

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 01.10.2020 р.
№ 3

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТІВ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «магістр»
спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»
освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-
вимірювальні системи»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки
і робототехніки
(назва факультету)
кафедра метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
(назва кафедри)

Рекомендовано на засіданні ка-
федри метрології та інформацій-
но-вимірювальної техніки
(назва кафедри)
29 серпня 2020р.,
протокол № 5

Розробники: д.т.н., проф., завідувач кафедри метрології та інформаційно-
вимірювальної техніки ПОДЧАШИНСЬКИЙ Юрій, асистент кафедри метроло-
гії та інформаційно-вимірювальної техніки ВОРОНОВА Тетяна, старший ви-
кладач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
ОМЕЛЬЧУК Ігор

(науковий ступінь, посада, ПРІЗВИЩЕ, власне ім'я)

Житомир
2020

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 2

Методичні рекомендації для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Методи планування та обробки результатів експериментів» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «магістр» спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» освітньо-професійна програма «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи» / Розробники Подчашинський Ю.О., Воронова Т.С., Омельчук І.А. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2020. – 56 с.

Розробники: Подчашинський Ю.О., Воронова Т.С., Омельчук І.А.

Рецензенти:

к.т.н., доцент, доцент кафедри АтаКІТ ім. проф. Б.Б. Самотокіна
А.А. Гуменюк;

к.т.н., доцент, доцент кафедри АтаКІТ ім. проф. Б.Б. Самотокіна
Ю.О. Шавурський

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 3

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1 Попередня обробка результатів вимірювання. Застосовування методів виключення винятки результатів з грубими похибками	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2 Застосування робастних методів обробки результатів вимірювань.....	13
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3 Перевірка гіпотези про однорідність двох груп даних	19
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4 Основи проведення багатофакторних експериментів	22
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5 Виконання багатофакторних експериментів на основі ортогонального планування	31
ДОДАТОК 1 Коефіцієнт довіри t_γ (квантилі розподілу Стюдента)	54
ДОДАТОК 2 Значення функції нормального розподілу	55
ДОДАТОК 3 Квантилі розподілу Фішера F_{1-q} для $q = 0,05$	56
ДОДАТОК 4 Квантилі розподілу Кохрена G_{1-q} для $q = 0,05$	57
ЛІТЕРАТУРА.....	58

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 4

ВСТУП

Дисципліна “Методи планування і обробки результатів експериментів” – складова частина професійної підготовки студентів спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка». Дані методичні вказівки – це навчальний посібник для виконання практичних завдань з цієї дисципліни для студентів факультету інформаційно-комп’ютерних технологій. У дисципліні викладена сукупність операцій, що здійснюються над об’єктом досліджень з метою отримання інформації про його властивості. Одним з головних завдань при проведенні вимірювань є отримання і перевірка математичної моделі об’єкту, тобто опису у кількісній формі взаємозв’язку між вхідними і вихідними параметрами об’єкту. Другім завданням обробки інформації, отриманої в результаті експерименту, є вирішення задачі оптимізації, тобто знаходження такої комбінації впливаючих незалежних змінних, при якій вибраний показник оптимальності набуває екстремального значення.

В процесі вимірювань і подальшої обробки даних, а також формалізації результатів у вигляді математичної моделі виникають похибки і втрачається частина інформації, що міститься в початкових даних. Застосування методів планування експерименту дозволяє визначити похибки математичної моделі та її адекватність реальному об’єкту.

Мета дисципліни – вивчення на базі сучасного математичного апарату методів планування і обробки результатів експериментів, а також набуття студентами необхідних знань, пов’язаних з аналізом проблемних ситуацій і методів пошуку оптимальних рішень. На основі концептуальних моделей і методів планування та обробки результатів експериментів необхідно сформувати у студентів практичні навички та уміння прийняття обґрунтованих і професійно-грамотних рішень в практиці розробки та експлуатації систем управління.

Дисципліна “Методи планування та обробки результатів експериментів” базується на матеріалі відповідних розділів вищої математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії вимірювання, метрології, основах програмування та алгоритмічних мов, об’єктно-орієнтованому програмуванні.

Практичні завдання виконуються студентами індивідуально. До виконання наступного завдання студент допускається тільки після того, як він оформить та захистить попередню роботу. У звіті вказується найменування та мета роботи, наводяться початкові дані індивідуального варіанту завдання. До звіту додаються програми та результати обчислень, отримані в результаті виконання роботи. В кінці звіту наводяться висновки про досягнення мети роботи.

