

Лекція 2. Елементи теорії FEM

Методичні засади лекції 2

📌 Під час підготовки лекції використовувались інструменти штучного інтелекту для допомоги у формулюванні та структуризації матеріалу. Весь зміст був перевірений та відредагований автором лекції.

Елементи теорії методу скінченних елементів

В FEA можуть бути застосовані анізотропі та ізотропні матеріали.

[1] The FEM provides a standard process for converting governing energy principles or governing differential equations into a system of matrix equations to be solved for an approximate solution

[Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks, сторінка 11](#)

Що це означає? Це означає, що опис, наприклад, механічної задачі можна описати:

- диференційними рівняннями
 - енергетичними принципами
- Але в кінці приходять завжди до

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

де:

- **K** — глобальна матриця жорсткості (симетрична, розріджена),
- **u** — вектор невідомих вузлових переміщень (або температур, потенціалів тощо),
- **F** — вектор еквівалентних вузлових сил (або теплових потоків).

Розглянемо детальніше як це працює на прикладі 1D задачі (осьове навантаження стрижня)

1. Диференційна форма рівняння рівноваги стрижня

Для прикладу візьмемо **рівняння рівноваги** (це диференційне рівняння - в даному контексті його ще називають **сильною формою**) для **поздовжньо навантаженого стрижня** вздовж осі x .

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + f = 0 \quad (2.1)$$

де:

- **x** — Координата вздовж осі стрижня
- **u(x)** — Поздовжнє переміщення точки стрижня, що спочатку була в положенні x
- **EA** — Це **осьова жорсткість**
- **du/dx** — Це **похідна переміщення по координаті**.

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (2.2)$$

Це деформація (безрозмірна величина)

$EA \frac{du}{dx}$ - це внутрішня поздовжня сила

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (2.3)$$

A сила це напруження x площа, тобто

$$N = \sigma A = EA \frac{du}{dx} \quad (2.4)$$

2. Інтегральна форма рівняння рівноваги стрижня

Але FEM не виконує розрахунок вищезазначеного диф. рівняння 1.1. та не обчислює його в точці, тому береться тестова функція $v(x)$ (віртуальне переміщення), на яку множиться рівняння 1.1., та інтегрується по області (наприклад, на відрізку його довжини від 0 до L), як записано нижче

$$\int_0^L v \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + f \right] dx = 0 \quad (2.5)$$

Після цього виконується інтегрування частинами - переносимо похідну з **u** на **v**

$$\int_0^L v \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx = \left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx \quad (2.6)$$

Підставляємо назад у слабку форму

$$- \int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + \left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L + \int_0^L v f dx = 0 \quad (2.7)$$

Після перетворень отримаємо

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L v f dx + \left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L \quad (2.8)$$

Суть правого члена рівняння

$$\left[v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L \quad (2.9)$$

Даний член (1.9) “підхоплює” **задані на кінцях сили** (Neumann BC).

Якщо на кінці задана сила $\bar{N}$, то в правій частині з’явиться внесок $v \bar{N}$. Тобто, даний член перетворюється на граничні сили (сили на границях)

3. Розбиття на елементи і апроксимація поля

До прикладу візьмемо стержень та поділимо стержень на елементи. Розглянемо один **2-вузловий лінійний елемент** з вузлами 1 і 2, координати x_1, x_2 довжина $L_e = x_2 - x_1$

Апроксимація переміщення (shape functions)

$$u^e(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \quad (2.10)$$

У матричному вигляді:

$$u^e(x) = [N] \{u_e\}, \quad [N] = [N_1 \quad N_2], \quad \{u_e\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Для лінійного елемента:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{L_e}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{L_e} \quad (2.12)$$

4. Деформація та матриця B

Для осьової задачі:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.13)$$

Похідна апроксимації:

$$\frac{du^e}{dx} = \frac{d}{dx} ([N] \{u_e\}) = [B] \{u_e\} \quad (2.14)$$

де:

$$[B] = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \quad (2.15)$$

Для лінійного елемента похідні сталі:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{L_e}, \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{L_e} \quad (2.16)$$

Отже:

$$[B] = \left[-\frac{1}{L_e} \quad \frac{1}{L_e} \right] \quad (2.17)$$

5. Підстановка у слабку форму → елементні матриці

На рівні одного елемента слабка форма (без зайвих знаків) має вигляд:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} v f dx + (\text{внески граничних сил на кінцях елемента}) \quad (2.18)$$

Ідентифікація Galerkin

- u апроксимується через N
- v апроксимується тими ж функціями N

$$v^e(x) = [N]\{\delta u_e\} \quad (2.18)$$

де $\{\delta u_e\}$ — довільні віртуальні (варіаційні) вузлові переміщення.

