

Лекція 4. Моделі механіки матеріалів

Методичні засади лекції

і Під час підготовки лекції використовувались інструменти штучного інтелекту для допомоги у формулюванні та структуризації матеріалу. Весь зміст був перевірений та відредагований автором лекції.

Розділ 1. Основні відомості про деякі фізико-механічні властивості матеріалів

Властивості матеріалів в Simulation^[1]

1. Модуль Юнга

Модуль пружності (або модуль Юнга) - це фізична величина, яка характеризує **жорсткість матеріалу**, тобто його опір пружній деформації під дією нормальних напружень. Він показує, яке **напруження** потрібно створити, щоб отримати певну **відносну деформацію**. Згідно матеріалів офіційної довідки **SOLIDWORKS Simulation** ^[1-1] модуль пружності в глобальних напрямках **X, Y та Z** є першою властивістю (для статичного та низки інших досліджень), яка зазначена в списку властивостей (див. рис.1).

Модуль пружності (**Elastic modulus** - див. рис.1.) вперше був уведений **Юнгом** і часто називається **модулем Юнга**.

Властивості матеріалів для лінійної постановки статичної задачі в SOLIDWORKS Simulation показані на рис.1

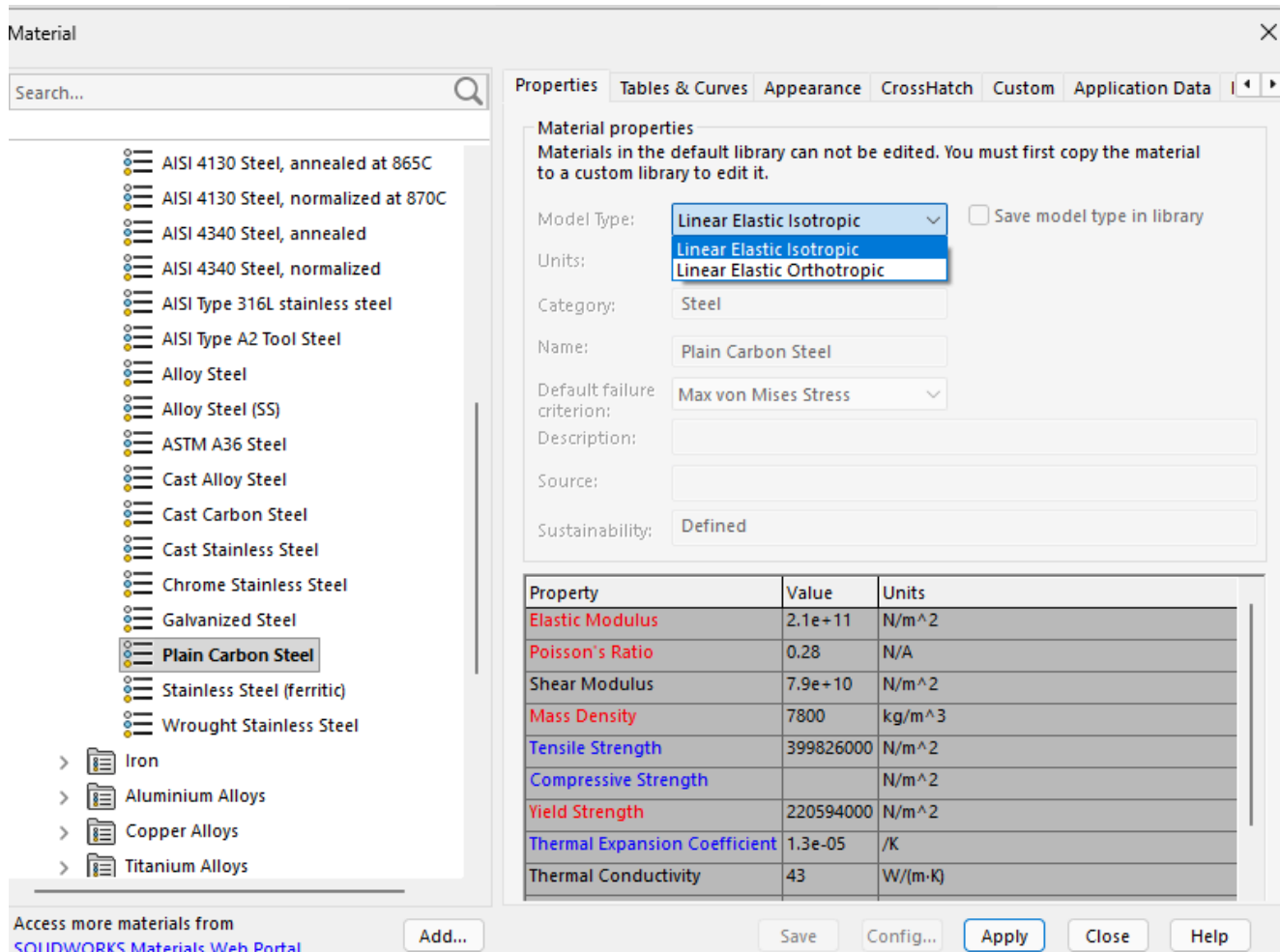


Рис. 1. Властивості матеріалів для лінійної постановки статичного дослідження

Основне означення

У межах **пружної деформації** та для лінійно-пружного матеріалу виконується закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$

де:

- σ - нормальне напруження;
- E - модуль Юнга;
- ε - відносна поздовжня деформація.

