

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 01.10.2020 р.
№ 3

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для самостійної роботи з навчальної дисципліни «МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТІВ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «магістр»
спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»
освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні
системи»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
(назва факультету)
кафедра метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
(назва кафедри)

Рекомендовано на засіданні
кафедри метрології та
інформаційно-вимірювальної
техніки
(назва кафедри)
29 серпня 2020р.,
протокол № 5

Розробники: д.т.н., проф., завідувач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки ПОДЧАШИНСЬКИЙ Юрій, асистент кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки ВОРОНОВА Тетяна, старший викладач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки ОМЕЛЬЧУК Ігор

(науковий ступінь, посада, ПРИЗВИЩЕ, власне ім'я)

Житомир
2020

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 2

Методичні рекомендації для самостійної роботи з навчальної дисципліни «Методи планування та обробки результатів експериментів» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «магістр» спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи» / Розробники Подчашинський Ю.О., Воронова Т.С., Омельчук І.А. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2020. – 28 с.

Розробники: Подчашинський Ю.О., Воронова Т.С., Омельчук І.А.

Рецензенти:

к.т.н., доцент, доцент кафедри АтаКІТ ім. проф. Б.Б. Самотокіна
А.А. Гуменюк;

к.т.н., доцент, доцент кафедри АтаКІТ ім. проф. Б.Б. Самотокіна
Ю.О. Шавурський

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 3

ЗМІСТ

1. РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТАМ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	4
2. ОГЛЯД ТЕМ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ	5
3. ОРІЄНТОВНІ ВИМОГИ ДО ПРАКТИЧНИХ НАВИЧОК	6
4. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ	7
5. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ	25
6. ЛІТЕРАТУРА	28

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 4

1. РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТАМ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота студентів (СРС) складається з роботи з літературою (доповнення конспектів лекцій, написання рефератів), роботи на ПК та виконання індивідуального завдання. Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання за погодженням із викладачем. Теми для індивідуальної роботи студентів та їх обсяг визначаються даною програмою.

Особлива увага під час самостійної роботи повинна приділятися набуттю навичок практичної роботи на комп'ютері з різноманітним програмним забезпеченням, насамперед з програмним пакетом MATLAB. Для цього потрібно ознайомитись із основними теоретичними відомостями про програмний продукт за допомогою спеціальної літератури та методичного матеріалу або довідкової системи програми. Після цього можна виконувати конкретні практичні завдання для СРС.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 5

2. ОГЛЯД ТЕМ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Тема 1. Види та методи вимірювань. Основні етапи вимірювальної процедури. Методи статистичної обробки сукупності випадкових величин.

Завдання для самостійної роботи

1.1. Теоретичний курс

Розгляд основних класів точності вимірювань.

Розгляд функціонального зв'язку між похибкою вимірювань і значенням вимірюваної величини.

Вивчення рівномірного закону розподілу, трикутного та арксинусоїдального законів розподілу.

Розгляд методів спрощеного обчислення вибіркового середньоквадратичного відхилення.

1.2. Практичне завдання

Створення власних прикладів даних із заданим законом розподілу похибок для нерівноточних спостережень.

Скласти звіт про роботу.

Рекомендована література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 16

Тема 2. Методи обробки експериментальних даних при прямих, непрямих, сукупних і сумісних вимірюваннях.

Завдання для самостійної роботи

2.1. Теоретичний курс

Вивчення методів виключення результатів з грубими похибками. Критерій Ірвіна. Критерій Романовського. Критерій Діксону. Критерій “3 σ ”, Райта. Критерій Смирнова. Критерій Шовене.

2.2. Практичне завдання

Розробити програму і провести на прикладі перевірку на наявність грубих похибок для контрольної вибірки

Розробити програму і на прикладі провести обчислення лінійної регресії і похибки лінійної регресії між двома вибірками.

Розробити програму і на прикладі провести визначення коефіцієнта кореляції між двома вибірками.

Скласти програму і на прикладі провести перевірку відсутності кореляції між результатами спостережень кожної пари аргументів при непрямих вимірюваннях

Скласти звіт про роботу.

Рекомендована література: 1, 2, 4, 8, 17, 23.

Тема 3. Робастні та непараметричні методи обробки даних.

Завдання для самостійної роботи студента

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 6

3.1. Теоретичний курс

Розглянути критерії знаків і серій.

3.2. Практичне завдання

Розробити програму і на прикладі провести перевірку однорідності двох груп вибірок по критерію знаків.

Розробити програму і на прикладі провести перевірку однорідності двох груп вибірок по критерію серій.

Скласти звіт про роботу.

Рекомендована література: 13, 14, 15, 23, 27

Тема 4. Методи проведення багатофакторного експерименту та його оптимізації.

Завдання для самостійної роботи студента

4.1. Теоретичний курс

Розглянути більш детально метод послідовного сімплекс-планування

4.2. Практичне завдання

Побудувати план другого порядку для прикладу на основі ортогонального центрального симетричного композиційного плану і перевірити значущість коефіцієнтів рівняння регресії

Скласти звіт про роботу.

Рекомендована література: 10, 18, 19, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 7

3. ОРІЄНТОВНІ ВИМОГИ ДО ПРАКТИЧНИХ НАВИЧОК

По закінченню вивчення кожної теми дисципліни одержані знання повинні забезпечити вміння студентів:

Тема 1. Види та методи вимірювання. Основні етапи вимірювальної процедури. Методи статистичної обробки сукупності випадкових величин:

- відрізняти статичні і динамічні вимірювання;
- відрізняти складові похибок вимірювання;
- розраховувати середнє арифметичне вибірки;
- розраховувати середньоквадратичне відхилення для вибірки;
- розраховувати середньоквадратичне відхилення результату;
- розраховувати довірчі межі результату.