Тоді:

$$\frac{dv^e}{dx} = [B]\{\delta u_e\}, \quad \frac{du^e}{dx} = [B]\{u_e\}$$

Ліва частина (жорсткість)

$$\int_{x_1}^{x_2} ([B]\{\delta u_e\}) EA ([B]\{u_e\}) dx = \{\delta u_e\}^T \left(\int_{x_1}^{x_2} [B]^T EA [B] dx \right) \{u_e\} \quad (2.19)$$

Отже **елементна матриця жорсткості**:

$$[k_e] = \int_{x_1}^{x_2} [B]^T EA [B] dx \quad (2.20)$$

Права частина (еквівалентні вузлові сили від розподіленого f)

$$\int_{x_1}^{x_2} v f dx = \int_{x_1}^{x_2} [N]\{\delta u_e\} f dx = \{\delta u_e\}^T \left(\int_{x_1}^{x_2} [N]^T f dx \right) \quad (2.21)$$

Тобто:

$$\{f_e\} = \int_{x_1}^{x_2} [N]^T f dx + \{f_e^{(boundary)}\} \quad (2.22)$$

І тепер, оскільки $\{\delta u_e\}$ довільний, маємо елементне рівняння:

$$[k_e]\{u_e\} = \{f_e\}$$

6. Обчислимо $[k_e]$ для лінійного стрижневого елемента

Маємо:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Тоді:

$$[B]^T[B] = \frac{1}{L_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Якщо ЕЕЕ і ААА сталі в елементі, то:

$$[k_e] = EA \int_{x_1}^{x_2} [B]^T[B] dx \quad (2.25)$$

А $[B]^T[B]$ — стала матриця, тому інтеграл просто множення на L_e :

$$[k_e] = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Це класична жорсткість 2-вузлового стрижневого елемента.

7. Обчислимо $\{f_e\}$ для рівномірного $f = const$

Для лінійних N_1, N_2 :

$$\{f_e\} = f \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} N_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} N_2 dx \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Відомо, що для лінійних функцій форми:

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} N_2 dx = \frac{L_e}{2} \quad (2.28)$$

Отже:

$$\{f_e\} = f \frac{L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Це означає: рівномірне навантаження f по елементу еквівалентне **двом рівним вузловим силам** $fL_e/2$.

8. Збірка (assembly) у глобальну систему

Кожен елемент має локальні $DOF\{ue\} = [u_i, u_j]^T$.

У глобальному векторі $\{u\}$ ці компоненти сидять на позиціях i, j .

Як “складаються” матриці

Елемент дає внесок:

$$[k_e] = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

У глобальній матриці $[K]$ цей блок додається в рядки/стовпці (i, j) :

$$K_{ii} += k_{11}$$

$$K_{ij} += k_{12}$$

$$K_{ji} += k_{21}$$

$$K_{jj} += k_{22}$$

Те саме для $\{F\}$: отримує додавання $\{f_e\}$ у компоненти i, j .

Після проходку по всіх елементах:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.31)$$

9. Граничні умови

Без граничних умов отримати розв'язок системи не можна

9.1. Задані переміщення (Dirichlet)

Напр., закріплення: $u(0) = 0$.

Тоді відповідний ступінь вільності фіксується, і система редукується (або модифікується методом штрафу/елімінації).

9.2. Задані сили (Neumann)

Напр., на кінці прикладено P .

Тоді в $\{F\}$ додається P у відповідний вузол.

10) Після розв'язання що ми реально отримали

Розв'язавши $[K]\{u\} = \{F\}$, ми знаходимо вузлові переміщення u_i .

Далі по елементах:

- деформація:

$$\varepsilon = [B]\{u_e\},$$

напруження:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

внутрішня сила:

$$N = A\sigma = EA\epsilon$$

Список використаних джерел інформації

1. **Akin J. Ed.** Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks. – New Jersey : World Scientific, 2009. – 313 p. [↩](#)