Звідси:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1.2)$$

Тобто, для лінійно-пружного матеріалу модуль пружності в певному напрямку визначається як значення напруження в цьому напрямку, яке викликає одиничну деформацію в тому самому напрямку [1-2].

Також відомо, що

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.3)$$

Для **випадку осьового розтягнення або стиснення стержня** Модуль Юнга можна визначити через силу, площу, подовження і початкову довжину. В даному випадку деформації визначаються як

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.4)$$

тож для розтягу або стиску стержня модуль Юнга з урахуванням 1.3 та 1.4 можна записати так:

$$E = \frac{Fl_0}{A\Delta l} \quad (1.5)$$

де:

- F - сила;
- A - площа поперечного перерізу;
- Δl - абсолютне подовження;
- l_0 - початкова довжина.

З рівняння 1.5 (як прикладу) добре можна простежити фізичний зміст модуля Юнга, бо чим **більший** модуль Юнга, тим матеріал **жорсткіший** і тим **менше деформується** при однаковому навантаженні.

🔗 Модуль пружності використовуються в статичному, нелінійному, частотному, динамічному аналізі та аналізі втрати стійкості [1-3].

Одиниці вимірювання

У SI:

$$[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Оскільки відносна деформація безрозмірна, то розмірність модуля Юнга така сама, як у напруження.

Деякі типові значення

Приклади порядків величин:

- сталь: приблизно

$$E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

- алюміній: приблизно

$$E \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

Як було сказано вище, модуль Юнга є "жорсткістю" матеріалу. Але жорсткість деталі

залежить від "жорсткості" матеріалу , а також від геометрії деталі. Що таке в цілому жорсткість деталі (або збірки деталей)?

Жорсткість - це здатність конструкції чинити опір деформації під дією зовнішніх сил. Вона є мірою того, яка величина сили потрібна, щоб викликати певну деформацію конструкції. У практичному сенсі жорсткість - це здатність конструкції витримувати згинання, скручування, стискання або розтягування без втрати своєї початкової форми . Більш жорстка конструкція прогинається менше під дією певного навантаження порівняно з менш жорсткою конструкцією [2].

❗ **Жорсткість можна вимірювати різними практичними методами. Один із поширених методів - це випробування, під час якого до конструкції прикладають навантаження і вимірюють деформацію. Інший метод - вібраційні випробування, під час яких визначають власну частоту конструкції та використовують її для розрахунку жорсткості [2-1].**

2. Коефіцієнт Пуассона

Коефіцієнт Пуассона показує, як сильно матеріал **звужується поперек** при **розтягу вздовж**, або навпаки - як **розширюється поперек** при **стиску вздовж**. Для лінійно-пружного матеріалу він визначається як **від'ємне відношення поперечної відносної деформації до поздовжньої відносної деформації** [3].

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \quad (1.6)$$

де:

- ν — коефіцієнт Пуассона;
- $\varepsilon_{\perp}$ — поперечна відносна деформація;
- $\varepsilon_{\parallel}$ — поздовжня відносна деформація.

Фізичний зміст

Якщо стержень розтягується вздовж осі x , то його довжина збільшується, а поперечні розміри зазвичай зменшуються. Саме цей поперечний ефект і описує коефіцієнт Пуассона. Для більшості звичайних конструкційних матеріалів ν додатний; для майже нестисливих матеріалів він близький до 0.5; існують також **ауксетичні матеріали** з від'ємним ν , які при розтягу розширюються також і в поперечному напрямку.

🌀 **Коефіцієнти Пуассона використовуються в статичному, нелінійному, частотному, динамічному аналізі та аналізі втрати стійкості**

Для ізотропних матеріалів коефіцієнти Пуассона в усіх площинах однакові.

3. Модуль зсуву

Модуль зсуву показує, наскільки матеріал опирається **зсувній деформації**: що більше G , то менше матеріал “зсувається” під дією дотичних напружень. У довідці SOLIDWORKS це прямо подано як відношення **shearing stress / shearing strain**.

Основна формула

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.7)$$

де:

- G - модуль зсуву;
- τ - дотичне напруження;
- γ - деформація зсуву.

Зв'язок з іншими пружними властивостями

Зв'язок з іншими властивостями можна показати через формулу 1.8

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.7)$$

де:

- E - модуль Юнга;
- ν — коефіцієнт Пуассона.

Модуль зсуву важливий у задачах на кручення і зсув. Чим більший G , тим вища жорсткість деталі та менші деформації. останнє добре простежується через формула для кручення 1.9

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \quad (1.7)$$

де:

- φ - кут закручування;
- T - крутний момент;
- L - довжина елемента.
- J - полярний момент інерції.

Приклади значень для деяких матеріалів наведені нижче

$$G_{\text{сталь}} \approx 77 \text{ ГПа}$$

$$G_{\text{алюміній}} \approx 25\text{--}26 \text{ ГПа}$$

 **Модуль зсуву використовуються в статичному, нелінійному, частотному, динамічному аналізі та аналізі втрати стійкості.**

4. Густина

Густина - це маса одиниці об'єму. Одиниці густини: **lb/in³** в англійській системі та **kg/m³** у системі SI.