Тема 2. Методи обробки експериментальних даних при прямих, непрямих, сукупних і сумісних вимірюваннях:

- застосовувати методи виключення результатів з грубими похибками;
- застосовувати методи виключення систематичних похибок;
- застосовувати спосіб перевірки відповідності досвідченого розподілу нормальному за допомогою «W-критерію».

Тема 3. Робастні та непараметричні методи обробки даних:

- застосовувати робастні методи обробки даних: Віндзора, Хьюбера, Хампеля, Андрюса, Тьюки;
- застосовувати непараметричні методи обробки даних Пірсона;
- застосовувати непараметричні методи обробки даних Колмогорова-Смирнова;
- застосовувати критерії знаків і серій;
- застосовувати рангові критерії Манна-Уїтні-Вілкоксона, Сижела-Тьюки.

Тема 4. Методи проведення багатофакторного експерименту та його оптимізації:

- будувати плани повного факторного експерименту;
- будувати плани дробного факторного експерименту;
- проводити перевірку значущості коефіцієнтів рівняння регресії;
- проводити перевірку адекватності рівняння регресії.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 8

4. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

4.1.1. Основні теоретичні відомості про попередню обробку результатів вимірювань

4.1.1.1. Завдання попередньої обробки експериментальних даних

Загальним завданням попередньої обробки експериментальних даних є виключення спостережень, що містять грубі похибки, а також зменшення впливу систематичної складової похибок вимірювання. При однократному виробничому вимірюванні така попередня обробка ускладнена. Багатократні вимірювання дають деяку сукупність результатів, яка має бути оброблена для отримання найбільш достовірного значення вимірюваної величини і оцінки його точності.

Перш за все, з сукупності експериментальних даних слід виключити результати спостережень, що в явному вигляді містять грубі похибки і тому помітно відрізняються від інших результатів. Якщо повної упевненості в наявності грубої похибки немає, то такий результат слід залишити у вибірці, а потім перевірити правомірність його віднесення до неї (за допомогою відповідних статистичних критеріїв).

4.1.1.2. Методи виключення результатів з грубими похибками

Для виключення грубих похибок застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез. У метрології використовуються статистичні гіпотези, під якими розуміють гіпотези про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілів.

Разом з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. А конкуруючою (альтернативною) називають ту, яка суперечить нульовій.

При висуненні і прийнятті гіпотези можуть мати місце наступні чотири випадки:

- 1) гіпотеза приймається, причому й насправді вона правильна;
- 2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою першого роду, а ймовірність її появи позначають рівнем значущості q ;
- 3) гіпотеза відкидається, причому насправді вона невірна;
- 4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою другого роду, а ймовірність її появи позначають β .
- 5) Величину $1-\beta$, тобто ймовірність, що гіпотеза буде знехтувана, коли вона помилкова, називають потужністю критерію.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 9

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значення критерію, при яких гіпотезу приймають. Критичною називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Область прийняття гіпотези і критична область розділені критичними точками, що дорівнюють табличним значенням критеріїв.

Перевірку статистичної гіпотези проводять для прийнятого рівня значущості q (приймається рівним 0,1; 0,05; 0,01 тощо). Так, прийнятий рівень значущості $q=0,05$ означає, що висунута нульова статистична гіпотеза може бути прийнята з довірчою ймовірністю $p=0,95$. Або є ймовірність відкинути цю гіпотезу (зробити помилку першого роду), що дорівнює $p = 0,95$.

Нульова статистична гіпотеза підтверджує належність "підозрілого" результату вимірювання (спостереження) даній групі вимірювань, що перевіряється. Формальним критерієм аномальності результату спостережень (підставою для ухвалення конкуруючої гіпотези: "підозрілий" результат не належить даній групі вимірювань) при цьому служить межа, що відстоїть від центру розподілу на величину tS , тобто:

$$|x_{in} - \bar{x}| \geq tS, \quad (1.1)$$

де x_{in} – результат спостереження, що перевіряється на наявність грубої похибки; t – коефіцієнт, що залежить від закону розподілу, об'єму вибірки, рівня значущості.

Таким чином, межі похибок залежать від виду розподілу, об'єму вибірки і вибраної довірчої ймовірності.

При обробці вже наявних результатів спостережень довільно відкидати окремі результати не слід, оскільки це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група вимірювань (вибірка) може містити декілька грубих похибок і їх виключення проводять послідовно, тобто поодиночі.

Всі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основні типи:

- а) методи виключення при відомому генеральному СКВ;
- б) методи виключення при невідомому генеральному СКВ.

У першому випадку СКВ обчислюється за результатами всієї вибірки результатів спостережень. Після вилучення грубих похибок обчислення СКВ потрібно повторити

Оскільки на практиці частіше зустрічаються вимірювання при невідомому СКВ (обмежене число спостережень), далі розглянуті такі критерії перевірки "підозрілих" (з точки зору похибок) результатів спостережень: Ірвіна, Романовського, Діксону, Смирнова, Шовене, "3 σ ".

Так як вимоги, що визначають межу, за якою знаходяться "грубі" результати спостережень, для різних критеріїв різні, то перевірку слід виконувати по декількох критеріях (рекомендується використовувати не менше трьох критеріїв з тих, що розглядаються далі). Остаточний висновок про

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 10

приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень слід робити по більшості критеріїв.

4.1.1.3. Критерій Ірвіна

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт по формулі:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{S}, \quad (1.2)$$

де x_{n+1} , x_n – найбільші значення випадкової величини; S – середнє квадратичне відхилення, обчислене по всіх значеннях вибірки. Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ_q , можливі значення якого наведені в табл.1.1

Таблиця 1.1

Число вимірюван ь n	Рівень значущості	
	$q=0,05$	$q=0,01$
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Якщо $\lambda > \lambda_q$, то нульова гіпотеза не підтверджується, тобто результат – помилковий, і він має бути виключений при подальшій обробці результатів спостережень.

