

Лабораторна робота №2

Дисперсія у лініях передачі

Мета роботи:

1. Практичне ознайомлення з дисперсією Н-хвиль у прямокутних хвилеводах без заповнення та у частково заповнених прямокутних хвилеводах.

2. Удосконалення навичок роботи з вимірювальною лінією.

1 Короткі теоретичні відомості

1.1.1. Головна задача теорії хвилеводів – визначення складових поля \vec{E}, \vec{H} у кожній точці хвилеводу. Для спрощення розв'язання вважається, що провідність стінок – ідеальна ($\sigma \rightarrow \infty$), а діелектрик, що заповнює хвилевід – безвтратний. Якщо поле змінюється за гармонічним законом, то потрібно розв'язати хвильові рівняння у формі

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E} + \chi^2 \dot{E} = 0, \nabla_{\perp}^2 \dot{H} + \chi^2 \dot{H} = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язок визначить шість координатних складових електричного та магнітного полів. Проте, виявляється, що достатньо розв'язати рівняння лише для поздовжніх складових електричної та магнітної напруженостей \dot{E}_z і \dot{H}_z . Поперечні складові поля \dot{E}_{\perp} і \dot{H}_{\perp} при цьому однозначно визначаються через ці поздовжні складові.

Розв'язок хвильового рівняння з урахуванням граничних умов на стінках ідеального прямокутного металевого хвилеводу виглядає для *E-хвиль* так:

$$\dot{E}_m = \dot{E}_0 \left[\vec{z}_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y - i \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_x \cos \chi_x x \sin \chi_y y + \vec{y}_0 \chi_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y) \right] e^{-i\gamma z},$$

$$\dot{H}_m = \frac{1}{W^E} i \dot{E}_0 \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y - \vec{y}_0 \chi_x \cos \chi_x x \sin \chi_y y) e^{-i\gamma z};$$

для Н-хвиль:

$$\dot{E}_m = W^H i \dot{H}_0 (\vec{x}_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y - \vec{y}_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y) e^{-i\gamma z},$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \dot{H}_0 \left[\vec{z}_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y + i \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y + \vec{y}_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y) \right] e^{-i\gamma z},$$

$$\text{де } \chi_x = m\pi/a, \chi_y = n\pi/b, \chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2,$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$W^E = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{W}{k} \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$W^H = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\gamma} = Wk / \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$W = 120\pi \sqrt{\mu/\varepsilon} \cdot \dot{E}_0$ і \dot{H}_0 визначаються потужністю генератора.

Поки частота більша за критичну ($f > f_{cr}$) і втратами діелектрика можна нехтувати, стала поширення γ є величиною дійсною. Якщо $f < f_{cr}$, чи за наявності втрат у діелектрику стала поширення стає величиною комплексною $\gamma = \beta - i\alpha$, де β – коефіцієнт фази, α – стала затухання.

При $\alpha = 0$ нескладно виразити фазову швидкість v_ϕ та довжину хвилі у хвилеводі Λ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}, \quad (2.2)$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}, \quad (2.3)$$

де $\lambda = 2\pi/k$ – довжина TEM-хвилі у даному середовищі.

Групова швидкість при цьому

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{v_\phi} \frac{1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}}{1 - \frac{\chi}{k} \frac{d\chi}{dk}}, \quad (2.4)$$

де $v_{\epsilon\mu} = c/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$ – швидкість TEM-хвилі у даному середовищі.

З виразів (2.2) – (2.4) випливає, що **фазова і групова швидкості електромагнітної хвилі у хвилеводі залежать від частоти. Цю властивість називають дисперсією.** З цих виразів також випливає, що дисперсія у хвилеводі спостерігається, якщо показник заломлення середовища n , яке заповнює хвилевід, залежить від частоти і (або) критичне хвильове число є ненульовим. У НВЧ-діапазоні оптична щільність більшості діелектриків від частоти практично не залежить, тому дисперсія обумовлена, зазвичай, другою причиною. У подальшому показник заломлення вважатиметься постійним.

З рівнянь (2.1) також випливає, що $\chi \neq 0$, якщо функції \dot{E} чи \dot{H} непостійні, тобто коли хвиля у хвилеводі неоднорідна. Ця неоднорідність розподілу поля у поперечному перерізі виникає внаслідок поперечної неоднорідності середовища, яким заповнено хвилевід.

