

Лекція 5. Граничні умови в FEA

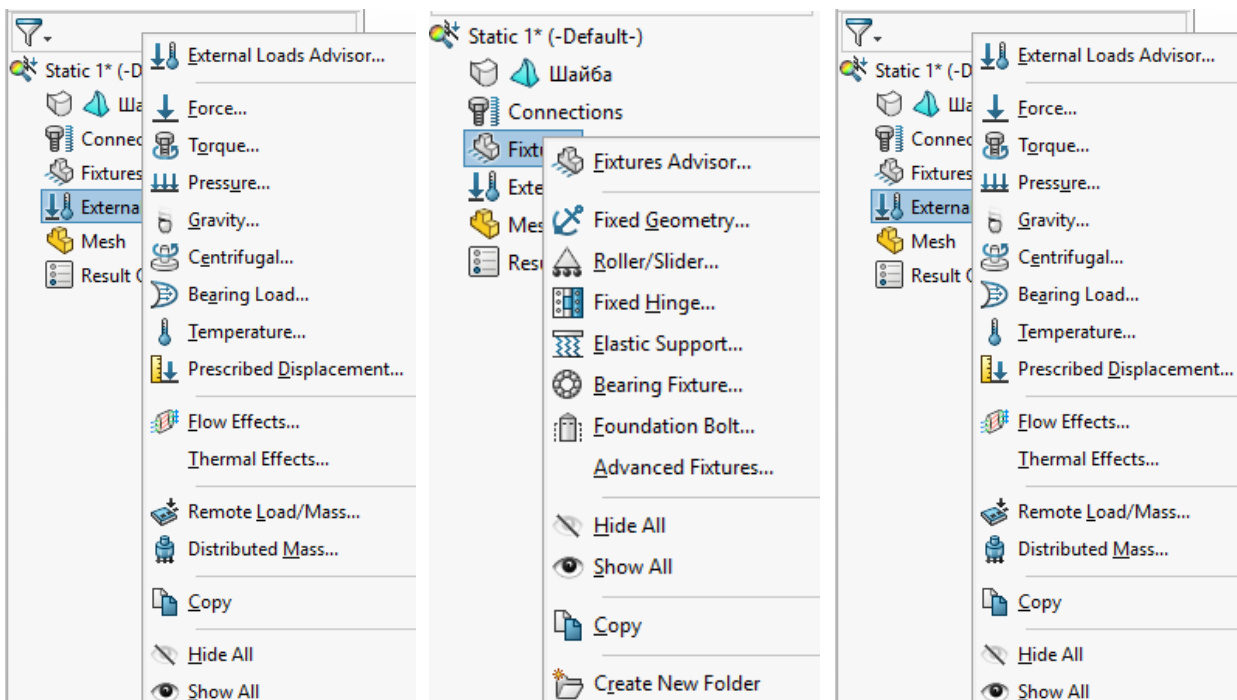
Методичні засади лекції

🕒 Під час підготовки лекції використовувались інструменти штучного інтелекту для допомоги у формулюванні та структуризації матеріалу. Весь зміст був перевірений та відредагований автором лекції.

Розділ 1. Граничні умови в FEA: загальні відомості про кінематичні та силові умови

Коректність статичного FEA-дослідження в лінійній постановці (повільне прикладання навантаження, пружні деформації, лінійність відгуку та малі переміщення) визначається не лише геометрією деталі (або збірки) та сіткою, а в значній мірі **правильною постановкою задачі**. До останнього відноситься: вибір граничних умов, типу навантаження, способу закріплення та адекватної моделі матеріалу. У середовищі **SOLIDWORKS Simulation** постановка лінійного статичного дослідження (будь якого дослідження, але в даній лекції розглядається лише лінійна постановка статички) виконується через задання **навантажень (External Loads)**, **закріплень і обмежень (Fixtures)**, а також **взаємодій і з'єднань (Connections)**

Загальний вигляд можливостей External Loads, Fixtures та Connections показано на рис.1.



а	б	в
---	---	---

Fixtures - це в більшій мірі **кінематичні граничні умови**;

External Loads - це переважно **силові граничні умови**;

Connections / Interactions - це **умови взаємодії між деталями, їх елементами** (або між геометрією елементів та віртуальними об'єктами такими як віртуальна стінка) або **спеціальні інженерні ідеалізації з'єднань** (наприклад, болтові з'єднання чи підшипники кочення).

❗ **Connections / Interactions** це і кінематичні умови і частково силові також. Але не всі складові цієї категорії є граничними умовами, наприклад, **Pin, Bolt, Spring** в строгому математичному сенсі (умови Діріхле та Неймана) не є граничними умовами в чистому виді, а це скоріше певні віртуальні аналоги з'єднувачів чи конекторів

Граничні умови (силові і кінематичні) задаються до формування скінченно-елементної сітки. Часто **помилка в граничних умовах небезпечніша за некоректну сітку**. Надто жорстке закріплення (наприклад, інструментами Fixtures, що спотворюють відображення умов закріплення реального об'єкту) може штучно знизити переміщення і завищити локальні напруження (або призвести до сингулярності напружень), а недостатнє закріплення призводить до нестійкості моделі та появи руху тіла як жорсткого цілого.

📖 **більш детальну інформацію щодо словосполучень "некоректна сітка" та "збіжність скінченно-елементної сітки" можна буде отримати в наступних лекціях, а також додатково в даному джерелі [1]**

Розділ 2. Інженерна постановка граничних умов

У лекції 2 на прикладі 1D задачі про розтяг стержня граничні умови поділяються на два принципово різні типи:

- **умови Діріхле** - задають переміщення;
- **умови Неймана** - задають силовий вплив.

У практичному застосуванні SOLIDWORKS Simulation ця логіка повністю зберігається. Якщо ми вказуємо, що певна грань не може переміщуватись, або дозволяємо рух лише в окремих напрямках, то ми задаємо **кінематичні обмеження**, тобто умови типу Діріхле. Якщо ж прикладаємо силу, тиск, момент тощо, то задаємо **силові граничні умови**, тобто умови типу Неймана. Тому в SOLIDWORKS Simulation інструменти **Fixtures**, **Connections / Interactions** та **External Loads** є прямим відображенням математичної постановки задачі.

