а, -е, -і)
- групування, 229
- засоби, 42

- комплекс, 16
- маневри, 283
- параметри, 123
- політ, 71
- положення, 98
- рух, 42
 - – балістичний, 72
 - – збурений, 72, 121
 - – незбурений, 72, 121
 - – некерований, 72
 - – керований, 72
 - – реактивний, 241
- системи координат, 121
- час, 86
- швидкість, 30

П

Параметр (и)

- атмосфери, 51
 - гравітаційний
 - – Землі, 60
 - – Місяця, 206
 - – небесних тіл, 205
 - Землі, 45
 - критичної орбіти, 203
 - масогабаритні, 198
 - орбітального руху
 - – кутові, 133
 - – лінійні, 139
 - орбіти, 111
 - поля зору, 166
 - розкладання в ряд, 191
 - смуги огляду, 171
 - станційні, 108
 - траси, 152
 - фокальний, 65
 - часові, 93
- Паралакс, 28

Парсек, 28
Перигей, 30
Перигелій, 30
Період обертання
– Землі
– – навколо своєї осі, 44
– – навколо Сонця, 76
– Місяця, 55
– планет, 65
– Сонячної системи, 30
– КА
– – драконічний, 196
– – сидеричний, 128
– – синодичний, 129
Піввісь
– еліпса
– – велика, 63
– – мала, 63
– земного еліпсоїда
– – велика, 49
– – мала, 49
– орбіти КА
– – велика, 123
– – мала, 123
– орбіти планети
– – велика, 64
– – мала, 64
Півкуля Землі
– західна, 39
– південна, 33
– північна, 33
– східна, 39
Північ
– істинна, 74
– середня, 75
Плазма, 28
Планети, 31
Площина
– годинного кола, 83

- горизонту, 38
- екватора
- – Землі, 34
- – небесного, 39
- екліптики, 39
- крену, 280
- Лапласа, 120
- меридіана
- – географічного, 83
- – небесного, 39
- горизонту
- – істинного, 38
- – математичного, 38
- – місцевого, 107
- орбіти, 120
- ризикання, 281
- симетрії
- – КА, 94
- – РН, 94, 265, 281
- – рулів РН, 281
- – струменя газів РН, 281
- стабілізації РН, 265, 281
- стрільби, 263
- тангажа, 281
- Плутон, 30
- Побудова траси КА, 151
- Поле
- гравітаційне, 192
- зору, 168
- тяжіння, 114, 192, 248
- Полудень, 75
- Полюс
- Землі, 39
- – Північний, 39
- – Південний, 39
- світу, 39
- Початковий (-а, -е, -і)
- вага РН, 252
- дані

- для розрахунку
- ефемерид КА, 149
- трас КА, 155
- значення
- періоду обертання КА, 196, 203
- ексцентриситету орбіти, 200
- інерціальної довготи ВВ, 195
- аргументу перигею, 195
- параметри орбіт, 188, 202
- маса
- КА, 286
- ракети, 242, 249
- робочого тіла на КА, 285
- меридіан, 34
- орбіта КА, 284, 289, 292
- положення
- КА на орбіті, 130
- РН у просторі, 265
- стартова СК, 264
- умови, 109
- виведення КА на орбіту 259
- інтегрування рівнянь, 117, 249
- спостереження НО, 147
- радіозв'язку з КА, 147
- формування орбіти, 259, 262
- характеристики РН, 195
- вага РН, 252, 257
- маса РН, 242, 254
- тяга РН, 257
- час
- зоряний
- місцевий, 90
- у Грінвічі, 87
- сонячний, 155
- швидкість РН, 249, 297, 303
- Пояс зодіаку, 41
- Прецесія
- земної осі, 41
- лінії апсид, 195, 228

- лінії вузлів (інерціальної довготи ВВ), 194, 225, 233
- Прискорення
 - гравітаційні
 - Землі, 45, 53, 59, 251
 - Місяця, 55, 204
 - Сонця, 204
 - КА, 117, 198
 - збурювальні, 198, 205, 206
 - поступального руху, 68, 288
 - РН, 258, 288
- Прогнозування орбітального руху КА, 148