У дисперсній системі частотні складові поширюються з різними швидкостями і зазнають різного загасання. Внаслідок цього порушуються амплітудно-фазові співвідношення у спектрі сигналу, і на його форма на кінці хвилеводу може значно відрізнятись від вихідної.

1.1.2. На практиці доводиться мати справу з такими частинними випадками:

1) $\chi = 0$. Це означає, що $v_{\phi} = v_{gp} = v_{\epsilon\mu}$, тобто фазова швидкість дорівнює груповій і дорівнює швидкості світла в середовищі, яким заповнено хвилевід. Дисперсія у даному випадку відсутня.

2) $\chi^2 = const > 0$. Тоді, оскільки $\frac{d\chi}{dk} = 0$, і

$$v_{\phi} = \frac{v_{\epsilon\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}} = \frac{v_{\epsilon\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}, \quad (2.5)$$

$$v_{gp} = v_{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2} = v_{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}, \quad (2.6)$$

$$v_{\phi} v_{gp} = v_{\epsilon\mu}^2.$$

Залежності фазової та групової швидкостей від частоти, побудовані за (2.5) і (2.6), показано на рисунку 2.1.

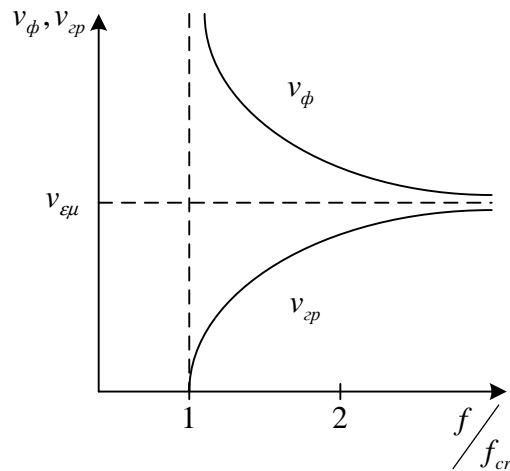


Рисунок 2.1 – Залежності фазової та групової швидкостей від частоти при $\chi^2 = const > 0$

Як бачимо, на високих частотах v_ϕ і v_{gp} близькі до швидкості світла у середовищі, яким заповнено хвилевід. При зменшенні частоти фазова швидкість хвилі в хвилеводі збільшується, а групова – зменшується, прямуючи відповідно до нескінченності та нуля по мірі наближення частоти до критичної.

Якщо частота менша за критичну ($k < \chi$), то стала поширення стає уявною величиною:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \pm i\chi \sqrt{1 - \left(\frac{k}{\chi}\right)^2}. \quad (2.7)$$

У цьому випадку у хвилеводі існують не хвилі, а коливання, фаза яких залишається постійною, а амплітуда експоненційно зменшується при збільшенні координати z . Таким чином, при $f < f_{cr}$ ($\lambda > \lambda_{cr}$) електромагнітні хвилі в хвилеводі поширюватись не можуть. Це явище називається відсіканням. Режим роботи хвилеводу при $f < f_{cr}$ називають *поза межним*. Як випливає з (2.7), при $f \ll f_{cr}$ стала затухання в хвилеводі близька до χ і практично не залежить від частоти, що використовують при конструюванні каліброваних атенюаторів.

3) $\chi^2 < 0$. В цьому випадку поперечне хвильове число – величина уявна: $\chi = i\tau$, де $\tau = \sqrt{|\chi^2|}$. Вирази (2.2), (2.4) при цьому набувають вигляду

$$v_\phi = \frac{v_{\epsilon\mu}}{\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{k^2}}},$$

$$v_{gp} = \frac{v_{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{k^2}}}{1 + \frac{\tau}{k} \frac{d\tau}{dk}}. \quad (2.8)$$

Оскільки групова швидкість не може бути більшою за швидкість світла, поперечне хвильове число має бути достатньо швидкозростаючою функцією частоти ($\frac{d\tau}{dk} > \frac{k}{\tau} \left(\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{k^2}} - 1 \right)$). При цьому $v_\phi v_{gp} \neq v_{\epsilon\mu}^2$.