⚡ Важливо розуміти наступне:

програмні продукти для FEA не можуть самостійно із деталі чи збірки "розпізнати" граничні умови, тому **визначення граничних умов, які є певним ідеалізованим відображеннями дійсного закріплення та навантаження деталі чи збірки, це задача інженера**. Важливо коректно відобразити ідеалізованими умовами фактичні умови реальної конструкції, інакше - результати дослідження не будуть валідовані, тобто, не будуть давати реалістичну картину, наприклад, напружено-деформованого стану

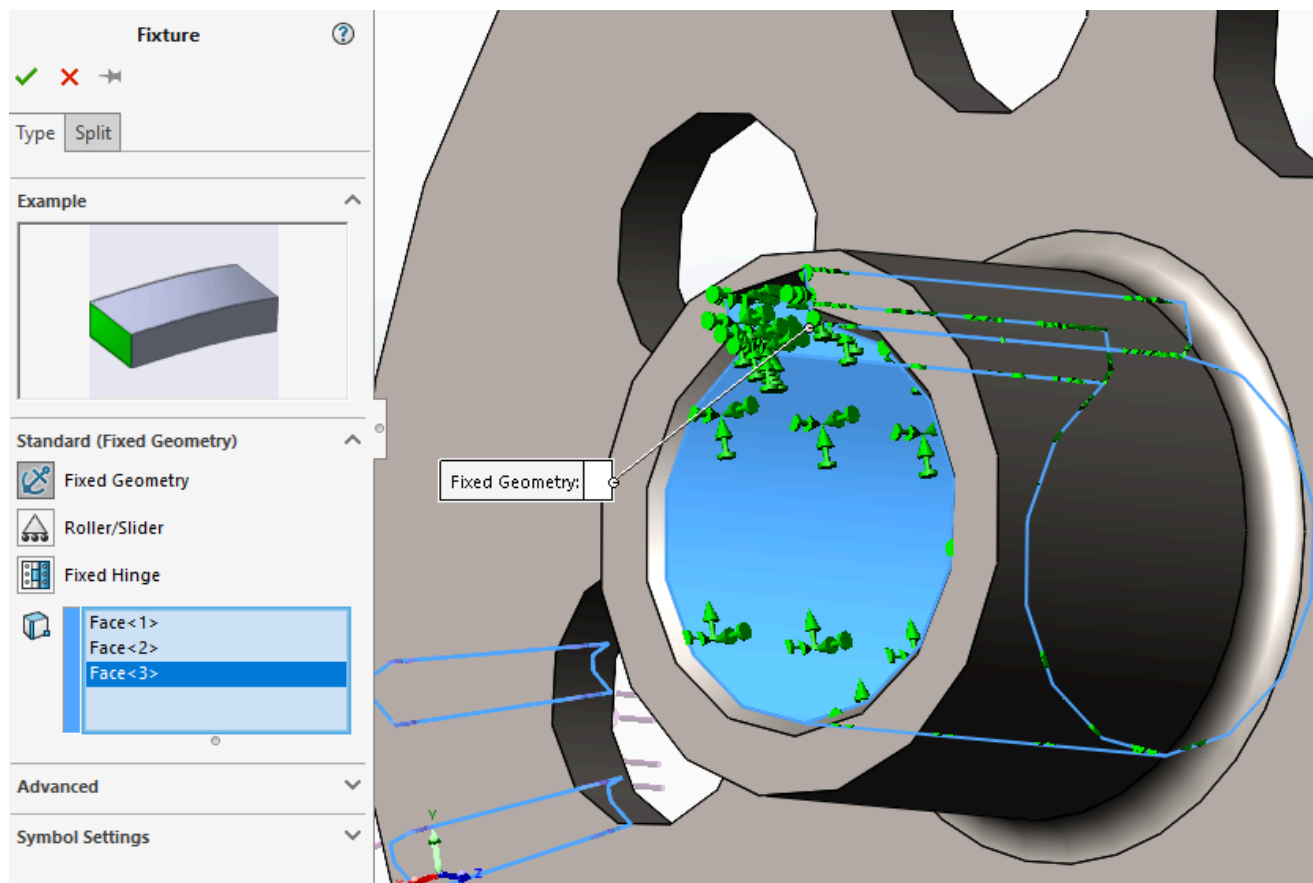
Кінематичні граничні умови

Кінематичні умови задають заборону або обмеження переміщень. У найпростішому випадку це **Fixed Geometry** - повна заборона переміщень на вибраній геометрії. Але в інженерній практиці часто потрібні фізично точніші варіанти: обмеження лише по нормалі до поверхні, фіксація в обраному напрямку, роликове або симетричне закріплення.

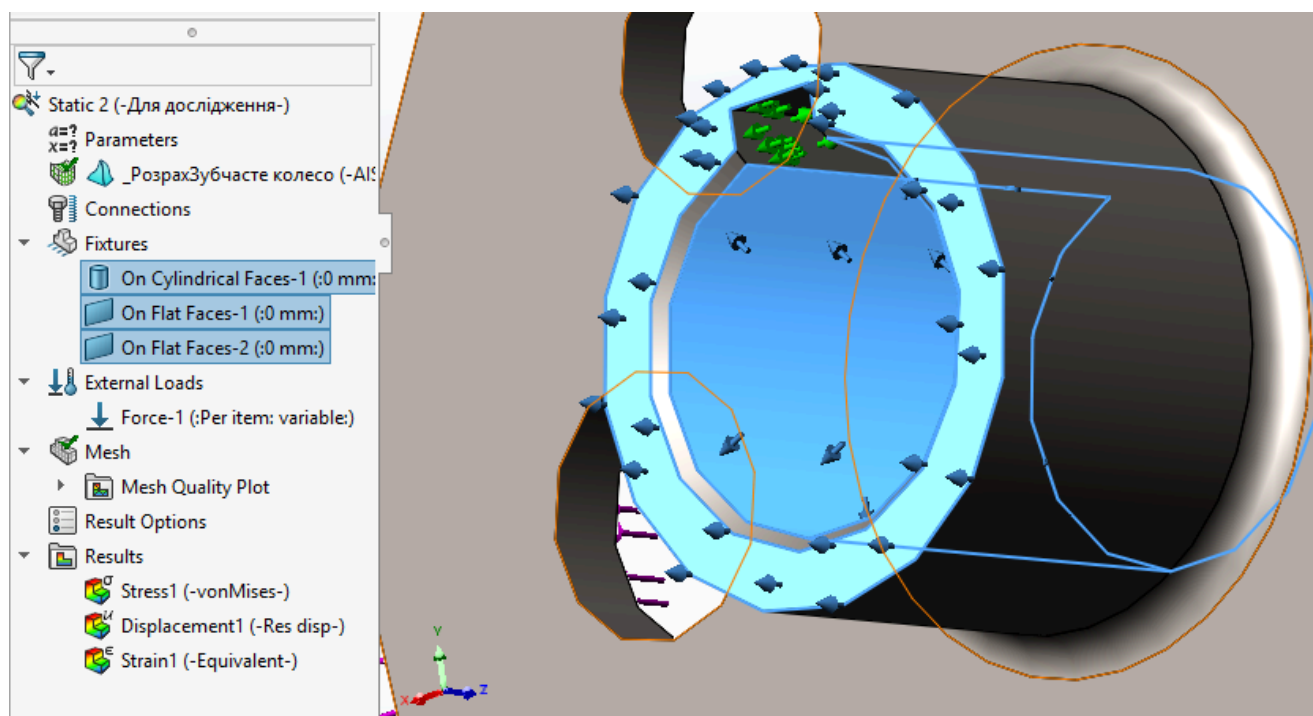
Офіційна довідка SOLIDWORKS розглядає fixtures як набір обмежень (restrains), які накладаються на вибрані грані, ребра або вершини. Тобто, **закріплення - це не "місце, де стоїть деталь", а математичне обмеження ступенів свободи через ідеалізовані фіксації, кріплення чи взаємодії з іншими компонентами**.