Р

- Радіус
 - Галактики, 28
 - Землі, 45
 - екваторіальний, 48
 - полярний, 48
 - середній, 45
 - Місяця, 55
 - орбіти
 - Землі, 28, 45
 - КА, 139
 - Місяця, 55
 - планет, 30
 - планет, 30
 - Сонця, 29
- Радіус-вектор
 - КА (ШСЗ), 70, 139
 - наземного пункту, 106
 - об'єкта, 104
 - планети (небесного тіла), 63, 71
- Ракета, 242
- Ракетний (-а, -е, -і)
 - блок, 243
 - двигун, 267
 - паливо, 242
 - ступінь, 243

Ракета-носій, 252

Рівняння

– еліпса, 123

– зміни маси, 288

– Кеплера, 136

– Мещерського, 246, 247

– орбіти

– збуреної, 193

– незбуреної, 62, 210, 262

– руху

– КА

– збуреного, 72, 188, 189, 193

– незбуреного, 70, 115, 117, 119, 121, 139

– ракети, 257, 269

Рік

– аномалістичний, 78

– високосний, 79

– драконічний, 78

– зоряний, 78

– календарний, 79

– григоріанський, 79

– юліанський, 79

– місячний, 78

– світловий, 29

– тропічний, 78

Рух КА

– балістичний, 18, 72

– кутовий, 9, 17

– некерований, 18, 72

– обертальний, 8, 17

– орбітальний, 17, 72

– збурений, 18, 72

– незбурений, 18, 72

– керований, 18, 72

– пасивний, 72

– поступальний, 8, 17, 61

– реактивний, 241

– середній, 128

Рух небесних тіл, 29

- Землі
- – добовий, 73
- – річний, 78
- Місяця, 30, 72
- планет, 30, 62
- Сонця, 30, 72
- Рух РН
- вертикальний, 257, 258, 277
- горизонтальний, 265, 272
- керований, 274
- – реактивний, 241, 242, 268
- – аеродинамічний, 266
- кутовий, 274
- обертальний, 274
- поступальний, 274
- криволінійний, 256, 274
- прямолінійний, 248, 285

С

- Сатурн, 30
- Сила (-и)
- аеродинамічні, 197, 272
- – бічна, 197, 273
- – лобового опору, 197, 272
- – піднімальна, 197, 272
- – нормальна, 273
- – повздовжня, 273
- – повна, 197, 272
- – поперечна, 273
- ваги (тяжіння, притягання Землі), 270
- взаємодії, 58, 69
- відцентрова, 270
- внутрішні, 266
- газореактивна, 280
- збурювальні, 187
- – електромагнітні, 187
- – поверхневі, 187
- – – опір атмосфери, 187

- — — сонячний тиск, 187, 207
- — гравітаційні, 187
- — — аномалії Землі, 187
- — — несферичність Землі, 187
- — — притягання небесних тіл, 70, 205
- — — притягання Місяця, 70, 187, 204
- — — притягання Сонця, 70, 187, 204
- — — притягання планет, 187
- керуючі, 274
- нецентральна, 193
- реактивна, 241
- рівнодіюча, 197
- тяги, 267
- реакції опори, 69
- результуюча, 70
- рушійна, 267
- центральна, 72
- Система (-и) координат, 93
 - абсолютна, 93, 103
 - барицентричні, 93
 - — зв'язана прямокутна, 264
 - — орбітальна рухома, 305
 - — швидкісна, 265, 305
 - відносні, 93
 - геліоцентричні, 93
 - геоцентричні, 92, 106
 - — географічна, 32, 107
 - — геодезична, 32, 107
 - гринвіцька, 93, 105
 - екліптичні, 93
 - зв'язані, 93
 - інерціальна, 93, 103
 - комбінована (оскулююча), 93, 122
 - небесні, 97
 - — горизонтальна, 98
 - — екваторіальні
 - — — друга, 100
 - — — перша, 98
 - — екліптична, 100