Фазова швидкість в цьому випадку менша за швидкість світла в середовищі, яким заповнено хвилевід, що характерно для повільних хвиль. Якщо, наприклад, χ змінюється пропорційно частоті $\chi = ak$, то з (2.8) випливає, що $v_\phi = v_{gp} = v_{\epsilon\mu} / \sqrt{1 + a^2}$, тобто повільні хвилі поширюються без дисперсії.

Цифрами 1, 2 та 3 на рисунку 2.2 позначено дисперсійні характеристики, які відповідають розглянутим випадкам. Зауважимо, що в хвилеводі з повільними хвилями може спостерігатись явище відсікання (крива 3а). При цьому у міру збільшення частоти швидка хвиля перетворюється на повільну.

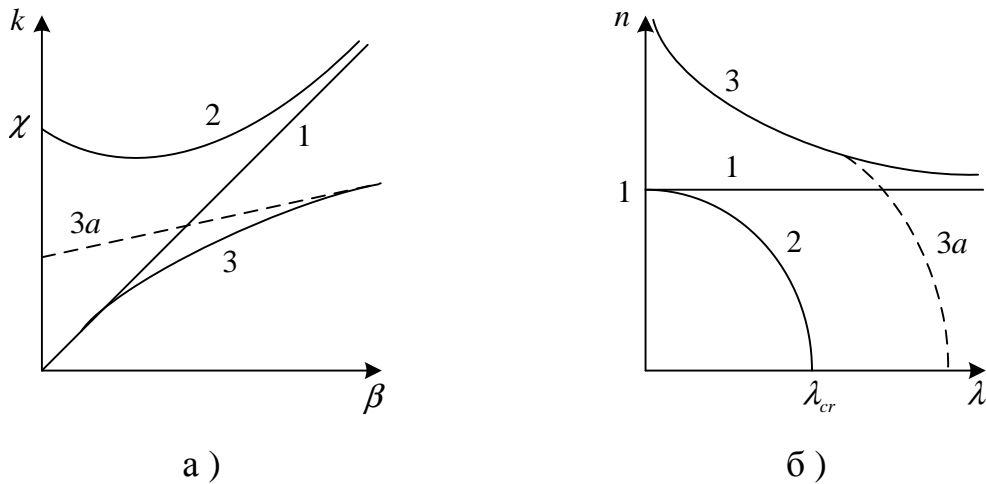


Рисунок 2.2 – Дисперсійні характеристики хвилеводу за різних значень χ : у координатах k, β (а); у координатах n, λ (б)

1.1.3. Для аналізу дисперсійних характеристик частково-заповнених хвилеводів (ЧЗХ), як різновиду поперечно-неоднорідних хвилеводів, використовують різні підходи. Типові перерізи таких хвилеводів показано на рисунку 2.3. Один з таких підходів використовується не лише для аналізу закритих хвилеводів, але й інтегральних ліній передач. В його рамках використовується поняття ефективної діелектричної проникності ϵ_{eff} , тобто реальне неоднорідне поперечне заповнення замінюють на однорідне шляхом введення гіпотетичного діелектрика, який повністю заповнює хвилевід по поперечному перерізу і має проникність ϵ_{eff} . Ефективна діелектрична проникність залежить від структури електромагнітного поля у хвилеводі, положення та проникності діелектрика, і може бути описана через власні поперечні векторні функції порожнього хвилеводу.

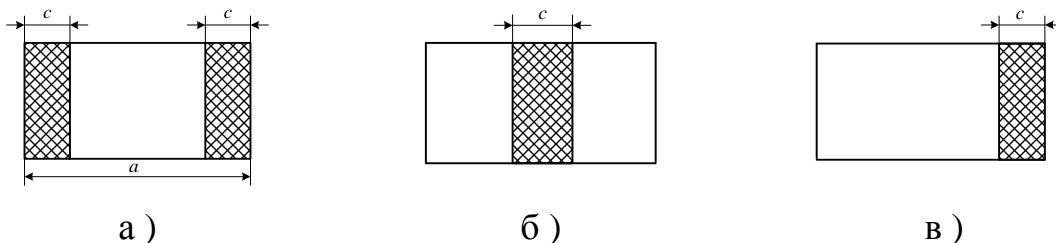


Рисунок 3.3 – Частково заповнені хвилеводи: модифікація 2-1-2 (а); модифікація 1-2-1 (б); модифікація 1-2 (в)

При малих втратах у хвилеводі $\gamma \approx \beta$ і має місце рівність

$$\beta = \sqrt{k^2 \varepsilon_{eff} - \chi^2} = k \sqrt{\varepsilon_{eff} - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2} = km, \quad (2.9)$$

де $m = \sqrt{\varepsilon_{eff} - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2}$ – коефіцієнт сповільнення.