Тобто ми не просто "прикріпили елементи зубчастого колеса" (див. рис.2), а заборонили певним вузлам змінювати своє положення в певних напрямках.

Приклад застосування різних умов закріплення до елементів зубчастого колеса показаний на рис.2.



а



б

Рис.2. Приклади застосування різних умов закріплення: а - найпростіший і часто найменш точний спосіб через **Fixed Geometry**, б - більш точний через комбінацію різних локальних обмежень

Нижче буде наведено короткий опис базових кінематичних умов у середовищі SOLIDWORKS Simulation. Більш детально з усіма способами доступними у

SOLIDWORKS способами формування обмеження ступенів свободи через ідеалізовані фіксації можна ознайомитися в наступному джерелі^[2]

1. Fixed Geometry

Це найпростіший і водночас найнебезпечніший у навчальній практиці тип закріплення. Він повністю забороняє переміщення вибраної геометрії. У типовому розумінні це наче з'єднання елемента зварюванням до якоїсь абсолютно жорсткої стінки, з точки зору теоретичної механіки це “жорстке защемлення”. Воно зручне для перших кроків FEA, інколи має місце в реальних конструкціях (дуже жорстке кріплення до жорсткої основи, наприклад, станини верстату тощо), але в багатьох інших вузлах таке закріплення є надмірною ідеалізацією. Якщо без належного обґрунтування використовувати **Fixed Geometry**, можна штучно значно підвищити жорсткість конструкції та змінити картину локальних напружень і деформацій. Фактично це найпростіша реалізація умови Діріхле: на обраній частині межі переміщення вважаються відомими і рівними нулю. Приклад застосування даної кінематичної умови показаний на рис.2,а.

2. Roller/Slider і обмеження по напрямках

Це закріплення, які не блокують усі ступені свободи, а лише окремі переміщення (приклад показано на рис.2,б). Для плоскої або криволінійної поверхні це часто означає заборону переміщення по нормалі при дозволених переміщеннях у дотичних напрямках.

3. Prescribed displacement

Окремий важливий випадок та важлива можливість - це не нульове, а **задане переміщення**. Воно теж належить до умов Діріхле, але замість нульового зміщення ми задаємо наперед відоме переміщення в певному напрямку. Це корисно, коли у фізичній задачі переміщення є керованим параметром: наприклад, осадження, примусове зміщення повзуна тощо. така кінематична умова часто застосовується для випадків нелінійних статичних досліджень.