4.1.1.4. Критерій Романовського

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок в “підозрілих” результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

$$|x_{\bar{n}} - \bar{x}| \geq t_p S, \quad (1.3)$$

де t_p – квантиль розподілу Стюдента при заданій довірчій ймовірності з числом мір свободи $k = n - k_n$ (k_n – число “підозрілих” результатів спостережень). Значення квантилів для розподілу Стюдента представлені в додатку 1.

Точкові оцінки розподілу $\bar{x}$ і СКВ результатів спостережень обчислюється без урахування k_n “підозрілих” результатів спостережень.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 11

4.1.1.5. Критерій Діксону

Критерій заснований на припущенні, що похибки вимірювань мають нормальний закон розподілу (заздалегідь необхідна побудова гістограми результатів спостережень і перевірка гіпотези про приналежність нормальному закону розподілу). При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксону (спостережуване значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення залежно від числа вимірювань. У табл.1.2 приведені формули коефіцієнтів Діксону. Коефіцієнти r_{10} , r_{11} застосовують, коли є один викид, а r_{21} , r_{22} – коли два викиди. При цьому потрібне первинне впорядкування результатів вимірювань (об'єму вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більш, ніж одну грубу похибку.

Таблиця 1.2

Число вимірювань n (обсяг вибірки)	Коефіцієнт Діксону	Для найменшого експериментального значення параметра	Для найбільшого експериментального значення параметра
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Обчислені для вибірки по формулах значення коефіцієнтів Діксону r порівнюють з табличним значенням коефіцієнтів Діксону r_q (табл. 1.3).

Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність $r < r_q$. Якщо $r > r_q$, то результат визнається грубою похибкою і виключається з подальшої обробки.

Таблиця 1.3

Статистика	Число вимірювань	r_q при рівні значущості q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
r_{01}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
	8	0,479	0,554	0,631	0,683

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 12

r_{11}	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497

4.1.1.6. Критерії «Зс», Райта

Критерій «правило трьох сигм» є одним з простих способів перевірки результатів, що мають нормальний закон розподілу. Суть правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потрійного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомий, але умова, вказана в приведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що ця величина розподілена нормально; інакше вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється $\bar{x}$ і оцінка СКВ результату спостережень.

Результат, який задовольняє умові $x_{in} - \bar{x} \geq 3S$, вважається за той, що має грубу похибку і вилучається, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо залишкова похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою похибкою і має бути виключений при подальшій обробці. Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20...50.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 13

Може статися, що при нових значеннях $\bar{x}$ і S інші результати потраплять в категорію аномальних. Однак, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

4.1.1.7. Критерій Смирнова

Критерій Смирнова використовується при об'ємах вибірки $n \geq 25$. Він встановлює менш жорсткі межі грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються дійсні значення квантилів розподілу (спостережуване значення критерію) по формулі:

$$\beta = \frac{\max |x_{ji} - \bar{x}|}{S}. \quad (1.4)$$

Знайдене значення порівнюється з критерієм β_k , наведеним в табл. 1.4.

Таблиця 1.4.

Об'єм вибірк	Граничне значення β_k при рівні				
	0,100	0,050	0,010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

4.1.1.8. Критерій Шовене

Критерій Шовене застосовується для законів, що не суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень n_{oc} , які мають такі ж великі похибки, як і “підозрілий” результат. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

$$n_{oc} \leq 0,5. \quad (1.5)$$

Порядок перевірки гіпотези наступний:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 14

1) обчислюється середнє арифметичне $\bar{X}$ і СКВ результатів спостережень для всієї вибірки;

2) з таблиці інтегральної функції нормованого нормального розподілу (додаток 2) по величині $z = \frac{|x_{in} - \bar{x}|}{S}$ визначається ймовірність появи “підозрілого” результату в генеральній сукупності чисел n :

$$P(zS < x_{in} - \bar{x}). \quad (1.6)$$

3) число очікуваних результатів $n_{оч}$ визначається по формулі:

$$n_{оч} = nP. \quad (1.7)$$

4.2. Основні теоретичні відомості про робастні методи обробки результатів виімрювань

Класичні методи математичної статистики розроблені для тих випадків, коли експериментальні дані задовольняють строгим статистичним моделям і є оптимальними для цих моделей. Проте більшість з них чутливо до наявності викидів або промахів, до відхилень розподілу від гаусівського тощо. В практичних задачах строгі моделі нерідко порушуються і тому бажано використовувати такі методи, які слабо залежать від порушення введених припущень, однак дають достатньо високу точність оцінки. Такі методи, названі робастними або стійкими і активно розробляються в сучасній статистиці та все більш широко використовуються на практиці. Так, наприклад, в ГОСТ ISO 5725-5-2002 приведено застосування робастних методів для аналізу результатів експериментів.

Робастні оцінки будуються так, щоб їх властивості залишалися добрими навіть у тому випадку, коли дійсний розподіл експериментальних даних відрізняється від передбачуваного. Так, для багатьох наборів даних реалістичнішою є не строга модель розподілу Гауса, а розподіли з “важчими” хвостами (коли ймовірність великих відхилень від середнього значення суттєво більша, ніж при розподілі Гауса). Найбільш поширеною серед таких моделей є модель засмічення (або модель грубих помилок): розподіл вибірки представляють у вигляді суміші основного розподілу Гауса $\varphi(x)$ з іншим розподілом $h(x)$:

$$p_\varepsilon(x) = (1-\varepsilon)\varphi(x) + \varepsilon h(x). \quad (2.1)$$

Розподіл $h(x)$ може бути або розподілом Гауса із значно більшою дисперсією, ніж $\varphi(x)$ (часто при дослідженні оцінок приймають відношення СКВ h/σ_φ рівним 3 або 10), або $h(x)$ відрізняється від розподілу Гауса і має затягнуті хвости.