У статичному аналізі та аналізі втрати стійкості густина використовується лише тоді, коли задано об'ємні сили (гравітація та/або відцентрові сили).

Приклади значень для деяких матеріалів наведені нижче:

$$\rho_{\text{сталь}} \approx 7850 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{\text{алюміній}} \approx 2700 \text{ кг/м}^3$$

Густина використовується в статичному, нелінійному, частотному, динамічному, тепловому аналізі та аналізі втрати стійкості.

5. Границя (межа) міцності при розтягу (Tensile Strength) та стиску (Compressive Strength)

Границя міцності при розтягу показує **найбільше нормальне напруження**, яке матеріал може витримати при розтягу перед руйнуванням.

У SOLIDWORKS цей параметр використовується для оцінки чи не перевищує робоче (еквівалентне) напруження межу міцності матеріалу.

Основна формула для границь міцності розтягу (для границі міцності на стиск формула аналогічна окрім того, що силовий фактор стискаючий, а не розтягуючий):

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.8)$$

де:

- σ - нормальне напруження;
- F - сила розтягу (або стиску у випадку границі міцності на стиск);
- A - площа поперечного перерізу.

Позначення **границі міцності при розтягу** здійснюють наступним чином

$$\sigma_{\text{в}} \text{ або } \sigma_{\text{tensile}}$$

Позначення **границі міцності при стиску** здійснюють наступним чином

$$\sigma_{\text{compressive}}$$

Приклади значень для деяких матеріалів наведені нижче:

$$\sigma_{\text{tensile, steel}} \approx 400\text{--}550 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{\text{tensile, aluminum}} \approx 150\text{--}300 \text{ МПа}$$

⚡ Для пластичних металів стиск часто менш небезпечний, ніж розтяг, а для крихких матеріалів навпаки - міцність при стиску може бути значно вищою за міцність при розтягу.

6. Границя текучості (Yield Strength)

Yield Strength — це напруження, після якого матеріал починає **пластично деформуватися**, тобто після зняття навантаження вже не повертається повністю до початкової форми.

Основна формула

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.9)$$

де:

- σ - нормальне напруження;
- F - сила ;
- A - площа поперечного перерізу.

📋 В більшості довідників, коли вказують границю текучості, то мають на увазі границю текучості при розтягу, але потрібно пам'ятати, що, наприклад, границя текучості на розтяг і стиск може суттєво відрізнятися.

Для **границі текучості** в стандартах зазвичай використовують не σ з індексом, а саме літерні позначення R , бо границя текучості це **стандартизована характеристика матеріалу**, отримана під час випробування. Тому для неї прийнято окремі позначення R_{eH} (верхня границя текучості), R_{eL} (нижня границя текучості) та $R_{p0.2}$ (умовна границя текучості при залишковій деформації 0.2%)

Верхня границя текучості R_{eH} - це найбільше напруження, яке досягається в момент початку текучості, коли пластична деформація тільки починається (див. рис.2).

Нижня границя текучості R_{eL} - це найменше напруження в області текучості, не враховуючи короткочасних перехідних ефектів (див. рис.2).

Умовна границя текучості при залишковій деформації 0.2% $R_{p0.2}$ напруження, при якому після розвантаження в матеріалі залишається 0,2% деформації (зрозуміло, що мова про залишкову пластичну деформацію). Тобто число 0.2% - це не "випадкове число", а **нормоване зміщення по деформації**, яке дозволяє формально знайти границю текучості там, де явної площадки немає.