- орбітальні
- – нерухома, 121, 134
- – рухома, 305
- планетоцентричні, 92
- пунктові, 93, 107, 108
- стартові, 93
- – земна прямокутна, 263
- – стартова заморожена, 264
- – стартова початкова, 264
- – стартова прямокутна, 262
- селеноцентричні, 92
- спеціальні, 121
- топоцентричні
- – прямокутні, 107
- – сферичні, 108
- швидкісні, 265, 305
- Смуга
- захвату, 173
- огляду, 171
- Сонце, 29
- істинне, 73
- середнє екваторіальне, 74
- Сонячна система, 29
- Спостереження
- видове, 12
- – інфрачервоне, 13
- – мікрохвильове, 13
- – оптико-електронне, 13, 163, 184
- – радіолокаційне, 13
- – фотографічне, 13
- КА, 149, 183
- наземних об'єктів, 163, 165, 172
- наземних пунктів, 129
- поверхні Землі, 169
- Стартовий (-а, -е, -і)
- вага РН, 252, 257
- комплекс, 45
- маса РН, 242, 254
- система координат

- заморожена, 264
- початкова, 264
- прямокутна, 263
- тяга РН, 257
- Стратосфера, 51
- Сфера
 - довільна, 36, 97
 - небесна, 36
 - земної кулі
 - мантії, 46
 - ядра, 46
 - земної кори, 46
- Сферичний (-а, -е, -і)
 - астрономія, 31
 - координати, 181
 - модель Землі, 114, 270
 - системи координат, 92, 94, 98
 - тригонометрія, 102
 - трикутник, 101
- Схід
 - Сонця, 176
 - світила, 175
 - КА, 181
- Східний (-а, -е, -і)
 - довгота, 35
 - меридіан, 83
 - напрямок переміщення траси КА, 154
 - півкуля
 - Землі, 36
 - небесної сфери, 39

Т

- Точки
 - горизонту, 39
 - небесної сфери
 - зеніт, 38
 - надир, 38
 - полюси світу, 39

- орбіти, 63, 116, 119, 123
- підсупутникові, 152
- прикладання імпульсів маневру КА , 290...303
- прикладання імпульсів корекції орбіти , 310...313
- рівнодення
 - – весняного, 41
 - – осіннього, 41
- сонцестояння
 - – зимового, 41
 - – літнього, 41
- Траєкторія КА, РН, 19
- Траєкторні виміри, 161
- Траєкторна інформація, 15
- Траса КА, 151
- Тропосфера, 51
- Термосфера, 51

У

Умови

- вибору значень
 - – аргумента перигею, 216
 - – висоти орбіти, 203, 214
 - – нахилення орбіти, 215
- видимості КА із НП, 179
- видимості НО з КА, 163
 - – оптичної видимості, 163, 167
 - – радіовидимості, 163
 - – геометричної видимості, 165
 - – фізичної видимості, 163
- збуреного руху КА, 72, 187
- ізотрасовості, 196
- космічних польотів, 27, 72
 - – астрономічні, 28
 - – фізичні фактори, 44
- незбуреного руху КА, 114
- освітленості КА Сонцем, 181
- освітленості НО Сонцем , 174
- формування специфічних орбіт

- високоеліптичних, 220
- сонячно-синхронних, 225
- стаціонарних, 217, 219
- Уран, 30

Ф

Фактори космічного простору, 43

Фокус

- кривої другого порядку, 62
- еліпса, 63, 123

Фокальний (-а, -е, -і)

- лінія, 124
- параметр, 125

Форма

- атмосфери, 51
- запису математичних виразів
- векторна, 117, 188, 244
- диференціальна, 66, 188, 189, 244
- компактна, 115
- матрична, 95, 104
- скалярна, 117, 120, 189
- Землі, 32, 47, 48...50, 226
- зони
- огляду БЦА, КА, 168, 171
- видимості КА із Землі, 180
- КА, 198
- орбіти
- Землі, 45
- КА, 123...125, 209, 210
- Місяця, 55
- планет, 31
- Сонця, 29, 56
- Сонячної системи, 29
- РН, 273
- СК, 92
- Сонця, 29
- траси КА, 152, 154, 219

Х

Хмарність, хмари, 51
Хоманівський перехід, 291

Ц

Центр

- Галактики, 29
- еліпса, 123, 134, 135
- Землі, 32, 33, 47, 77, 92, 103, 119, 124, 152, 270
- мас
- – КА, 66, 92, 94, 139, 304, 305
- – РН, 265, 274, 275
- тиску
- – КА, 94
- – РН, 274...276, 281
- Місяця, 92
- небесної сфери, 37, 39, 40
- орбіти, 63
- Сонця, 28, 40, 73, 77, 92, 178
- сфери, 97
- часового пояса, 85