Приклад вказування фіксованого переміщення показаний на рис. 3

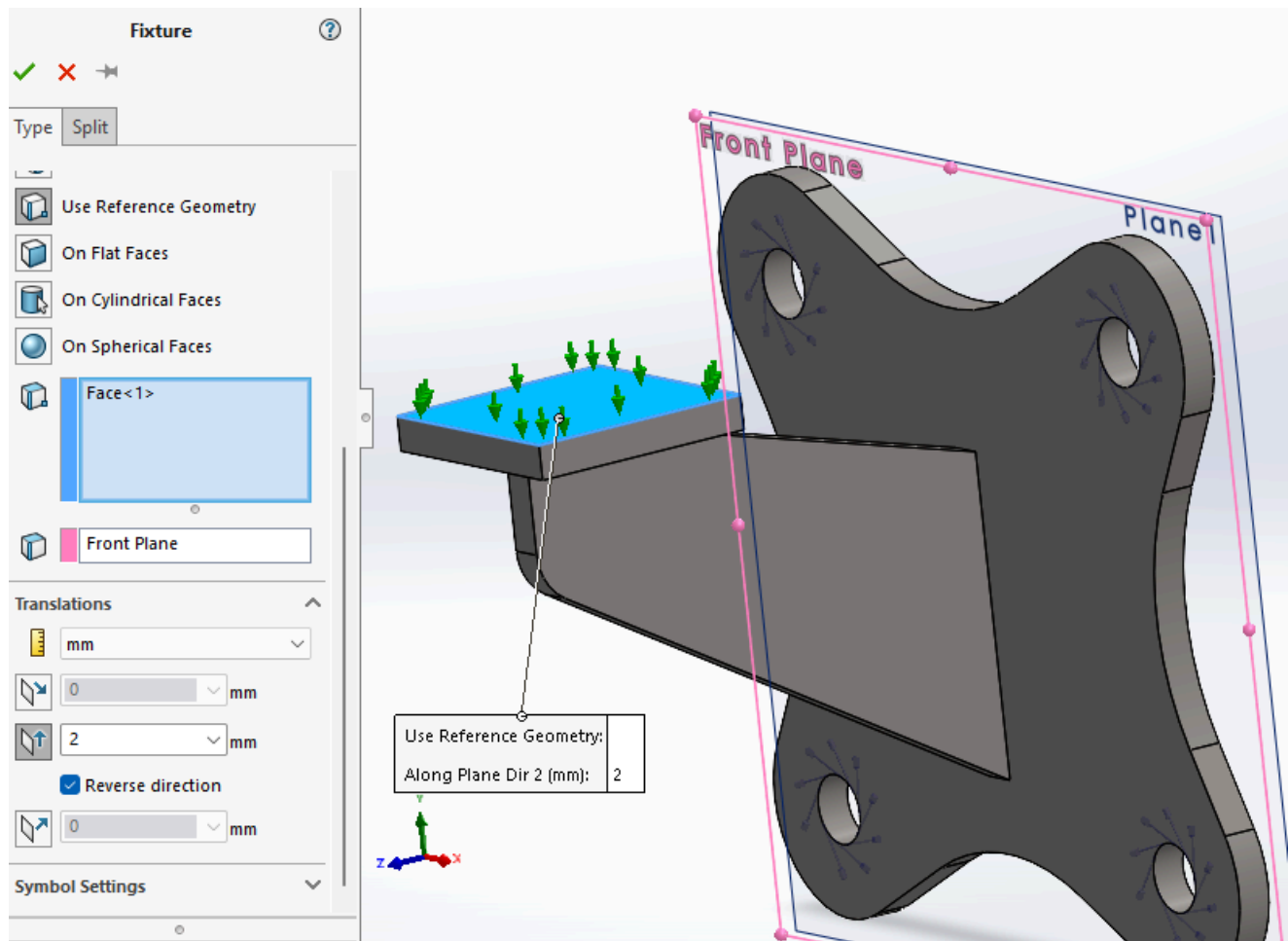


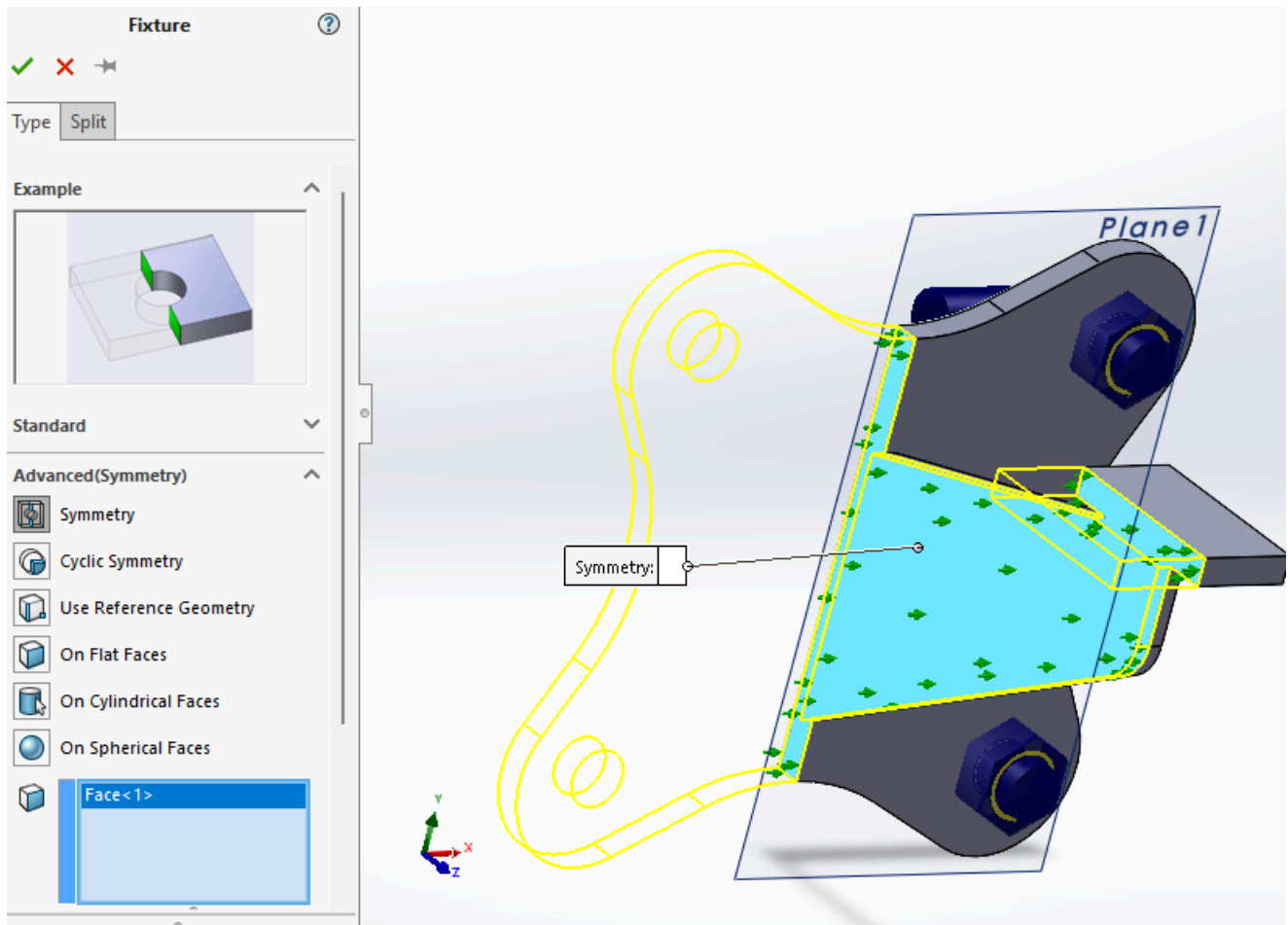
Рис.3. Приклад застосування умови **Prescribed displacement**

Більш детальну про особливості застосування цієї кінематичної умови можна знайти в наступній публікації [\[3\]](#)

3. Symmetry fixture

Симетрію в контексті SOLIDWORKS Simulation можна розцінювати як повноцінну граничну умову. У SOLIDWORKS Simulation symmetry дозволяє моделювати лише частину конструкції за умови, що геометрія, навантаження та закріплення симетричні відносно вибраної площини. Офіційна довідка зазначає, що можна моделювати лише частину моделі, а результати для іншої частини відновлюються з використанням умов симетрії.

Приклад вказування умови симетрії показаний на рис. 4

Рис.4. Приклад застосування умови **Symmetry fixture**

Більш детально з усіма кінематичними умовами, що наявні у SOLIDWORKS, можна ознайомитися в наступних джерелах [\[4\]](#)

Силові граничні умови

Силові умови задають зовнішній вплив на модель. У SOLIDWORKS Simulation для статичних досліджень можна задавати, зокрема, **force**, **pressure**, **torque/moment**, **gravity** і **remote load/mass** тощо. У довідці SOLIDWORKS прямо зазначено, що доступні рівномірний і нерівномірний тиск, сили з різним способом задання напрямку, а також гравітаційні або відцентрові навантаження.

🔗 Але слід пам'ятати наступне:

одна й та сама фізична дія може бути змодельована по-різному, але не всі способи однаково коректні. Наприклад, зусилля від болтового з'єднання, тиск рідини і зосереджена сила на грані - це різні за фізичним змістом навантаження, навіть якщо за низки умов вони в сумі дають однакове навантаження чи викликають однакову реакцію системи.

Приклад застосування різних силових умов до елементів редуктора показаний на рис.5.