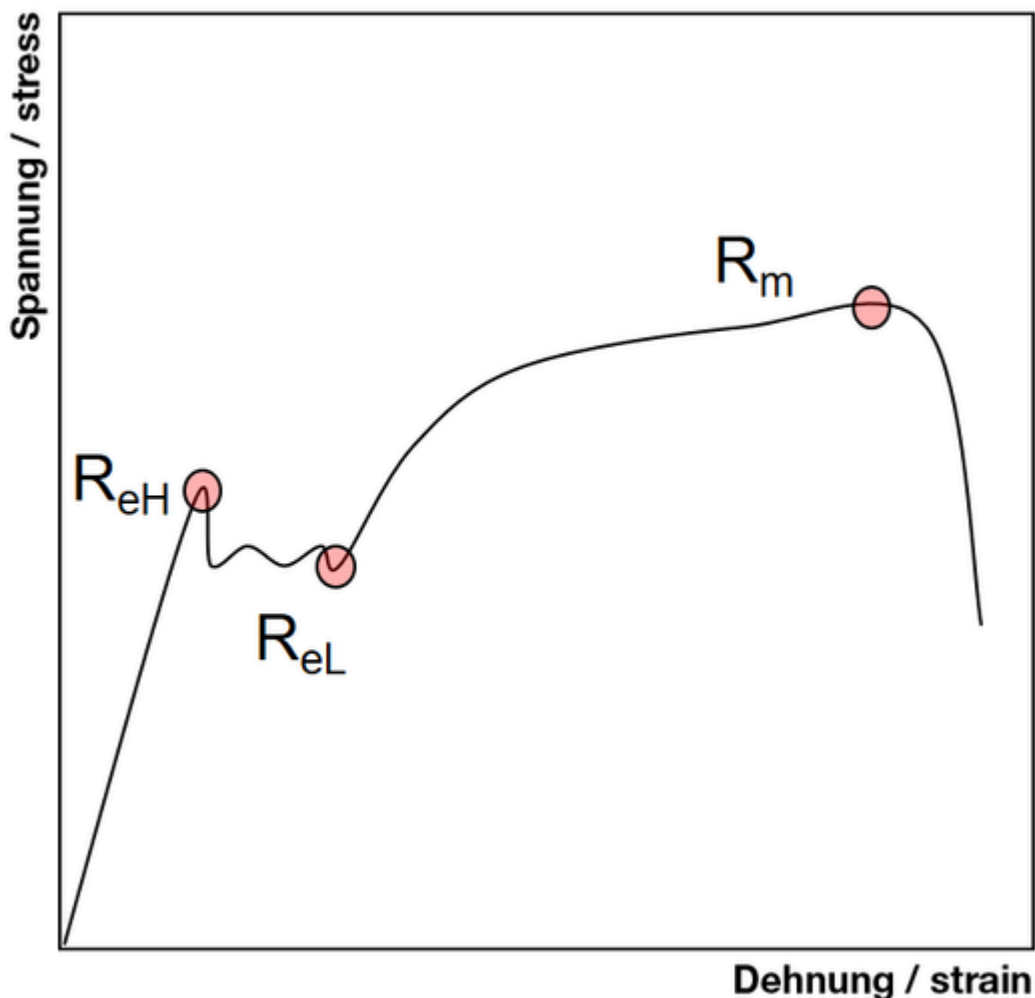


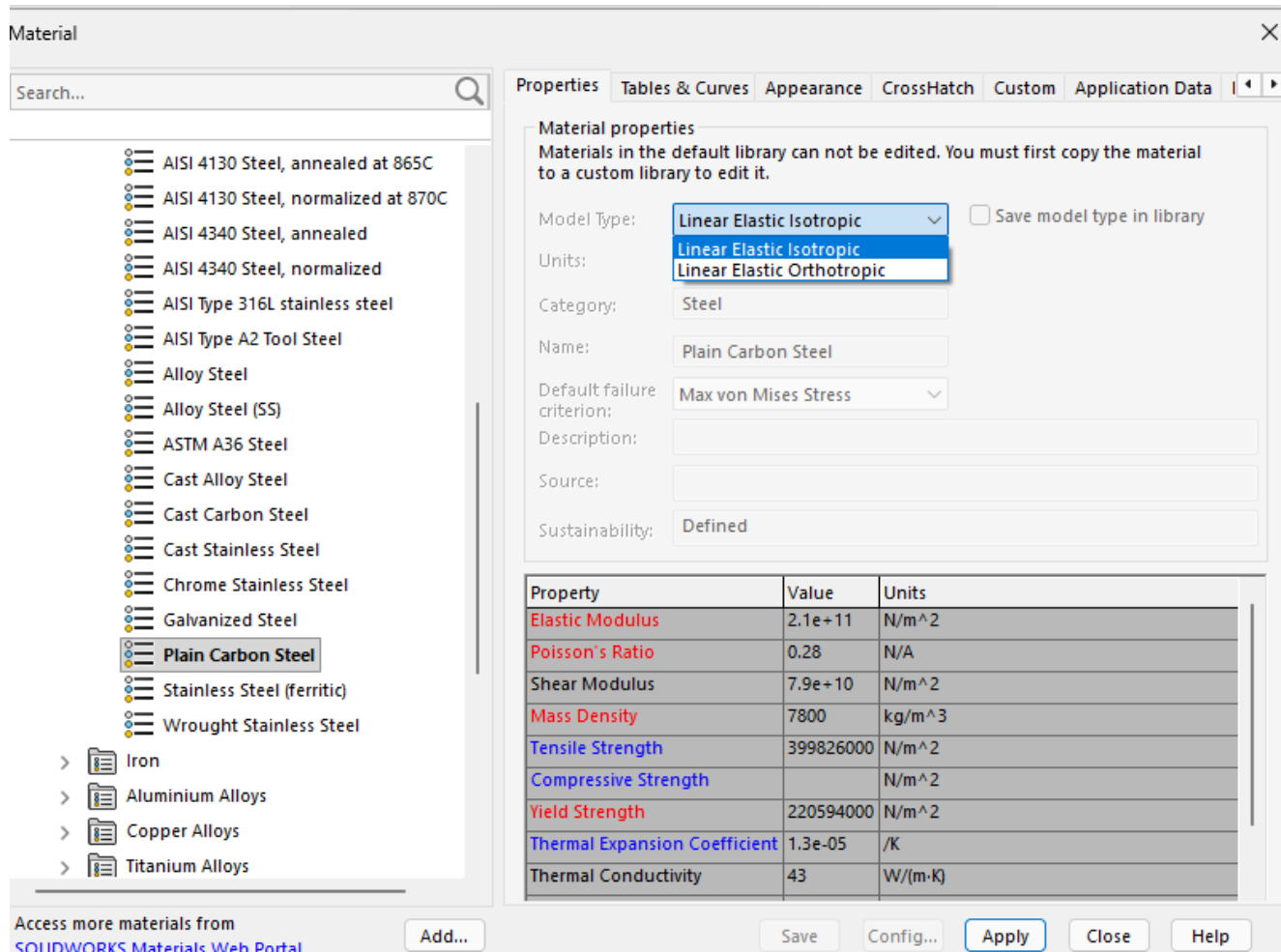
Рис.2. Границя текучості на кривій напруження-деформації [4]