Цикл

- індікт іона, 79
- метона, 79
- сонячний, 79
- юліанський, 79

Ціолковського

- задача
- – друга, 256
- – перша, 248
- формула, 249
- число, 250

Ч

Час, 72

- атомний, 81, 82
- бортовий, 81

- видимості КА, НО, НП, 181, 222
- всесвітній (світовий), 81, 83
- гринвіцький, 81
- епохальний, 145...147
- ефемеридний, 81, 82
- земний, 81
- зоряний, 74, 78, 150, 155, 156, 159
- існування
 - КА, 201, 202, 214
 - ОГ, 232
- київський, 85, 156
- літній, 85
- маневру КА, 284
- машинний, 86
- місцевий, 83, 224
- обслуговування, 215
- орбітальний, 86
- освітленості КА, 182, 183
- освітленості об'єктів, 167
- польотний (КА, РН), 86, 132, 155, 257
- початку витка, 86, 159
- поясний, 85
- проходження,
 - апогею, 215, 292
 - висхідного вузла, 155, 158, 228
 - екватора, 41, 126, 130, 158, 159
 - зеніту, 152
 - перигею, 128, 231, 260, 292
 - пунктів на Землі, 151
 - точки орбіти, 231
- робочий, 86
- роботи реактивних двигунів, 284, 291
- сеансний, 87
- системний, 86
- сонячний, 74
 - істинний, 74
 - середній, 75
- спостережень, 149, 172, 210
- старту (запуску), 278, 279

- тривалості робочої ділянки орбіти, 230
- Часова структура ОГ, 231

III

Швидкісний (-а, -е, -і)

- СК, 265, 305

- напір, 197

Швидкість витікання газів із реактивного сопла, 251

Швидкість Землі

- орбітальна, 45

- обертання, 45

Швидкість КА, РН

- бінормальна, 306

- гіперболічна, 142

- еліптична, 139

- в апогеї, 140

- в перигеї, 140

- у фокальних точках еліптичної орбіти, 141

- у центральних точках еліптичної орбіти 140

- звільнення, 142

- космічна

- перша, 140

- друга, 142

- третя, 142

- кінцева, 249

- колова, 140

- кутова, 118

- лінійна, 139, 259, 261

- нормальна, 306

- ортогональна, 306

- параболічна, 142

- початкова, 249

- радіальна, 115, 132, 142, 201, 261, 306

- секторна (секторіальна), 119

- тангенціальна, 306

- трансверсальна, 143, 261

- характеристична, 249

Швидкість взаємного переміщення КА і Землі, 126

Швидкість світла, 29

Швидкість сонячної системи, 29

Широта

- наземного пункту

- географічна, 34, 107

- геодезична, 106, 107

- геоцентрична, 50, 106

- підсупутникової точки (КА)

- географічна, 110, 152

- геодезична, 152

- геоцентрична, 155, 156

- точки апогею, 215

- точки старту РН, 219, 263, 264

- земної поверхні

- екватора, 34

- південна, 34

- північна, 34

- полюсів, 34

- світила (астрономічна), 101

- точки (місця) спостереження, 102, 175, 178, 192, 216, 278

Щ

Щільність

- атмосфери Землі

- вакууму, 53

- ізотермічної, 52, 198

- на рівні моря, 53

- на заданій висоті, 52, 197, 198, 200, 273

- середня, 200

- стандартної, 53

- Землі

- середня, 45, 114

- мантії, 47

- однорідної, 72, 188

- неоднорідної, 72, 114, 188

- ядра, 47

Ю

Юпітер, 30

Юліанський (-а, -е, -і)

– дні, 79

– календар, 79

– рік, 79

– цикл, 79

Я

Явище (а)