Переходити до робастного оцінювання слід при розподілі вибірки з довгими хвостами, ніж у розподілу Гауса.

Робастні оцінки повинні задовольняти двом основним вимогам:

– мало поступатися в ефективності оптимальним оцінкам при виконанні основної моделі, коли розподіл дійсно є гаусовським;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 15

– залишатися досить добрими при відхиленнях від основної моделі, коли розподіл відмінний від гаусівського.

Застосування робастних методів розглянемо на прикладі пошуку оцінки середнього по випадковій вибірці $x_1, \dots, x_n$, тобто стосовно обробки даних при прямих вимірюваннях з багатократними спостереженнями. Найчастіше використовується класична оцінка – середнє арифметичне результатів спостережень. Ця оцінка є якнайкращою при розподілі Гауса. Проте при відхиленнях від цього розподілу або при наявності викидів її властивості різко погіршуються: оцінка втрачає ефективність і сильно залежить від викидів.

Найбільш розробленим методом побудови робастних оцінок є узагальнений метод максимальної правдоподібності, в якому побудова оцінки виходить з умови

$$\min Q(\Psi) = \sum_{i=1}^n \Psi(x_i - a), \quad (2.2)$$

де a – математичне очікування випадкової величини.

При цьому вагова функція $\psi(x)$ вибирається так, щоб при великих $|x|$ вона зростала повільніше, ніж квадратична функція $|x|^2$, а при малих x була близька до x^2 . Тому М-оцінка, визначена умовою (2.2), слабо залежить від викидів (промахів) і хвостів, що впливають на розподіл, але при розподілі Гауса вибірка близька до середнього $\bar{x}$.

М-оцінки зазвичай не виражаються в явному вигляді, навіть при оцінці середнього. В цьому випадку вони є рішенням рівняння

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i - a) = 0, \quad (2.3)$$

де $\varphi(x) = \Psi'(x)$, для вирішення цього рівняння зазвичай використовують ітераційні методи.

Найбільш поширеними на практиці є М-оцінки Хьюбера (Ψ_H), Хампеля (Ψ_{HA}), Андрюса (Ψ_A) і Тьюки (Ψ_T); відповідні похідні вагових функцій Ψ_H , Ψ_{HA} , Ψ_A і Ψ_T (φ_H , φ_{HA} , φ_A і φ_T) наведені в таблиці 2.1.

У таблиці 2.1 аргумент вагової функції масштабують за допомогою залежності

$$x = \frac{x_i - a_I}{S}, \quad (2.4)$$

де x_i – елемент впорядкованої вибірки;

a_I – оцінка параметра зсуву, зазвичай беруть за початковий параметр зсуву медіану;

S – початкова оцінка параметра масштабу (стійка оцінка СКВ).

4.3. Основні теоретичні відомості про перевірку гіпотези про однорідність двох груп даних

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 16

При обробці даних нерідко виникає необхідність перевірки гіпотези однорідності декількох груп даних, тобто рівності функцій розподілу вибірок. Іноді буває необхідно перевірити збіг центрів розподілів (медіан) або однакове розсіювання декількох вибірок. Можна також перевірити певні властивості однієї вибірки, наприклад відповідність її заданій функції розподілу, гіпотези про симетрію, незалежність і однаковий розподіл (однорідності) членів вибірки. Всі ці гіпотези можна перевірити за допомогою непараметричних критеріїв.

Більшість непараметричних методів заснована на варіаційному ряду, який отримуємо, якщо члени початкової вибірки розташувати в порядку зростання: $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$.

Для перевірки однорідності двох вибірок часто використовується критерій Колмогорова-Смирнова, який заснований на порівнянні емпіричних функцій розподілів.

Нехай $F_{1n}(x)$ – емпірична функція розподілу випадкової величини X , побудована по вибірці $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ і $F_{2n}(x)$ – емпірична функція розподілу випадкової величини Y , побудована по вибірці $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$:

$$F_{1n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{x_i} \leq x, \quad \text{ää} \quad I_{x_i} = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \\ 0, & x_i > x \end{cases} \quad (3.1)$$

$$F_{2n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{y_i} \leq x, \quad \text{ää} \quad I_{y_i} = \begin{cases} 1, & y_i \leq x \\ 0, & y_i > x \end{cases} \quad (3.2)$$

і обчислюють відстані між ними:

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{F_{1n}(x) - F_{2n}(x)\}; \\ D_n^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \{F_{2n}(x) - F_{1n}(x)\}; \\ D_n &= \max_{1 \leq i \leq n} (D_n^+, D_n^-). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для цих статистик відомі асимптотичні розподіли. Обчислені значення

$$z_n = D_n(\sqrt{n} + 0,275 - 0,04/\sqrt{n}), \quad (3.4)$$

$$z_n^{+(-)} = D_n^{+(-)}(\sqrt{n} + 0,12 + 0,11/\sqrt{n}) \quad (3.5)$$

порівнюють з критичними значеннями статистик Стефенса $\tilde{D}_n(q)$ і $\tilde{D}_n^{+(-)}(q)$ для декількох рівнів значущості q , приведених в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

	Рівень значущості q				
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,15
$\tilde{D}_n^{+(-)}(q)$	1,518	1,358	1,224	1,073	0,973
$\tilde{D}_n(q)$	1,628	1,480	1,358	1,224	1,138

При $z_n > \tilde{D}_n(q)$ або $z_n^{+(-)} > \tilde{D}_n^{+(-)}(q)$ гіпотеза про однорідність двох вибірок на рівні значущості q відхиляється.

При використанні критерію Колмогорова-Смирнова корисно також накреслити графіки емпіричних функцій F_{1n} і F_{2n} , які дозволяють виявити особливості вибірок.

До переваг критерію Колмогорова-Смирнова можна віднести те, що в разі відміни справжнього розподілу вибірки від гіпотетичного за допомогою цього критерію така відмінність буде виявлена (при досить великому числу спостережень n).