Детальніше про інші властивості матеріалів можна дізнатися в джерелі [1-4]

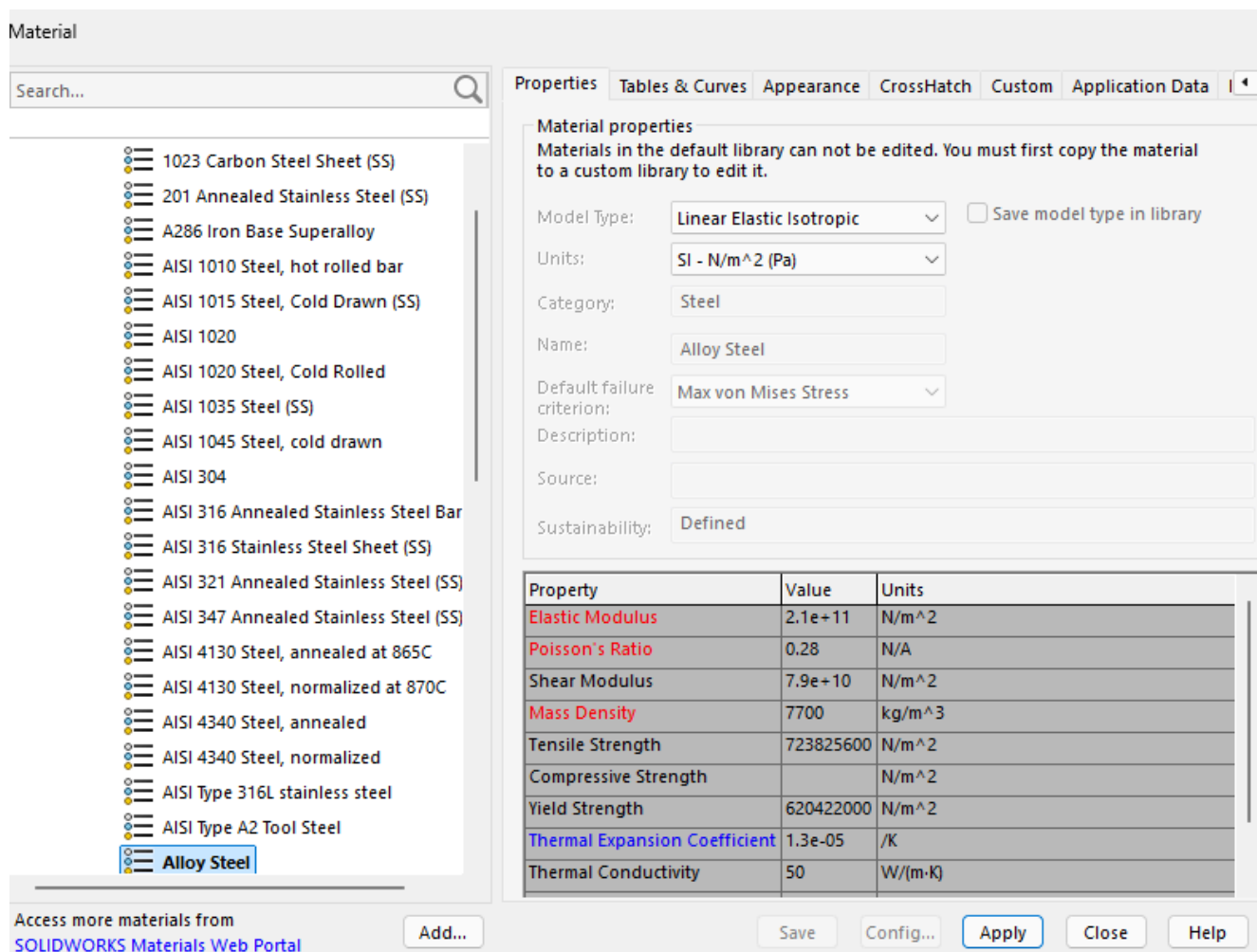
Властивості матеріалів, що необхідні для розрахунків в Simulation

Матеріальні властивості, необхідні для розрахунку в Simulation, залежать від типу розрахунку [5]. Їх можна поділити на дві категорії:

- **необхідні для обчислення відгуку** - позначені червоним кольором (див. рис.3);
- **необхідні для інтерпретації відгуку** - позначені синім кольором (див. рис.3);
- **не обов'язкові для даного типу розрахунку** - позначені чорним кольором (див. рис.3)



a



б

Рис.3. Порівняння категорій властивостей для: а - лінійної статистики; б - частотного дослідження.

Розділ 2. Матеріал у нелінійному статичному дослідженні

Властивості матеріалів в Simulation для нелінійної постановки дослідження [1-5]

Крива напруження-деформації (Stress-Strain Curve)

У випадку застосування нелінійного статичного дослідження (наприклад, бо в дослідженні має місце пластична деформація) інколи потрібно додавати до властивостей матеріалів криву напруження-деформації. Для низки матеріалів, що представлені в базі **SOLIDWORKS**, така крива вже є такі матеріали мають позначення **(SS)** після назви матеріалу (див. рис.4).