– затемнення Місяця, Сонця, 55

– заходу та сходу

– – КА, 179

– – світил, 174

– настання сутінок, 178

– невагомості, 258

– тиску сонячного світла, 186

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Абгарян К.А., 21
Агаджанов П.А., 21
Аким Е.Л., 21
Алексеев К.Б., 21
Алексеев Ю.С., 21, 22
Аппазов Р.Ф., 21
Бажинов І.К., 21
Бебенін Г.Г., 21
Білецький В.В., 21
Брикер В.В., 22
Гагарін Ю.О., 22
Галілей Г., 67
Герасюта М.Ф., 22
Гіппарх, 33
Годдард Р., 20
Горбулін В.П., 21
Грип Л.Т., 22
Гюйгенс Х., 47
Дегтярьов О.В., 22
Дубошин Г.М., 21
Ельясберг П.Є., 21
Енеев Т.М., 21
Есно-Пельтрі Р., 20
Жданюк Б.Ф., 21
Зенгер Е., 20
Ігдалов І.М., 22
Келдиш М.В., 20
Кеплер І., 24, 62, 118, 120, 128, 133, 136, 137, 150, 162
Кислик М.Д., 21
Кондратюк Ю.В., 19
Конюхов С.М., 22
Корольов С.П., 8, 21, 24
Красовський А.А., 22
Красовський Ф.М., 49, 271
Лебедев О.О., 21
Лебедев П.Н., 22
Левантовський В.І., 21

Лістинг І., 48
Макаров А.М., 21
Мамон П.А., 21
Метон Афінський, 79
Мещерський І.В., 19, 24, 244...285
Мішин В.П., 21
Морозов В.М., 22
Нариманов Г.С., 21
Негода О.О., 21
Ньютон І., 24, 58, 48, 62, 66...70, 198, 206, 244, 247, 248, 268, 288
Оберт Г., 20
Охоцимський Д.Є., 21
Панкратов Ю.П., 22
Платонов А.К., 21
Почукаєв В.Н., 21
Рапопорт І.М., 21
Ринін Н.А., 20
Ситін О.Г., 21
Скребушевський Б.С., 21
Тихонравов М.К., 20, 21
Хоман В., 20, 291
Цандер Ф.А., 20
Ціолковський К.Е., 19, 24, 244, 248...256
Шептун А.Д., 22
Штернфельд А.А., 20, 294, 295
Щеголь В.А., 21
Янгель М.К., 22
Ярошевський В.А., 21
Яцунський І.М., 21

ДОДАТКИ

Додаток 1

ВІДОМОСТІ ІЗ АСТРОНОМІЇ І ТЕОРІЇ ПОЛЬОТУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

Деякі константи:

астрономічна одиниця $1a.o. = 149\,597\,000 \text{ км} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$;

швидкість світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$;

гравітаційна постійна $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2\text{кг}^{-2}$;

універсальна газова постійна $R_0 = 8,31441 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$.

Короткі відомості про Сонце:

маса Сонця $M_c \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$;

гравітаційний параметр Сонця $\mu_c \approx 13,344 \cdot 10^{10} \text{ км}^3/\text{с}^2$;

середній радіус Сонця $R_c \approx 109 \cdot R_z \approx 7 \cdot 10^5 \text{ км}$;

середній кутовий розмір Сонця $\psi_c \approx 32'$;

прискорення вільного падіння на Сонці $g_c \approx 274 \text{ м/с}^2$;

середня температура Сонця $\bar{T}_c \approx 6000 \text{ К}$.

Короткі відомості про Землю:

середня відстань від Землі до Сонця $r_c \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$;

середня відстань від Землі до Місяця $r_m \approx 400 \cdot 10^3 \text{ км}$;

маса Землі $M_z \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$;

гравітаційний параметр Землі $\mu_0 = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$;

кутова швидкість обертання Землі $\omega_z \approx 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$;

кут між площинами екліптики і екватора Землі $\varepsilon \approx 23,5^\circ$;

лінійна швидкість руху Землі по орбіті $V_o \approx 30 \text{ км/с}$.

перша космічна швидкість $V_I \approx 7,91 \text{ км/с}$;

друга космічна швидкість $V_{II} = V_I \cdot \sqrt{2} \approx 11,2 \text{ км/с}$;
 середній радіус Землі $R_z = 6371 \text{ км}$;
 екваторіальний радіус Землі $R_e = 6378,140 \text{ км}$;
 константа для еліпсоїда Землі $\varepsilon_z \approx 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5 / \text{с}^2$;
 коефіцієнт полярного стиску Землі $\alpha_z = 1/298,3$;
 константа, що характеризує збурювання орбіт за рахунок несферичності Землі $A = 4,15196 \cdot 10^5 \text{ км}^2$;
 прискорення вільного падіння на Землі $g_0 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$;
 лінійна швидкість руху точок на екваторі Землі $V_e \approx 465 \text{ м/с}$;
 середня температура поверхні Землі $\bar{t}_z^\circ = 15^\circ \text{C}$ або $\bar{T}_z \approx 290 \text{ K}$;
 повна сонячна енергія, яка падає на систему “Земля-атмосфера”
 $\mathcal{Q}_c \approx 1,7 \cdot 10^{14} \text{ кВт}$;
 питома освітленість Землі Сонцем (сонячна постійна)
 $E_c \approx 1400 \text{ Вт/м}^2$.