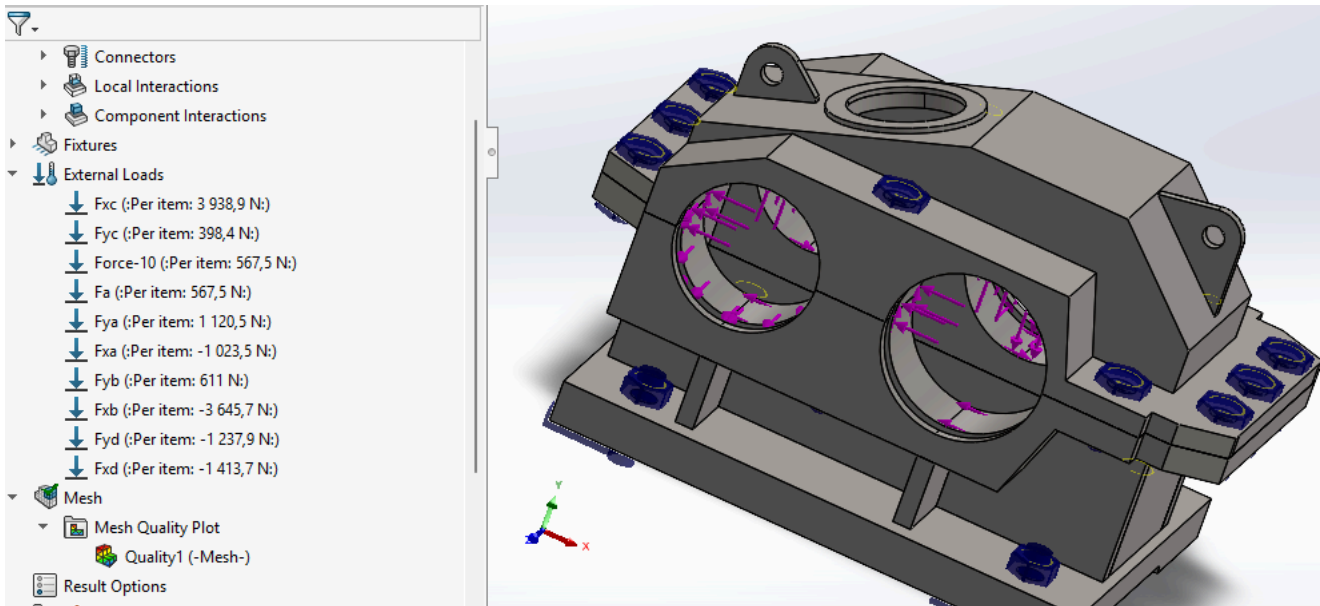


Рис. 5. Формування граничних умов статичного дослідження корпусу циліндричного редуктора

Значення складових силових факторів, що прикладені до спрощеної моделі корпусу редуктора (*корпус редуктора зварний, але на рис.3 не показані ні зварні шви ні елементи, що підлягали зварюванню*), отримані з класичних розрахунків редуктора і являються складовими реакцій опор редуктора. Останнє залежить від

В даному прикладі була сформована розрахункова схема одного з валів даного редуктора (див. рис. 6), виконані розрахунки сил в зачепленні, та визначені реакції в опорах редуктора.

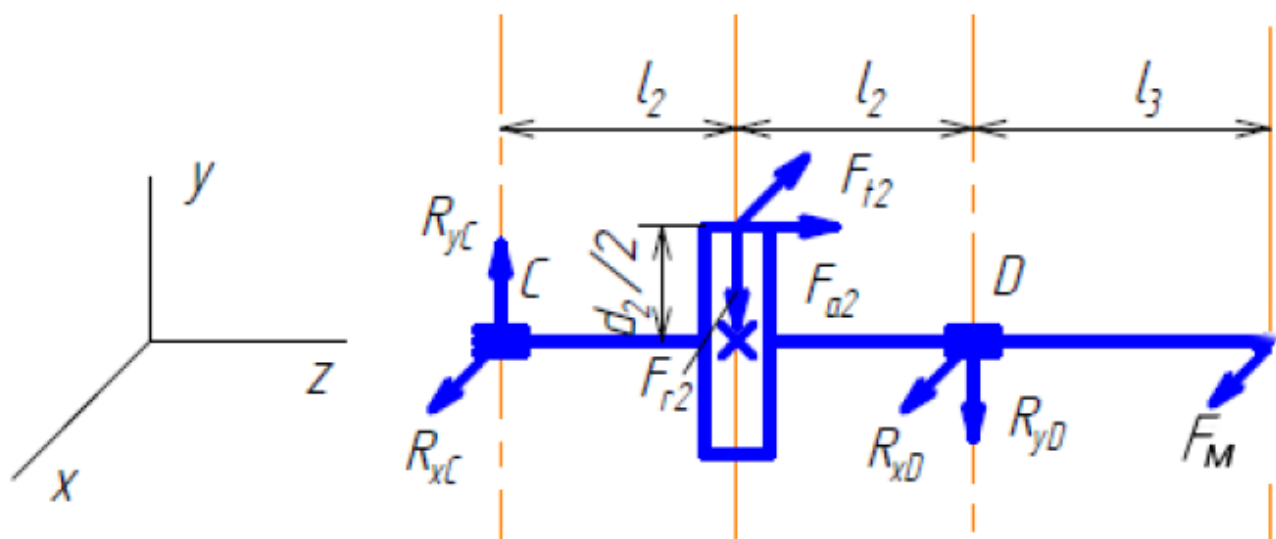


Рис.6. Схема до визначення реакцій в опорах валу редуктора

Тобто, перед формуванням силових умов інструментами SOLIDWORKS Simulation спочатку їх потрібно визначити тим чи іншим способом, часто шляхом виконанням

класичних розрахунків з курсів інженерної механіки, деталей машин тощо.

Наприклад, на основі рис.6 та інших вхідних даних, визначаються складові реакцій в опорах C і D . Зокрема:

- в площині XZ по опорі D :

$$R_{XD} \cdot 2 \cdot l_2 - F_{t2} \cdot l_2 + F_M \cdot (l_3 + 2 \cdot l_2) = 0; \quad \text{— в площині } YZ \text{ по опорі } D :$$

$$R_{YD} \cdot 2 \cdot l_2 + F_{r2} \cdot l_2 + F_{a2} \cdot d_2 \cdot 0.5 = 0;$$

Вище наведені формули та схема до розрахунку реакцій опор, показані з метою пояснення інженерної необхідності не тільки коректно призначати силові умови, а і коректно їх визначати до використання під час виконання FEA. Але скорочено наведений шлях пошуку складових реакцій в опорах через класичні розрахунки, не є виключним. За допомогою більш комплексної моделі редуктора, що буде включати всі елементи (елементи зубчастої чи іншої передачі тощо), навантаження на вхідний вал, можна здійснити аналіз напружено-деформованого стану корпусу редуктора виключно засобами САПР.

🔥 **Рішення щодо виконання дослідження спрощеної моделі редуктора** (наприклад, лише корпус без валів, без елементів зубчастої передачі тощо) з попереднім "класичним" визначенням силових факторів в опорах; **або використання цілісної моделі редуктора без необхідності виконання попередніх розрахунків (але із значним ускладненням FEA моделі), приймає інженер.** Часто застосовується комбінований підхід.

У лінійному статичному дослідженні силові впливи задаються через папку **External Loads**.