Для ЧЗХ з однією діелектричною пластиною (рисунок 2.4):

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(1 - \cos \frac{\pi(2x_1 + c)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi c}{a}\right) \frac{c}{a} \frac{d}{b}. \quad (2.10)$$

Якщо хвилевід заповнено повітрям $\varepsilon_1 = 1$, а діелектрик має проникність $\varepsilon_2 = \varepsilon$, то:

$$\varepsilon_{eff} = 1 + (\varepsilon - 1) \left(1 - \cos \frac{\pi(2x_1 + c)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi c}{a}\right) \frac{c}{a} \frac{d}{b}, \quad (2.11)$$

де $\text{sinc} \xi = \frac{\sin \xi}{\xi}$.

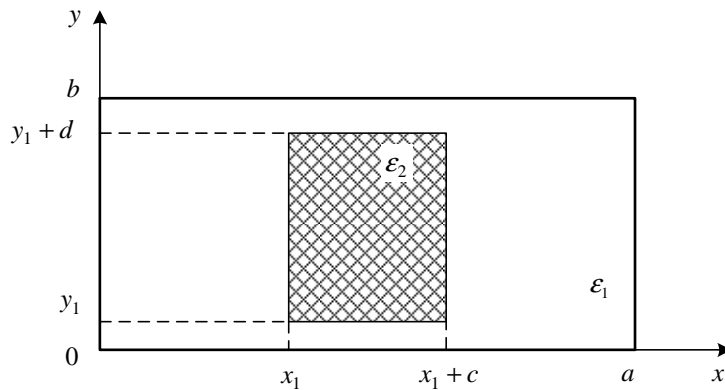


Рисунок 3.4 – Частково заповнений хвилевід з однією діелектричною пластиною

При цьому зручно використовувати множник заповнення:

$$\begin{aligned} \eta &= \left(1 - \cos \frac{\pi(2x_1 + c)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi c}{a}\right) \frac{c}{a} \frac{d}{b} = \\ &= \left(1 - \cos \frac{\pi(2x_1 + c)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi c}{a}\right) t_x t_y, \end{aligned} \quad (2.12)$$

де $t_x = \frac{c}{a}$, $t_y = \frac{d}{b}$.

З його урахуванням вираз (3.11) набуде вигляду

$$\varepsilon_{eff} = 1 + (\varepsilon - 1)\eta. \quad (2.13)$$

З (2.13) випливає, що для хвилеводу, заповненого повітрям ($t_x = 0, t_y = 0, \varepsilon = 0$) $\eta = 0$ і $\varepsilon_{eff} = 1$, а для хвилеводу, повністю заповненого діелектриком з проникністю ε ($t_x = 1, t_y = 1$) $\eta = 1$ і $\varepsilon_{eff} = \varepsilon$. Для ЧЗХ $0 < \eta < 1$ і $1 < \varepsilon_{eff} < \varepsilon$.

Вираз (2.13) справедливий лише для модифікацій 1-2-1 та 1-2. Для модифікації 2-1-2 такої, коли пластини розташовані на довільній відстані від стінок хвилеводу (рисунок 2.5)