Короткі відомості про атмосферу Землі:

загальна висота атмосфери над Землею $h_a \approx 20000 \text{ км}$;
 молекулярна маса повітря на рівні моря $M_0 = 28,96442 \text{ кг/кмоль}$;
 маса атмосфери $M_a \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ кг}$;
 щільність атмосфери на рівні моря (стандартна атмосфера)
 $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$;
 границя (висота) щільної атмосфери $h_{ш} = 30 \text{ км}$;
 щільність атмосфери на границі (на висоті $h_{ш}$) $\rho_{ш} = 0,015 \cdot \rho_0$;
 висота вакууму $h_v \geq 80 \text{ км}$;
 щільність атмосфери на висоті вакууму $\rho_v = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \rho_0$.

Короткі відомості про Місяць:

радіус орбіти Місяця $r_m \approx 384000 \text{ км}$;
 маса Місяця $M_m \approx 7 \cdot 10^{22} \text{ кг}$;

гравітаційний параметр Місяця $\mu_{\text{м}} \approx 4,67 \cdot 10^3 \text{ км}^3 / \text{с}^2$;
 середній радіус Місяця $R_{\text{м}} \approx 0,2725 \cdot R_{\text{з}} \approx 1738 \text{ км}$;
 середній кутовий розмір Місяця $\psi_{\text{м}} \approx 32'$;
 період обертання Місяця навколо Землі $T_{\text{м}}^{\text{з}} \approx 29,5 \text{ діб}$;
 період обертання Місяця навколо власної осі $T_{\text{м}}^{\text{о}} \approx 27 \text{ діб}$;
 максимальна температура поверхні Місяця $T_{\text{мmax}}^{\text{о}} = 374 \text{ К}$;
 мінімальна температура поверхні Місяця $T_{\text{мmin}}^{\text{о}} = 120 \text{ К}$.

Час:

тривалість зоряної доби $T_{\text{зд}} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}} = 86164^{\text{s}}$;
 тривалість середньосонячної доби $T_{\text{сд}} = 24^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}} = 86400^{\text{s}}$;
 тривалість тропічного року $\Gamma_{\text{тр}} = 365,2422 \text{ сд} = 366,2422 \text{ зд}$;
 тривалість зоряного року $\Gamma_{\text{с}} = 365,25636 \text{ сд} = 366,25636 \text{ зд}$;
 коефіцієнт для перерахування інтервалів середньосонячного часу у зоряний $q \approx 1,002738$;
 коефіцієнт для перерахування інтервалів зоряного часу в середньосонячний $q' \approx 0,997269$.

Деякі параметри специфічних орбіт:

модуль радіуса-вектора СтО $r_{\text{о}} \approx 42164 \text{ км}$;
 висота СтО $H_{\text{о}} \approx 35800 \text{ км}$;
 висота критичної орбіти $H_{\text{кр}} = 100...120 \text{ км}$;
 період обертання КА на критичній орбіті $T_{\text{кр}} = 86,5...86,6^{\text{м}}$;
 висота апогею ВЕО $H_{\text{А}} \approx 40000 \text{ км}$;
 висота перигею ВЕО $H_{\text{П}} \approx 700 \text{ км}$;
 висота кругової ССО для ДЗЗ $H_{\text{о}} \approx 600...800 \text{ км}$;
 нахилення ССО для ДЗЗ $i \approx 98^{\circ}$.

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ІЗ СФЕРИЧНОЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Фігура на поверхні сфери, що утворена трьома дугами великих кіл, які з'єднують попарно три які-небудь точки на сфері, називається *сферичним трикутником*.

Велике коло – це коло, яке утворене перетинанням сфери із площиною, що проходить через її центр O (рис. 1, а).