1. Force [5]

Зосереджена сила, прикладена до маленької грані або вершини, може створювати локально нереалістичні піки напружень. Тому важливо зазначити, що така гранична умова як зосереджена сила потребує інженерного розгляду питання про **область її прикладання та напрям, напрям**. У багатьох реальних задачах тиск або контактна взаємодія краще описують ситуацію, ніж зосереджена сила на грані. Приклад формування силових умов показано на рис.3.

В цілому в дослідженнях можна прикладати **сили, моменти або крутні моменти з рівномірним розподілом** до граней, ребер, опорних точок, вершин і балок у будь-якому напрямку.

Також можна прикладати **нерівномірно розподілені сили** (Nonuniform Distribution) до граней, крайок оболонок і балок. Нерівномірно розподілена сила задається **значенням**

сили та законом її розподілу. Значення сили приймається рівним **сумі абсолютних значень сил**, прикладених до кожної грані. Розподіл сили описується **коефіцієнтами полінома другого порядку** відносно осей **x** та **y** системи координат відліку, як це описано для змінного тиску.

_Приклад визначення нерівномірно розподіленої сили показано на рис. 7

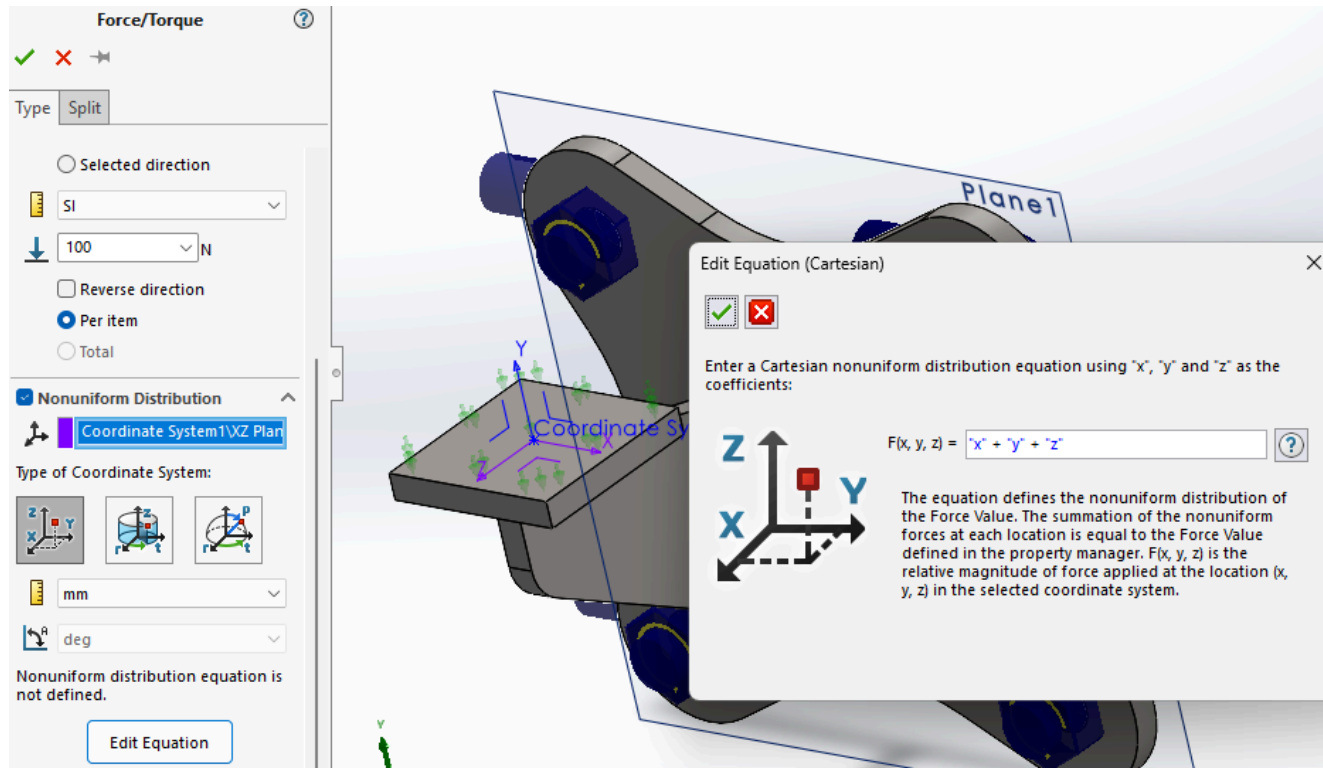


Рис.7. Приклад застосування умови **Nonuniform Distribution**

Тиск є обґрунтованим вибором, коли навантаження діє на поверхню розподілено (наприклад, діє тиск рідини, газу, притисна дія тощо), та за допомогою нього можна формування ідеалізованого рівномірне контактне навантаження. В цілому якщо в дійсності сила передається через площу, то й у FEA бажано моделювати (відобразити) її не як “одну силу”, а як поверхнєве навантаження.

3. Torque

Момент або крутний момент використовують для валів, важелів, втулок, фланців та інших деталей, де головний ефект створюється не прямою силою, а моментом від сили. Слід зазначити, що математично сила і момент - це різні види зовнішніх дій, але обидва належать до силових граничних умов, тобто до умов типу Неймана.