Приклад. Перевірити гіпотезу однорідності двох вибірок $X=[x_1, x_2, \dots, x_{10}]$ і $Y=[y_1, y_2, \dots, y_{10}]$, приведених в таблиці. 3.2 .

Таблиця 3.2

X	4,14	5,68	5,20	3,86	4,31	4,93	5,91	3,75	4,40	4,51
Y	5,98	6,76	6,42	5,65	5,98	5,10	0,50	3,74	4,72	5,34

Розташуємо члени початкові вибірки в порядку зростання:
 $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_{10}$ і $y'_1 \leq y'_2 \leq \dots \leq y'_{10}$ і приведемо їх в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

X	3,75	3,86	4,14	4,31	4,40	4,51	,493	5,20	5,68	5,91
Y	0,50	3,74	4,72	5,10	5,34	5,65	5,98	5,98	6,42	6,76

Відстані між емпіричними функціями розподілу випадкових величин $F_{1n}(x)$ і $F_{2n}(x)$ приведені в табл. 3.4.

З табл.3.4 значення $D_n = 0,4$ і $D_n^- = 0,2$. Отримаємо у відповідності з (3.4) і (3.5) значення $z_n = 1,323$ і $z_n^- = 0,6617$. При рівні значущості $q=0,05$ $z_n < \tilde{D}_n(q)$ і $z_n^- < \tilde{D}_n^{(-)}(q)$, що підтверджує однорідність двох груп даних.

Таблиця 3.4

x	$F_{1n}(x)$	$F_{2n}(x)$	$F_{1n}(x) - F_{2n}(x)$
0,5	0	0,1	-0,1
3,74	0	0,2	-0,2
3,75	0,1	0,2	-0,1
3,86	0,2	0,2	0
4,14	0,3	0,2	0,1
4,31	0,4	0,2	0,2
4,4	0,5	0,2	0,3
4,51	0,6	0,2	0,4
4,72	0,6	0,3	0,3
4,93	0,7	0,3	0,4
5,1	0,7	0,4	0,3
5,2	0,8	0,4	0,4
5,34	0,8	0,5	0,3
5,65	0,8	0,6	0,2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 18

5,68	0,9	0,6	0,3
5,91	1	0,6	0,4
5,98	1	0,7	0,3
5,98	1	0,8	0,2
6,42	1	0,9	0,1
6,76	1	1	0

Таблиця 3.1

Оцінка	Вагова функція	Значення параметрів
Хьюбера	$\varphi_{H(x)} = \max[-c, \min(c, x)]$	$c=1,5$
Хампеля	$\varphi_{Ha}(x) = \begin{cases} x, & x \leq a; \\ asig(x), & a \leq x \leq b; \\ a \left(\frac{x - csig(x)}{b - c} \right), & b \leq x \leq c; \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	$a=1.7;$ $b=3.4;$ $c=8.5$
Андрюса	$\varphi_A(x) = \begin{cases} \sin(x/c), & x \leq c\pi; \\ 0, & x > c\pi \end{cases}$	$c=2.1$
Тьюки	$\varphi_T(x) = \begin{cases} x[1 - (x/c)^2]^2, & x \leq c; \\ 0, & x > c \end{cases}$	Тьюки

Значення медіани, залежно від парної або непарної кількості елементів вибірки, визначається згідно виразу:

$$\text{med} = \begin{cases} x'_{m+1} & \text{їдє } n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(x'_m + x'_{m+1}) & \text{їдє } n = 2m \end{cases} \quad (3.5)$$

Значення початкової оцінки параметра масштабу рекомендується визначати з наступного виразу:

$$S = 1,483 \text{med} |x_i - \text{med}(x_i)|. \quad (3.6)$$

Найбільший інтерес представляє оцінка Хьюбера, для якої функція Ψ_n в області $x \leq c$ є квадратичною, тобто відповідає розподілу Гауса, а в області $x > c$ — лінійною, тобто відповідає експоненціальному розподілу, який має хвости, що істотно «обважнюють» вибірку у порівнянні з розподілом Гауса. Оцінка Хьюбера є рішенням мінімаксної задачі: максимальна асимптотична дисперсія оцінки на класі засмічених розподілів Гауса для неї досягає мінімуму. Вона досить стійка до відхилень від розподілу Гауса.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 19

Для вирішення рівняння (3.6), що визначає М-оцінку, можна застосувати ітераційну схему Гауса – Ньютона:

$$a_{l+1} = a_l + \sum_{i=1}^n \varphi(x_i - a_l) / \sum_{i=1}^n \varphi'(x_i - a_l). \quad (3.7)$$

Виконавши один крок ітераційної процедури ми можемо зупинитися на однокроковій М-оцінці, яка дає цілком задовільні результати при використанні функції Хьюбера. Однокрокова М-оцінка з обрахуванням зсуву і масштабу матиме вигляд:

$$a_{l+1} = a_l + S \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x_i - a_l}{S}\right) / \sum_{i=1}^n \varphi'\left(\frac{x_i - a_l}{S}\right) \quad (3.8)$$

В даний частині робастний підхід перетворився в добре розроблену область статистики. Запропоновано численні і різноманітні оцінки, які поєднують високу ефективність при використанні основних моделей з достатньою стійкістю по відношенню до відхилень початкових даних від цих моделей. Для багатьох оцінок досліджено точність (стосовно до різних моделей) і розроблено апарат статистичних висновків.

Головна мета використання робастних методів – виключити вплив грубих похибок і промахів, до яких чутливі класичні методи. Однак, в класичній статистиці також наявні методи видалення промахів. Для цього можна використовувати двоступінчасту процедуру:

- виділити і виключити грубі похибки і промахи;
- застосувати до «відредагованих» даних, що залишилися, класичну процедуру оцінювання.

