

Лекція 2

Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем

Залежно від типу сигналів і лінійних систем – *аналогові* або *дискретні* – відповідні функції часу будуть:

- неперервними – $f(t)$ або частково неперервними;
- дискретними – $f(nT)$ послідовностями відліків, де T – період дискретизації, а n – номер відліку, $n=0, 1, 2, 3, \dots$

2.1. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області й у частотній області

$f(t)=0, t < 0$ (нульові початкові умови).

2.1.1. Перетворення Лапласа

прямого

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (2.1)$$

зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_C F(p) e^{pt} dp, \quad (2.2)$$

$$p = \sigma + j\omega \quad (2.3)$$

Перетворення Лапласа (2.1) існує для $\operatorname{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$, якщо інтеграл

$$F(p) e^{pt} \int_0^{\infty} |f(t) e^{\sigma t}| dt \quad (2.4)$$

$$F(j\omega) = F(p) \big|_{p=j\omega}. \quad (2.5)$$

прямого

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.6)$$

і зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (2.8)$$

2.1.3. Ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{jk\Delta\omega t}, \quad (2.9)$$

$$F(k) = \frac{1}{T_S} \int_{-\frac{T_S}{2}}^{\frac{T_S}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt. \quad (2.11)$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta t \omega}, \quad (2.12)$$

де Δt — період дискретизації за часом t ,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_S}, \quad (2.13)$$

n — нормований час, що відповідає абсолютним значенням часу t , що дорівнює $n\Delta t$,

$f(n)$ — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа), що обчислюються за формулою:

$$f(n) = \frac{1}{\omega_S} \int_{-\frac{\omega_S}{2}}^{\frac{\omega_S}{2}} F(\omega) e^{jn\Delta t \omega} d\omega. \quad (2.14)$$

2.2. Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області й у частотній області

$$f(nT) = 0, \quad n < 0.$$

2.2.1. Дискретне перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} t &\rightarrow nT \\ f(t) &\rightarrow f(nT) \end{aligned}$$

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT}, \quad (2.15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| e^{-\sigma nT} < \infty. \quad (2.16)$$

2.2.2. Z-перетворення

$$z = e^{pT}. \quad (2.17)$$

Прямим z -перетворенням функції $f(nT)$ називають перетворення

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}, \quad (2.18)$$

де $f(nT)$ — оригінал — дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків),

$P(z)$ — z -зображення функції $f(nT)$ — результат z -перетворення.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT) z^{-n}| < \infty. \quad (2.19)$$

2.2.3. Перетворення Фур'є

$$F(e^{j\omega T}) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (2.20)$$

Перетворення Фур'є функції $f(nT)$ пов'язане з z -перетворенням (2.18) співвідношенням

$$F(e^{j\omega T}) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (2.20)$$

тому перетворення Фур'є функції $f(nT)$ тотожне z -перетворенню даної функції на одиничному колі $z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}$ комплексної z -площини.

Відповідно, прямим перетворенням Фур'є функції $f(nT)$ називають

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega T n}, \quad (2.21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(nT)| < \infty. \quad (2.22)$$

З формули (2.21) видно, що результатом перетворення Фур'є дискретної функції $f(nT)$ є *неперервна періодична* функція $F(e^{j\omega T})$, оскільки аргумент даної функції $e^{j\omega T}$ (у свою чергу функція)

періодичний із періодом за частотою ω , що дорівнює $\frac{2\pi}{T}$:

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega \pm k \frac{2\pi}{T})T} = e^{j\omega T} e^{j2\pi k} \equiv e^{j\omega T}. \quad (2.23)$$

$$F(e^{j\omega T}) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta t \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n T},$$

де інтервал $\Delta t = T$; $f(nT)$ – дискретна функція в одиницях нормованого часу ($T=1$). Тому коефіцієнти $f(nT)$ ряду Фур'є (2.23) можна обчислити за відомою формулою (2.16):

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega,$$

$$\text{де період } \omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

Таким чином, однобічним *перетворенням* Фур'є дискретної функції $f(nT)$ називається пара взаємно однозначних перетворень (2.21)–(2.24):

прямого

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega T n};$$

оберненого

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (2.24)$$