Приклад призначення крутного моменту показано на рис. 8

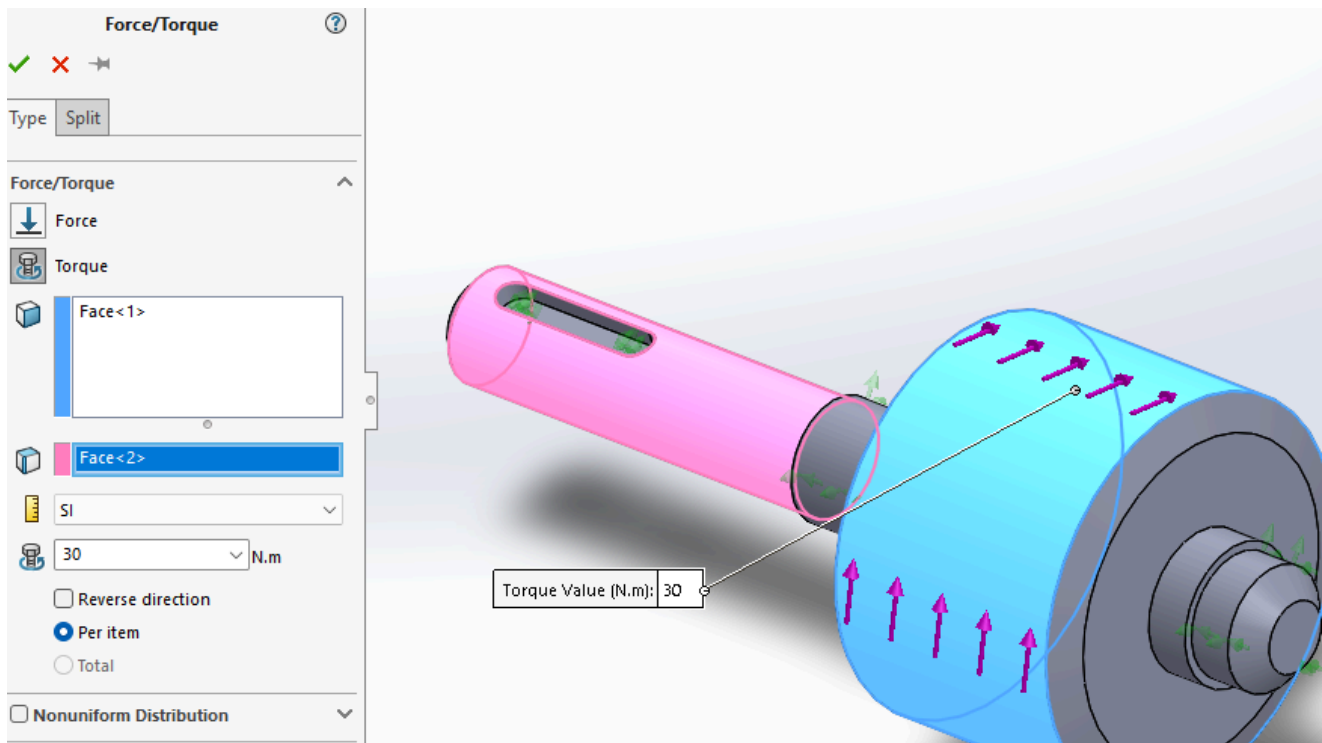


Рис.8. Приклад застосування умови **Torque**

4. Gravity

Для великих конструкцій, кронштейнів, корпусів, довгих рам або тонкостінних елементів власна вага може суттєво впливати на напружений стан, тому силову умову Gravity потрібно застосовувати в таких випадках. Крім того, у практиці діагностики моделей гравітацію часто використовують як тестове навантаження при перевірці стабільності розрахункової схеми. Саме такий підхід описує GoEngineer у матеріалі про instability diagnosis [6].

Коректність постановки задачі: неповне закріплення, надлишкове закріплення та rigid body motion

1. Неповне закріплення

Якщо конструкція не має достатніх обмежень, модель може переміщатися як жорстке тіло. У такій ситуації розв'язувач (solver) або завершується помилкою, або дає ознаки нестійкості. Офіційна довідка містить інструмент **Simulation Evaluator**, який перевіряє setup перед запуском і допомагає виявити проблеми, що перешкоджають успішному розрахунку.

Якщо на тіло діє сила, але немає достатніх реакцій опор, тіло не деформується у звичному сенсі - воно просто рухається в просторі, що призводить до помилки.

Приклад руху деталі як жорсткого тіла в SOLIDWORKS Simulation показано на рис.9

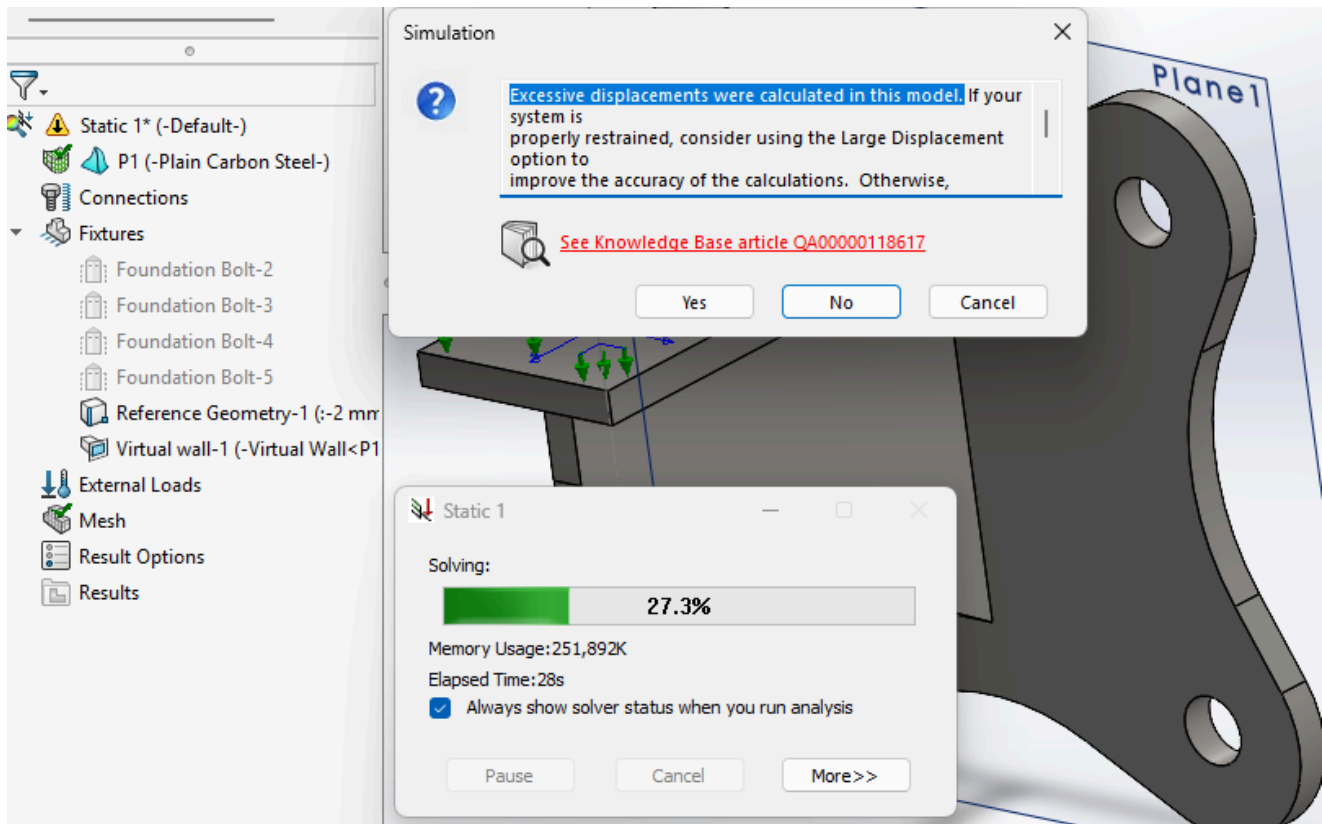


Рис.9. Приклад руху деталі як жорсткого тіла

2. Надлишкове закріплення

Іноколи виникає протилежна проблема - це надмірне закріплення. У такому випадку модель стає занадто жорсткою порівняно з реальною конструкцією. Реакції опор та поля напружень можуть вийти формально логічними, але фізично помилковими. При цьому солвер SOLIDWORKS Simulation видавати помилок не буде. З цього виходить, що **числова збіжність ще не завжди означає фізичну правильність**.