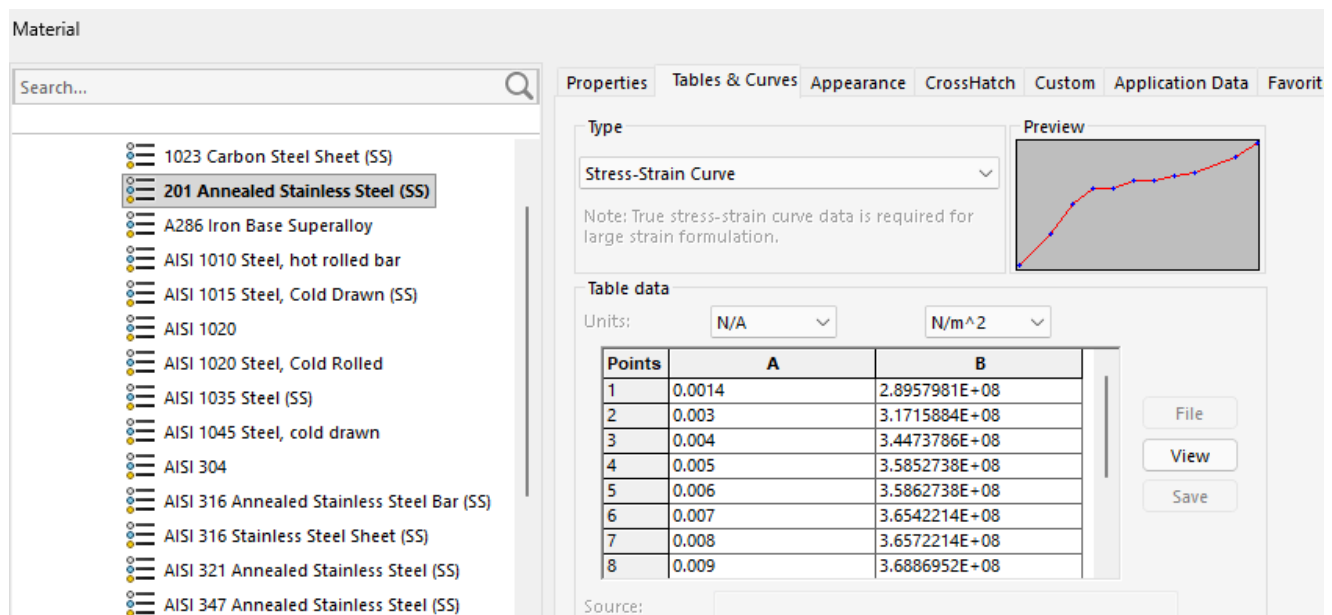


Рис. 5. Крива напруження-деформації (Stress-Strain Curve)

Але в низці випадків потрібно додавати при додаванні нового матеріалу в базу матеріалів **SOLIDWORKS** потрібно вводити лише інформацію **після межі текучості**, оскільки ділянка кривої **до межі текучості** вважається ідеально лінійною та ідеально пружною (тобто прямою лінією з нахилом, що дорівнює **модулю Юнга**). Тому перша комірка в таблиці завжди повинна відповідати **напруженню текучості** матеріалу (саме через це попередній перегляд кривої може виглядати інакше, ніж у вашому джерелі).

Доступні моделі механіки матеріалів в SOLIDWORKS Simulation

У **SOLIDWORKS Simulation** модель матеріалу задає зв'язок між напруженням і деформацією, а набір доступних моделей залежить від типу дослідження. Для простих задач зазвичай достатньо лінійно-пружної моделі (**linear elastic**), але коли, наприклад, є пластичні деформації, залежність деформацій від часу - потрібно переходити до нелінійних моделей, бо припущення лінійності вже не виконуються.

Лінійно-пружна модель (Linear Elastic Isotropic) [6]

Найпростіша й найуживаніша модель. Вона припускає, що матеріал має однакові властивості в усіх напрямках, а деформації малі й повністю зворотні після зняття навантаження. Типові параметри: модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, густина, межа текучості та міцності для перевірок. Це базовий вибір для сталей та більшості "звичайних" інженерних задач, де напруження не перевищують межу текучості. Лінійно-пружна модель передбачає, що матеріал працює в пружній області - закон Гука виконується.

Лінійно-пружна ортотропна модель (Linear Elastic Orthotropic Model) [7]

Ця модель потрібна для матеріалів, властивості яких різні вздовж трьох головних напрямків. У SOLIDWORKS вона призначена для деревини, шаруватих плит, прокатних або композитних матеріалів, де важливо правильно задати локальні осі матеріалу. Ортотропна модель має дев'ять незалежних пружних констант, тому вона значно точніша за ізотропну, якщо матеріал "напрявлений".