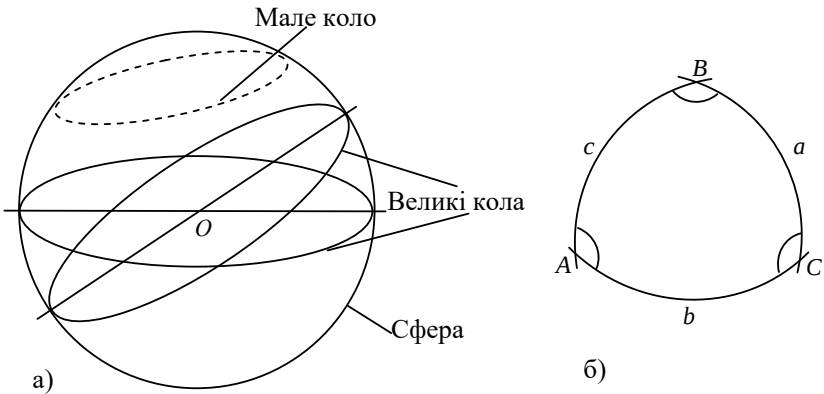


Рис. 1. До поняття сферичного трикутника:

а – види кіл на сфері; б – сферичний трикутник

Вершини і кути сферичного трикутника позначаються (рис. 1, б) великими буквами латинського алфавіту A, B, C , а протилежні їм сторони (дуги) – відповідними малими буквами цього ж алфавіту a, b, c .

Основні властивості сферичного трикутника

1. Кожна сторона сферичного трикутника менша суми двох інших сторін:

$$a < b + c; b < a + c; c < a + b.$$

2. Кожна сторона сферичного трикутника більша різниці двох інших сторін:

$$a > b - c; a > c - b;$$

$$b > a - c; b > c - b;$$

$$c > a - b; c > b - c.$$

3. Напівпериметр сферичного трикутника завжди більший, ніж кожна із його сторін:

$$\frac{a+b+c}{2} > a; \frac{a+b+c}{2} > b; \frac{a+b+c}{2} > c.$$

4. Сума сторін сферичного трикутника завжди менша 360° :

$$a+b+c < 360^\circ.$$

5. Сума кутів сферичного трикутника завжди менша 540° , але більша 180° :

$$180^\circ < a+b+c < 540^\circ.$$

Основні співвідношення сферичної тригонометрії

Різниця між сумою трьох кутів сферичного трикутника і числом 180° називається *сферичним надлишком* E , тобто:

$$E = A + B + C - 180^\circ.$$

Площа сферичного трикутника Q обчислюється через сферичний надлишок як:

$$Q = E\pi R^2 / 180^\circ,$$

де R – радіус сфери, на поверхні якої утворений сферичний трикутник.

Косинус однієї сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших сторін плюс добуток синусів тих же сторін на косинус кута між ними:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A; \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B; \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin b \sin a \cos C. \end{aligned} \tag{1}$$

Синуси сторін сферичного трикутника пропорційні синусам протилежних їм кутів:

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin C}; \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

або інакше, відношення синуса сторони сферичного трикутника до синуса протилежного кута є величина постійна:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \text{const} . \quad (2)$$

Синус сторони сферичного трикутника, помножений на косинус прилеглого кута, дорівнює добутку синуса іншої сторони, що обмежує прилеглий кут, на косинус третьої сторони мінус косинус сторони, що обмежує кут, помножений на добуток синуса третьої сторони і косинуса кута, протилежного першій стороні:

$$\begin{aligned} \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A; \\ \sin b \cos A &= \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B; \\ \sin c \cos B &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C; \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A; \\ \sin b \cos C &= \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B; \\ \sin c \cos A &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C . \end{aligned} \quad (3)$$

Формули (1)...(3) називають основними формулами сферичної тригонометрії.

Полярним трикутником для даного сферичного трикутника ABC називається такий сферичний трикутник $A'B'C'$, по відношенню сторін якого вершини даного є полюсами, тобто відстоять від цих сторін на 90° (рис. 2).