Корисно зіставити приведену двоступінчасту процедуру з одним із робастних методів. Дослідження показують, що кращою є, як правило, робастна процедура. Це обумовлено такими причинами:

1) при використанні двоступінчастої процедури не завжди вдається чітко розмежувати етапи, особливо для складних задач; наприклад, при побудові емпіричних залежностей грубі похибки важко виявити на основі класичних оцінок;

2) навіть ретельно «відредагована» вибірка, як правило, матиме розподіл, що відрізняється від гауса; тому застосування класичних методів все-таки залишається не цілком обґрунтованим;

3) більшість процедур виділення і виключення грубих похибок поступаються в ефективності робастним процедурам; крім того, вони можуть бути досить трудомісткими.

Тому переважними в більшості випадків є робастні процедури, оскільки вони допускають плавний перехід від повної вибірки до суттєвого скорочення даних з урахуванням властивостей конкретної вибірки. Ця перевага стає особливо наочною при переході до складніших задач, наприклад до побудові емпіричних залежностей. Таким чином, необхідно якнайширше використовувати робастні

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 20

методи в вимірjuвальних задачах, для яких особливо важлива властивість стійкості результатів.

У тих випадках, коли по тих або інших причинах доцільно орієнтуватися на класичні методи, рекомендується паралельно застосовувати один з простих робастних методів; виконати, наприклад, однокрокову М-оцінку для контролю результатів і виявлення відхилень від моделі. Якщо немає суттєвої розбіжності між двома результатами, то можна зробити звичайні статистичні висновки на основі класичного підходу. Інакше необхідно ретельніше проаналізувати початкові дані та або виявити і відкинути промахи (а потім знову застосувати класичну процедуру), або орієнтуватися на один з точніших робастних методів, для яких є оцінки похибок. Така процедура забезпечить достовірність отриманих висновків і дозволить уникнути грубих помилок.

4.4.1. Основні теоретичні відомості про проведення багатофакторних експериментів

4.4.1.1. Основні поняття і визначення

Експеримент – сукупність операцій, що здійснюються над об'єктом дослідження з метою отримання інформації про його властивості. Експеримент, в якому дослідник на свій розсуд може змінювати умови його проведення, називається активним експериментом. Якщо дослідник не може самостійно змінювати умови його проведення, а лише реєструє їх, то це пасивний експеримент.

Вхідні параметри, які можуть бути змінені, називають факторами.

План експерименту – сукупність даних, що визначають число, умови і порядок проведення дослідів.

Дослід – це окрема експериментальна частина.

Планування експерименту – вибір плану експерименту, що задовольняє заданим вимогам, сукупність дій спрямованих на розробку стратегії експериментування (від отримання апіорної інформації до отримання працездатної математичної моделі або визначення оптимальних умов). Це цілеспрямоване управління експериментом, що реалізовується в умовах неповного знання механізму явища, що вивчається.

Мета планування експерименту – знаходження таких умов і правил проведення дослідів, при яких вдається отримати надійну і достовірну інформацію про об'єкт з найменшими витратами праці, а також представити цю інформацію в компактній і зручній формі з кількісною оцінкою точності.

Хай властивість Y об'єкту, що цікавить нас, залежить від декількох (n) незалежних змінних ($x_1, x_2, \dots, x_n$) і ми хочемо з'ясувати характер цієї залежності – $Y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, про яку ми маємо лише загальне уявлення. Величина Y називається “відгуком”, а сама залежність $Y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – це “функція відгуку”.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 21

Для побудови ефективної математичної моделі доцільно провести попередній аналіз значущості факторів (міри впливу на функцію), їх ранжирування і виключити малозначні фактори.

Діапазони зміни факторів задають область визначення Y . Якщо прийняти, що кожному фактору відповідає координатна вісь, то отриманий простір називається факторним простором. При $n=2$ область визначення Y представляє собою прямокутник, при $n=3$ – куб, при $n > 3$ – гіперкуб.

При виборі діапазонів зміни факторів потрібно враховувати їх сумісність, тобто контролювати, щоб в цих діапазонах будь-які поєднання факторів можна було реалізувати у дослідах і це не приводило до абсурду. Для кожного з факторів вказують граничні значення

$$X_{i\min} \leq X_i \leq X_{i\max}, \quad i=1...n. \quad (4.1)$$

Регресійний аналіз функції відгуку призначений для отримання її математичної моделі у вигляді рівняння регресії

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n; B_1, B_2, \dots, B_m) + e, \quad (4.2)$$

де $B_1, \dots, B_m$ – деякі коефіцієнти; e – похибка.

При використанні методів планування експерименту необхідно знайти відповіді на 4 питання:

- Які поєднання факторів і скільки таких поєднань необхідно узяти для визначення функції відгуку?
- Як знайти коефіцієнти $B_0, B_1, \dots, B_m$?
- Як оцінити точність представлення функції відгуку?
- Як використовувати отримане уявлення для пошуку оптимальних значень Y ?

4.4.1.2. Розкладання функції відгуку в степеневий ряд, кодування факторів

Якщо заздалегідь не відомий аналітичний вираз функції відгуку, то можна розглядати не саму функцію, а її розкладання, наприклад в степеневий ряд у вигляді полінома

$$Y = B_0 + B_1X_1 + \dots + B_nX_n + B_{12}X_1X_2 + \dots + B_{n-1}X_nX_{n-1} + B_{11}X_1^2 + \dots + B_{nn}X_n^2 + \dots \quad (4.3)$$

Розкладання функції в степеневий ряд можливо в тому випадку, якщо сама функція є неперервною і гладкою. На практиці зазвичай обмежуються числом членів степеневого ряду і апроксимують функцію поліномом деякої міри.

Фактори можуть мати різні розмірності (A, B, B_m) і значно відрізнятися кількісно. У теорії планування експерименту використовують кодування факторів.