↪ якщо орієнтація матеріалу впливає на результат, ізотропна модель уже недостатня

Нелінійно-пружна модель (Nonlinear Elastic Model)

У цій моделі зв'язок σ - ϵ уже не є прямою лінією, але матеріал усе ще вважається **пружним**, тобто після розвантаження повертається до початкового стану без залишкової пластичної деформації. У SOLIDWORKS для неї треба задавати криву напруження-деформації (Stress-Strain Curve). Така модель корисна для матеріалів, у яких жорсткість змінюється зі зростанням деформації, але незворотних деформацій ще немає.

Довідка SOLIDWORKS дає наступну Stress-Strain Curve для цієї моделі механіки матеріалу (див. рис.6)

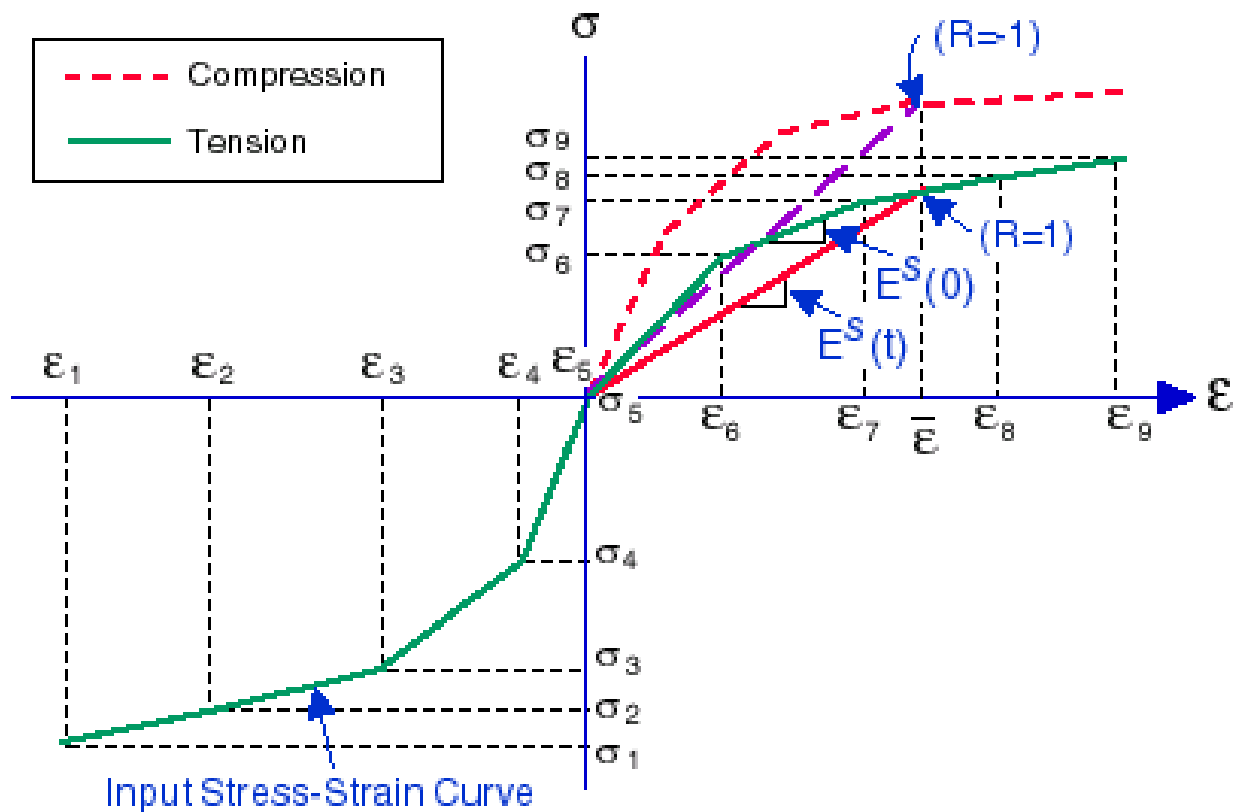


Рис.6. Типова крива напруження-деформації для нелінійно-пружної моделі механіки матеріалу [8]

Всі доступні в **SOLIDWORKS Simulation** моделі механіки матеріалів показані на рис. 7