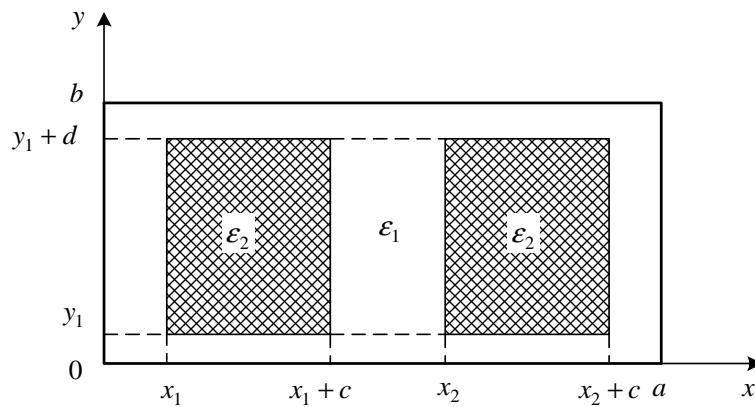


Рисунок 2.5 – Частково заповнений хвилевід з двома діелектричними пластинами

він буде виглядати так:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \times \left(1 - \cos \frac{\pi(x_1 + x_2 + c)}{a} \cdot \cos \frac{\pi(x_1 - x_2)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi t_x}{2} \right) t_x t_y, \quad (2.14)$$

де $t_x = 2 \frac{c}{a}$, $t_y = \frac{d}{b}$.

Множник заповнення при цьому матиме вигляд:

$$\eta = \left(1 - \cos \frac{\pi(x_1 + x_2 + c)}{a} \cdot \cos \frac{\pi(x_1 - x_2)}{a} \cdot \text{sinc} \frac{\pi t_x}{2} \right) t_x t_y. \quad (2.15)$$

З урахуванням (2.15) вираз (2.14) набуде вигляду

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\eta. \quad (2.16)$$

Для частинного випадку $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ з (2.16) маємо

3.2.2 Підготуйте ВЛ до роботи на цій частоті, попередньо приєднавши до її вихідного фланця короткозамикач.

3.2.3 Виміряйте довжину хвилі у лінії. Результат вимірювання занесіть до таблиці.

Примітка: положення вузлів стоячої хвилі обов'язково фіксуйте методом «вилки»!

3.2.4 Виставте на генераторі наступну з заданих частот та повторіть пп. 3.2.2, 3.2.3.

3.3 Повторіть вимірювання по п. 3.2 для частково заповненого прямокутного хвилеводу у тому самому діапазоні частот з тим самим кроком.

4 Оцінка похибок вимірювань

4.1 Похибку вимірювання довжини хвилі у хвилеводі в процентах оцінюють за формулою:

$$\delta \Lambda = \frac{2\Delta l}{\Lambda} \cdot 100,$$

де Δl – похибка вимірювання положення зонда.

4.2 Похибку вимірювання фазової швидкості у процентах оцінюють за формулою:

$$\delta v_{\phi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \Lambda}{\Lambda}\right)^2} \cdot 100,$$

де Δf , $\Delta \Lambda$ – абсолютні похибки вимірювання частоти та довжини хвилі у хвилеводі відповідно.

5 Розрахункове завдання

Розрахуйте фазову швидкість хвилі H_{10} прямокутного хвилеводу без заповнення та з частковим діелектричним заповненням. Як вихідні використайте дані з експерименту.

6 Вимоги до звіту

Звіт з лабораторної роботи повинен містити:

- 1.Коротке описання мети і методики проведення роботи.
- 2.Перелік використаних приладів.

3. Результати вимірювань по пп. 3.2, 3.3 в табличній та графічній формах з обов'язковою оцінкою похибок вимірювань.

4. Розрахункове завдання, у т. ч. з обов'язковою оцінкою похибки вимірювання фазової швидкості.

5. Висновки.

7 Контрольні питання

1. Що таке фазова швидкість хвилі?

2. Який фізичний зміст цієї величини?

3. Що таке дисперсія хвилі?

4. Зобразіть графічно залежність фазової швидкості від частоти для TEM-, H- та E-хвиль.

5. Який вплив дисперсії на передачу сигналів в реальних лініях передачі?

6. Проаналізуйте вираз для фазової швидкості хвилі H_{10} .

7. Як впливає збільшення частоти коливань на дисперсію хвилі H_{10} у випадку порожнього хвилеводу?

8. Як впливає збільшення частоти коливань на дисперсію хвилі H_{10} у випадку хвилеводу з частковим діелектричним заповненням?

9. Який з двох досліджуваних в роботі прямокутних хвилеводів (порожній чи з частковим діелектричним заповненням) має менший діапазон робочих частот? Відповідь обґрунтуйте.

10. Поясніть суть використаного в роботі методу вимірювань. Які джерела його похибок?