Ця операція полягає у виборі нового масштабу для кодованих факторів, причому такого, щоб мінімальне значення кодованих факторів відповідало “-1”, а максимальне значення “+1”, а також в перенесенні початку координат в точку з координатами $X_{1cp}, X_{2cp}, \dots, X_{ncp}$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 22

$$X_{i\bar{\delta}} = \frac{X_{i\min} + X_{i\max}}{2}. \quad (4.4)$$

Поточне значення кодованого фактора

$$x_i = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{icp} - X_{i\min}} = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{i\max} - X_{icp}} = \frac{2X_i - X_{i\max} - X_{i\min}}{X_{i\max} - X_{i\min}}, \quad (4.5)$$

де X_i – іменоване (абсолютне) значення фактора; x_i – кодоване значення фактора; $X_{icp} - X_{i\min} = X_{i\max} - X_{icp}$ – інтервал варіювання фактора.

Функція відгуку може бути виражена через кодовані фактори $Y = f(x_1, x_n)$ і записана в поліноміальному вигляді

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{m-1}x_{n-1}x_n + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 + \dots \quad (4.6)$$

Очевидно, що $B_i \neq b_i$, та

$$Y = F(X_1, X_i, X_n) = f(x_1, x_i, x_n). \quad (4.7)$$

Для полінома, записаного в кодованих факторах, ступінь впливу фактора або їх поєднань на функцію відгуку визначається величиною їх коефіцієнта b_i . Для полінома в іменованих факторах величина коефіцієнта B_i ще не вказує однозначно на ступінь впливу цього фактора або їх поєднань на функцію відгуку.

Якщо вважати, що існує фактора x_0 завжди рівний 1, то

$$b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \sum_{i=0}^n b_ix_i. \quad (4.8)$$

Якщо додатково всі подвійні, потрійні і так далі поєднання факторів, а також квадрати факторів і всі відповідні їм коефіцієнти позначити через x_i і b_i для $i = n+1, m$, то степеневий ряд можна записати у вигляді

$$Y = \sum_{i=0}^m b_ix_i. \quad (4.9)$$

В даному випадку $m+1$ – загальне число доданків ряду.

4.4.1.3. Матричні перетворення при обробці результатів експерименту

При матричному записі результатів різних дослідів N для поліноміального представлення результату $Y_u = \sum_{i=0}^m b_ix_{iu}$ матимемо рівняння

$$Y = X \cdot B; \quad (4.10)$$

де: X - матриця поєднань чинників

$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0u} & x_{1u} & x_{2u} & \dots & x_{iu} & \dots & x_{mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{iN} & \dots & x_{mN} \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 23

В даному випадку $0, 1, \dots, i, \dots, m$ – номери доданків рівняння; $1, \dots, u, \dots, N$ – номери дослідів. Матриця X – прямокутна і містить $m+1$ стовпців і N рядків.

Якщо врахувати, що в матриці X елементи $x_{0u}=1$, $u=1, \dots, ш$, то матриці X , Y , B можна записати у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1u} & x_{2u} & \dots & x_{iu} & \dots & x_{mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{iN} & \dots & x_{mN} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_u \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

де: Y – матриця-стовпець результатів дослідів, B – матриця-стовпець коефіцієнтів полінома.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (4.10) на транспоновану матрицю X_t :

$$X_t \cdot X \cdot B = X_t \cdot Y. \quad (4.12)$$

Матриця $C = X_t X$, що отримана в результаті множення на транспоновану матрицю, є квадратною матрицею, що містить $m+1$ рядків і $m+1$ стовпців.

Запишемо (4.12) у вигляді:

$$C \cdot B = X_t \cdot Y. \quad (4.13)$$

Для того, щоб отримати в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів, необхідне помножити обидві частини матричного рівняння (4.13) зліва на матрицю C^{-1} (матрицю, зворотну матриці C).

$$C^{-1} \cdot C \cdot B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \quad (4.14)$$

Зворотна матриця будується так, що при множенні її на початкову матрицю виходить одинична матриця E , у якої на головній діагоналі розташовані 1, а поза нею – 0.

$$\tilde{N}^{-1} \cdot \tilde{N} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Запишемо в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів полінома

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \quad (4.16)$$

Розглянемо, як простий приклад, поліном у вигляді:

$$Y_u = b_0 x_0 + b_1 x_u; \quad x_0 = 1; \quad u = 1, \dots, N; \quad (4.27)$$

який сформовано за результатами N дослідів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 24

$$C = X_t \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 x_1 \\ 1 x_2 \\ \dots \\ 1 x_u \\ \dots \\ 1 x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \dots & \sum_{u=1}^N x_u \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{u=1}^N x_u & \dots & \sum_{u=1}^N x_u^2 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

$$X_t \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_u \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \\ \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{bmatrix}.$$

Зворотна матриця C^{-1} для матриці C має вигляд:

$$C^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^N x_u^2 & - \sum_{u=1}^N x_u \\ - \sum_{u=1}^N x_u & N \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

де D – визначник матриці C .

На основі виразу (4.16) отримаємо:

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^N x_u^2 & - \sum_{u=1}^N x_u \\ - \sum_{u=1}^N x_u & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \\ \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{bmatrix} = \frac{1}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u^2 - \sum_{u=1}^N x_u y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u \\ - \sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u + N \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{bmatrix}.$$

Звідси вирішення системи рівнянь щодо коефіцієнтів b_0 і b_1 :

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u^2 - \sum_{u=1}^N y_u x_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}, \quad (4.20)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N y_u x_u - \sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}. \quad (4.21)$$

Цей результат повністю збігається з співвідношеннями для такого ж полінома при використанні методу найменших квадратів, де використовується чисельний показник мінімальності суми квадратів відхилень у всіх N дослідах. Отже, побудований таким чином поліном буде найбільш близький до точних значень результатів експерименту.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 25

5. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які є види вимірювань?
2. В чому полягає умов вимірювань?
3. Чим відрізняються статичні і динамічні вимірювання?
4. В чому полягає оцінювання точності результатів вимірювання?
5. Які є основні класи точності вимірювання?
6. Чим відрізняються і багатократні вимірювання?
7. В чому полягають основні етапи виміральної процедури?
8. Які є способи в похибки результатів вимірювань?
9. Які є складові похибки вимірювань?
10. Якими є функціональні зв'язки між похибкою вимірювань і значенням вимірюваної величини?
11. В чому полягають статична і динамічна складові погрешності вимірювань?
12. В чому полягає розподіл значень дискретної випадкової величини?
13. Властивості закону розподілу безперервної випадкової величини.
14. Властивості нормального розподілу безперервних випадкових величин.
15. Що таке розподіл Стюдента?
16. Що таке рівномірний розподіл, трикутний розподіл, арксинусоїдальний розподіл?
17. Властивості квантилів кривої розподілу і рівнів значущості.
18. Що таке моменти розподілу?
19. В чому полягають статистичні оцінки вибірових параметрів розподілу?
20. Що таке середнє арифметичне вибірки?
21. Що таке середньоквадратичне відхилення для вибірки?
22. Як відбувається спрощене обчислення вибіркового середньоквадратичного відхилення?
23. Як розраховується середньоквадратичне відхилення результату?
24. Як розраховуються довірчі межі результату?
25. Як відбувається обробка рівноточних спостережень?
26. Як розраховується коефіцієнт кореляції між двома вибірками?
27. Що таке нерівноточні спостереження?
28. В чому полягає попередня обробка експериментальних даних?
29. В чому полягають методи виключення результатів з грубими похибками за критеріями Ірвіна, Романовського, Діксону, 3σ , Смирнова, Шовене?
30. Як відбувається аналітичне виключення систематичних похибок?
31. Як відбувається експериментальне виключення систематичних похибок?
32. Що таке рандомізація?
33. В чому полягає оптимізація процедур вимірювань?
34. В чому полягає загальна форма представлення результатів технічних вимірювань?
35. В чому полягають особливості представлення результату вимірювань?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 26

36. Як відбувається послідовність обчислень при обробці результатів прямих вимірювань?
37. В чому полягає аналітичний спосіб перевірки відповідності розподілу нормальному розподілу за допомогою «W-критерію»?
38. Як відбувається визначення довірчої межі загальної похибки результату вимірювань?
39. Як відбувається запис результату прямого вимірювання?
40. В чому полягають особливості обробки експериментальних даних при прямих нерівноточних вимірюваннях?
41. Що таке лінійна регресія?
42. В чому полягає послідовність обчислень при обробці непрямих вимірювань?
43. Як відбувається перевірка відсутності кореляції між результатами спостережень при непрямих вимірюваннях?
44. Як визначаються результати непрямого вимірювання?
45. В чому полягає залежність похибки результату непрямого вимірювання від похибки аргументів?
46. Як визначаються довірчі межі похибки результату непрямого вимірювання?
47. Що таке критерій незначних часткових похибок?
48. В чому полягає використання принципу Лежандра при обробці експериментальних даних при сукупних і сумісних вимірюваннях?
49. В чому полягає методика отримання нормальних рівнянь при використанні принципу Лежандра?
50. Як відбувається вирішення системи нормальних рівнянь?
51. Як розраховується середньоквадратичне відхилення результатів сукупних або сумісних вимірювань?
52. Як розраховуються довірчі межі випадкової погрішності результатів сукупних або сумісних вимірювань?
53. В чому полягають робастні методи обробки даних?
54. В чому полягає перевірка однорідності двох груп вибірок по критерію Пірсона χ^2 ?
55. В чому полягає перевірка однорідності двох груп вибірок по критерію Колмогорова-Смирнова?
56. В чому полягає перевірка однорідності двох груп вибірок по критеріям знаків і серій?
57. В чому полягає перевірка однорідності двох груп вибірок по ранговому критерію Манна-Уїтні і Вілкоксона?
58. В чому полягає перевірка подібності розсіювання двох вибірок по ранговому критерію Сижела?
59. В чому полягає ортогональне планування експерименту?
60. В чому полягають плани повного факторного експерименту?
61. В чому полягають плани дробного факторного експерименту?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 27

62. Як відбувається перевірка значущості коефіцієнтів і адекватності рівняння регресії
63. В чому полягає ортогональний центрально-композиційний план другого порядку?
64. В чому полягають рототабельні плани?
65. В чому полягає рототабельний ортогональний центрально-композиційний план?
66. Як відбувається оптимізація методом крутого сходження по поверхні відгуку?
67. Що таке композиційні плани Бокса-Уїлсона?
68. В чому полягає метод послідовного сімплекс-планування?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/3/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 28 / 28

6. ЛІТЕРАТУРА

1. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. – М.: Радио и связь.
2. Грановский В.А., Сирая Т.И. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат.
3. Маликов М.Ф. Основы метрологии. – М.: Изд-во Комитета по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949.
4. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. – М.: Изд-во стандартов. – 1991.
5. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справ. пособие. – К.: Техніка, 1987.
6. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учебное пособие для вузов – М.: Логос, 2001.
7. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973.
9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006.
10. Хьюбер П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
11. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссец П., Штоель В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. – М.: Мир, 1989.
12. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика : робастность, оценивание, прогноз. – М.: Финансы и статистика, 2000.
13. ГОСТ ИСО 5725-5-2002 «Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 5. Альтернативные методы определения прецизионности стандартного метода измерений».
14. Новицкий П.В., Зиграф Э.Н. Оценка похибокешностей измерений. – Л.: Энергия, 1983.
15. Джонсон Н. Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1981.
16. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: Учеб. пособие для вузов – М.: Радио и связь, 1983.
17. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976.
18. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. – Л.: Судостроение, 1980.