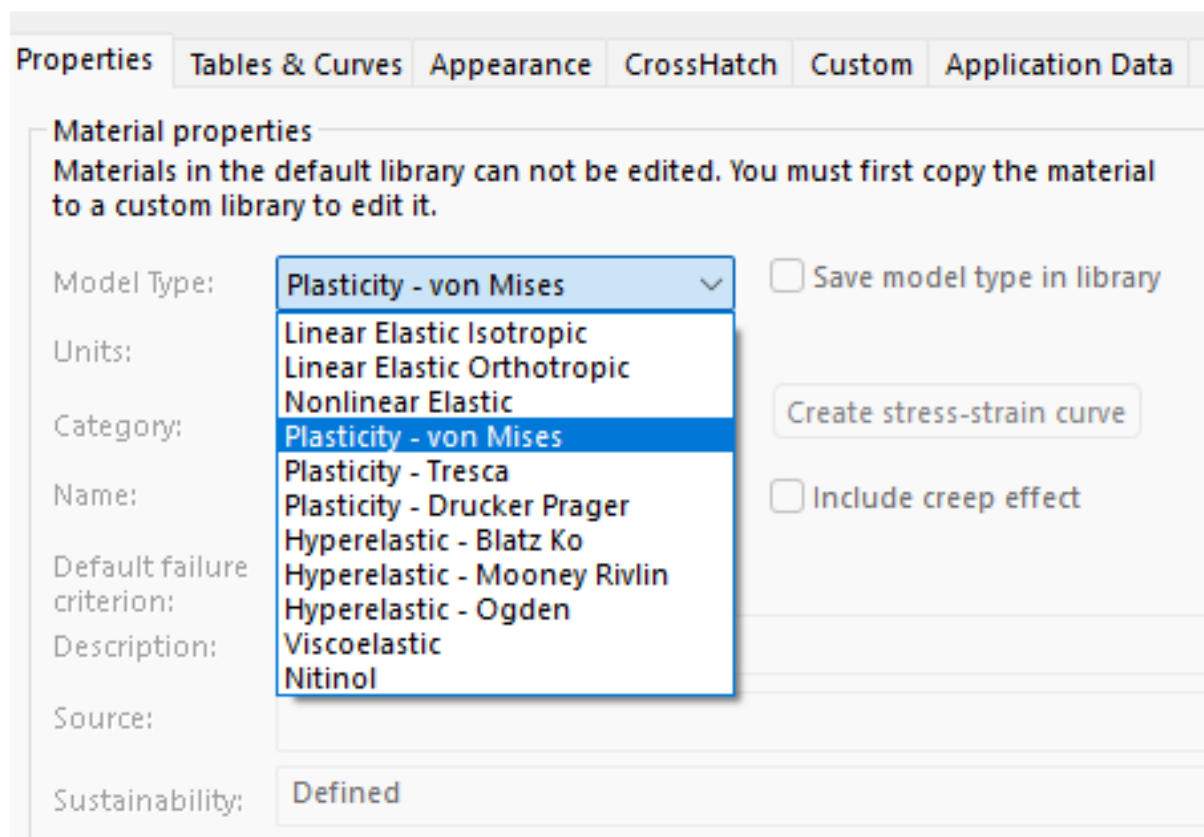


Рис.7. Моделі механіки матеріалів в **SOLIDWORKS Simulation** (їх кількість залежить від типу дослідження)

Детальніше з всіма доступними в **SOLIDWORKS Simulation** моделями механіки матеріалів можна ознайомитися за наступним посиланням [\[6-1\]](#).

Короткий опис підходів до вибору моделі механіки матеріалів

- **Лінійно-пружна ізотропна** - для “звичайних” металів і пластиків, коли **деформації малі**, матеріал після розвантаження **повністю відновлюється** (деформація пружна, пластики немає).
- **Лінійно-пружна ортотропна** - коли властивості різні по напрямках: композити, дерево, прокат, шаруваті матеріали.
- **Нелінійно-пружна** - коли тіло (деталь, збірка) після зняття навантаження повертається назад, але крива σ – ϵ нелінійна; тобто незворотної деформації ще немає.
- **Пластичність (von Mises / Tresca)** - коли після певного рівня напружень з’являється залишкова деформація. Для звичайних металів найчастіше беруть von Mises; Tresca - якщо хочеш більш консервативну оцінку початку текучості.
- **Drucker–Prager / Mohr–Coulomb** - не для сталі, а для матеріалів типу ґрунт, бетон, крихкі сипкі середовища, де важливий вплив тиску.
- **Гіперпружна** - для гуми, еластомерів, силікону, коли ϵ дуже великі, але переважно зворотні деформації.
- **В’язкопружна** - коли відповідь залежить від часу: повільне “сповзання”, релаксація, полімери.
- **Повзучість (creep)** - коли деталь довго стоїть під навантаженням, часто при підвищеній температурі, і деформація росте з часом.

Список використаних джерел інформації

1. **Material Properties in Simulation.** SOLIDWORKS Web Help. URL: https://help.solidworks.com/2025/english/SolidWorks/cworks/r_Material_Properties.htm
2. **20 questions about structural stiffness // SSAB** : вебсайт. URL: <https://www.ssab.com/en-ca/support/how-to-design/general-design/20-questions-about-structural-stiffness>
3. Lakes R. S. **Poisson's ratio range in linear isotropic classical elasticity** [Electronic resource] / R. S. Lakes. – Access mode: <https://lakeslab.ep.wisc.edu/PoissonElas.html>
4. **Yield strength Re and offset yield Rp 0.2** [Електронний ресурс] // **ZwickRoell**. URL: <https://www.zwickroell.com/industries/materials-testing/tensile-test/yield-point/>
5. **SOLIDWORKS Simulation Step-Up Series: Material Properties** [Відео] // **YouTube**. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=10mtuPkiReM>
6. **SOLIDWORKS Help. Material Models** [Електронний ресурс]. **2021**. Режим доступу: https://help.solidworks.com/2021/english/solidworks/cworks/c_Material_Models.htm

7. **SOLIDWORKS Help. Linear Elastic Orthotropic** [Електронний ресурс]. **2021**. Режим доступу:
https://help.solidworks.com/2021/english/solidworks/cworks/c_Linear_Elastic_Orthotropic.htm ↩
8. **Nonlinear Elastic Model // SOLIDWORKS Help. 2021. URL:**
https://help.solidworks.com/2021/english/SolidWorks/cworks/c_Nonlinear_Elastic_Model.htm ↩