3. Проблема контактів як причина нестійкості

У збірках нестійкість часто пов'язана не з відсутністю fixture напряду, а з тим, що між тілами некоректно задані контакти. Контактні умови збірок будуть розглянуті в наступних лекціях.

Розділ 3. Підсумкова інформація щодо формування граничних умов

В джерелі [7] наводиться графічне порівняння питомої ваги невизначеностей в моделі, що показано на рис.10

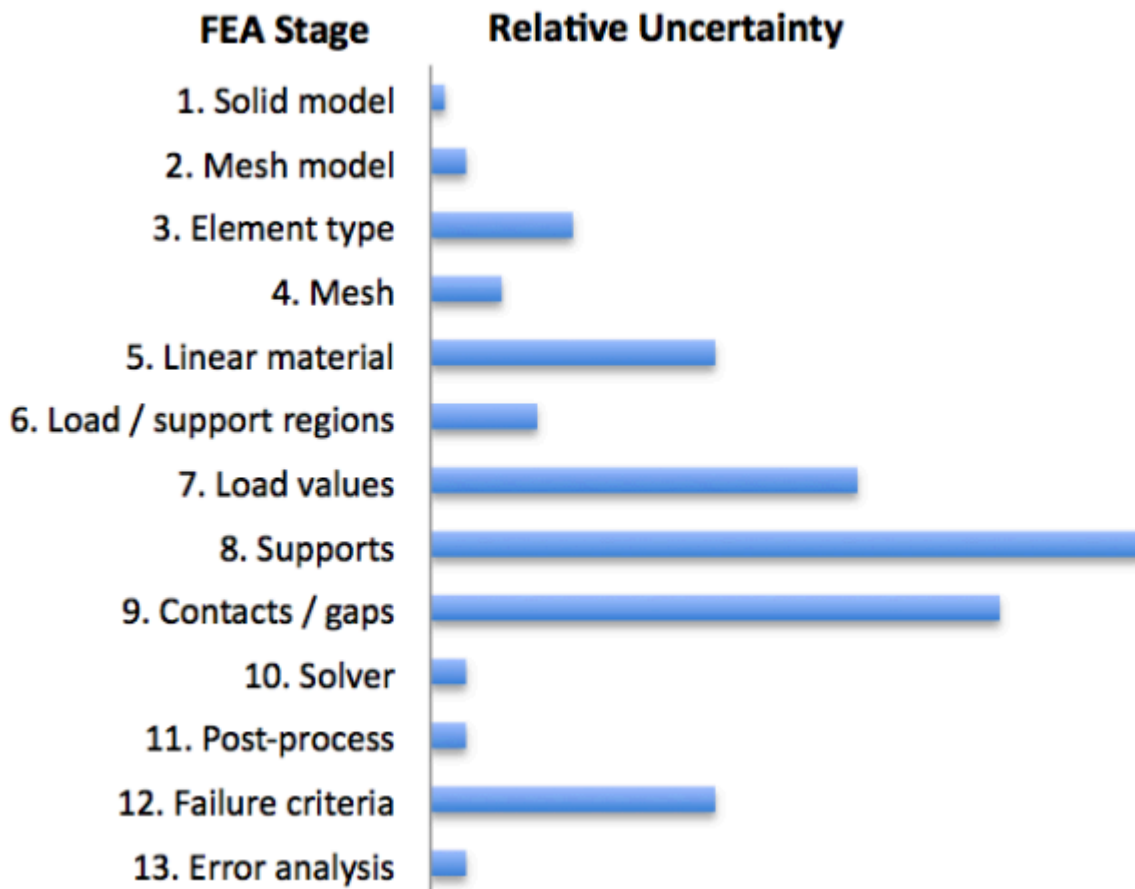


Рис.10. Відносна невизначеність основних етапів моделювання [7-1]

В джерелі [7-2] показано, що в **FEA** точність результату залежить від багатьох рішень інженера на різних етапах моделювання. Кожен етап моделювання (виконання алгоритму **FEA**) додає свою похибку або невизначеність. Згідно рис.10 найбільші невизначеності моделювання це

- ****опори / закріплення**
- ****контакти та зазори**
- ****величина навантажень**
- **критерії міцності / руйнування**
- **властивості матеріалу**

Тобто неправильне задання граничних умов може впливати на результат набагато сильніше, ніж, наприклад, вибір солвера.

Тому автор джерела [7-3] радить:

1. **задокументувати припущення,**
2. **перевірити модель незалежним способом,**
3. **враховувати, що саме може бути джерелом невідповідності комп'ютерної моделі фізичній моделі.**

Якщо, наприклад, сформовано ідеально жорстке закріплення там, де в реальності є люфт, результат може бути суттєво спотворений.

Список використаних джерел інформації

1. **Bentley S.** How Do I Know My Mesh Is Good Enough? [Електронний ресурс] / S. Bentley // **GoEngineer**. — 2019. — 31 Dec. — Режим доступу: <https://www.goengineer.com/blog/how-do-i-know-my-mesh-is-good-enough> ↩
2. **Fixtures** [Електронний ресурс] // **SOLIDWORKS Help 2025**. — Режим доступу: https://help.solidworks.com/2025/english/SolidWorks/cworks/c_fixtures.htm?id=26.15.4 ↩
3. **Dark, R.** Prescribed Displacement to find Reaction Force in SOLIDWORKS Simulation [Електронний ресурс] / R. Dark // **GoEngineer**. — 2018. — 04 Dec. — Режим доступу: [goengineer.com/blog/prescribed-displacement-reaction-force-solidworks-simulation](https://www.goengineer.com/blog/prescribed-displacement-reaction-force-solidworks-simulation) ↩
4. **Loads and Restraints** [Електронний ресурс] // **SOLIDWORKS Web Help 2024**. — Режим доступу: help.solidworks.com/2024/english/SolidWorks/cworks/c_Loads_and_Restraints.htm?id=26.15 ↩
5. **Force** [Електронний ресурс] // **SOLIDWORKS Web Help 2024**. — Режим доступу: help.solidworks.com/2024/english/SolidWorks/cworks/c_Force.htm?id=26.15.5.1 ↩
6. **Dark, R.** SOLIDWORKS Simulation – Instability Diagnosis [Електронний ресурс] / R. Dark // **GoEngineer**. — 2014. — 26 Mar. — Режим доступу: [goengineer.com/blog/solidworks-simulation-instability-diagnosis](https://www.goengineer.com/blog/solidworks-simulation-instability-diagnosis) ↩
7. **Akin J. Ed.** Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks. — New Jersey : World Scientific, 2009. — 313 p. ↩↩↩↩