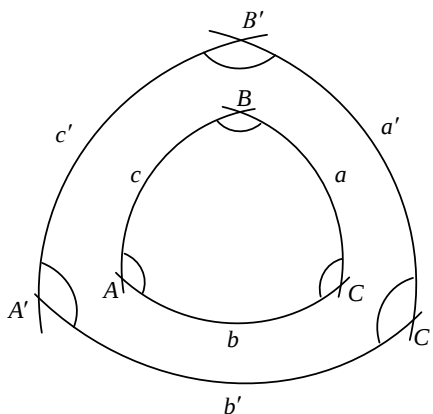


Рис. 2. До поняття полярного трикутника

Сума кута даного сферичного трикутника і відповідної сторони полярного трикутника дорівнює 180° , тобто:

$$A + a' = 180^\circ ; B + b' = 180^\circ ; C + c' = 180^\circ \quad (4)$$

і навпаки, сума кута полярного трикутника і відповідної сторони даного сферичного трикутника дорівнює 180° , тобто:

$$A' + a = 180^\circ; B' + b = 180^\circ; C' + c = 180^\circ. \quad (5)$$

Користуючись цими властивостями полярного трикутника, із основних формул (1)...(3) можна одержати інші залежності між сторонами і кутами сферичного трикутника.

Наприклад, із формул (1), (4) і (5) можна отримати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \cos A' &= \cos B' \cos C' + \sin B' \sin C' \cos a' \\ \cos B' &= \cos C' \cos A' + \sin C' \sin A' \cos b'; \\ \cos C' &= \cos A' \cos B' + \sin A' \sin B' \cos c'. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно формулам (5) і (6) можна одержати і інші співвідношення, справедливі не тільки для полярного трикутника, але й взагалі для всього сферичного трикутника.

Якщо у сферичному трикутнику один із кутів дорівнює 90° , то такий трикутник називається *прямокутним*.

Для розв'язку прямокутних сферичних трикутників найбільше уживані такі формули (для випадку $A = 90^\circ$):

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C; \cos B = \cos b \sin C; \\ \sin b &= \sin a \sin B; \sin c = \sin a \sin C; \sin a \cos B = \cos b \sin c; \\ \operatorname{tg} b &= \sin c \operatorname{tg} B; \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B. \end{aligned} \quad (7)$$

Для розв'язку сферичних трикутників зі стороною $a = 90^\circ$ вживаються такі формули:

$$\begin{aligned} \cos A &= -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c = -\cos B \cos C; \cos b = \cos B \sin c; \\ \sin B &= \sin A \sin b; \sin C = \sin A \sin c; \sin A \cos b = \cos B \sin C; \\ \operatorname{tg} B &= \sin C \operatorname{tg} b; \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cos b. \end{aligned} \quad (8)$$

За допомогою формул сферичної тригонометрії розв'язують ряд прикладних задач астрономії, географії, геодезії, топографії, теорії польоту КА та інших наук, що мають відношення до небесної сфери, земної кулі і т. ін.

Примітки:

1. Сторонами трикутників в наведених формулах виступають дуги, що вимірюються у градусній або радіанній мірі. Якщо необхідно знайти довжину такої дуги в лінійній мірі L_ψ , то у загальному випадку слід скористатись залежністю (рис. 3):

$$L_{\psi} = \psi R, \quad (9)$$

де ψ – центральний кут в радіанній мірі, що спирається на дугу MN .

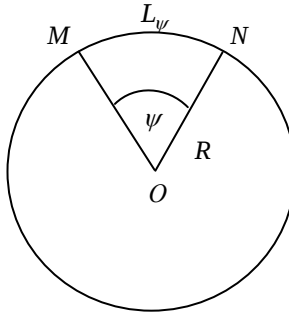


Рис. 3. До визначення довжини дуги на сфері

У нашому випадку формула (9) набуває вигляду

$$L_a = aR; L_b = bR; L_c = cR. \quad (10)$$

2. Перехід від градусної міри кута (дуги) до радіанної здійснюється за формулою

$$\psi = \psi^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}}, \quad (11)$$

а зворотний перехід від радіанної міри кута (дуги) до градусної як

$$\psi^{\circ} = \psi \frac{180^{\circ}}{\pi}. \quad (12)$$

3. Якщо $\psi^{\circ} \leq 15^{\circ}$, то можна користуватись приблизними співвідношеннями між градусною і радіанною мірами кутів (дуг)
 $\psi \approx \sin \psi^{\circ} \approx \operatorname{tg} \psi^{\circ}$.