В результаті виконання практичних завдань студенти набувають навичок застосовувати методи виключення результатів з грубими похибками; способи перевірки відповідності нормальному розподілу отриманих даних; робастні методи обробки даних; непараметричні методи обробки даних; будувати плани багатофакторного експерименту.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 5

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ. ЗАСТОСОВУВАННЯ МЕТОДІВ ВИКЛЮЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ З ГРУБИМИ ПОХИБКАМИ

Мета роботи:

Ознайомитися з методами виключення спостережень, що містять грубі похибки. Вирішити задачу виключення результатів з грубими похибками для конкретних чисельних прикладів.

1.1. Основні теоретичні відомості

1.1.1. Завдання попередньої обробки експериментальних даних

Загальним завданням попередньої обробки експериментальних даних є виключення спостережень, що містять грубі похибки, а також зменшення впливу систематичної складової похибок вимірювання. При однократному виробничому вимірюванні така попередня обробка ускладнена. Багатократні вимірювання дають деяку сукупність результатів, яка має бути оброблена для отримання найбільш достовірного значення вимірюваної величини і оцінки його точності.

Перш за все, з сукупності експериментальних даних слід виключити результати спостережень, що в явному вигляді містять грубі похибки і тому помітно відрізняються від інших результатів. Якщо повної упевненості в наявності грубої похибки немає, то такий результат слід залишити у вибірці, а потім перевірити правомірність його віднесення до неї (за допомогою відповідних статистичних критеріїв).

1.1.2. Методи виключення результатів з грубими похибками

Для виключення грубих похибок застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез. У метрології використовуються статистичні гіпотези, під якими розуміють гіпотези про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілів.

Разом з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. А конкуруючою (альтернативною) називають ту, яка суперечить нульовій.

При висуненні і прийнятті гіпотези можуть мати місце наступні чотири випадки:

- 1) гіпотеза приймається, причому й насправді вона правильна;
- 2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою першого роду, а ймовірність її появи позначають рівнем значущості q ;
- 3) гіпотеза відкидається, причому насправді вона невірна;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 6

4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою другого роду, а ймовірність її появи позначають β .

5) Величину $1-\beta$, тобто ймовірність, що гіпотеза буде знехтувана, коли вона помилкова, називають потужністю критерію.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значення критерію, при яких гіпотезу приймають. Критичною називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Область прийняття гіпотези і критична область розділені критичними точками, що дорівнюють табличним значенням критеріїв.

Перевірку статистичної гіпотези проводять для прийнятого рівня значущості q (приймається рівним 0,1; 0,05; 0,01 тощо). Так, прийнятий рівень значущості $q=0,05$ означає, що висунута нульова статистична гіпотеза може бути прийнята з довірчою ймовірністю $p=0,95$. Або є ймовірність відкинути цю гіпотезу (зробити помилку першого роду), що дорівнює $p = 0,95$.

Нульова статистична гіпотеза підтверджує належність "підозрілого" результату вимірювання (спостереження) даній групі вимірювань, що перевіряється. Формальним критерієм аномальності результату спостережень (підставою для ухвалення конкуруючої гіпотези: "підозрілий" результат не належить даній групі вимірювань) при цьому служить межа, що відстоїть від центру розподілу на величину tS , тобто:

$$|x_{in} - \bar{x}| \geq tS, \quad (1.1)$$

де x_{in} – результат спостереження, що перевіряється на наявність грубої похибки; t – коефіцієнт, що залежить від закону розподілу, об'єму вибірки, рівня значущості.

Таким чином, межі похибок залежать від виду розподілу, об'єму вибірки і вибраної довірчої ймовірності.

При обробці вже наявних результатів спостережень доволіно відкидати окремі результати не слід, оскільки це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група вимірювань (вибірка) може містити декілька грубих похибок і їх виключення проводять послідовно, тобто поодиночі.

Всі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основні типи:

- а) методи виключення при відомому генеральному СКВ;
- б) методи виключення при невідомому генеральному СКВ.

У першому випадку СКВ обчислюється за результатами всієї вибірки результатів спостережень. Після вилучення грубих похибок обчислення СКВ потрібно повторити.

Оскільки на практиці частіше зустрічаються вимірювання при невідомому СКВ (обмежене число спостережень), далі розглянуті такі критерії перевірки "підозрілих" (з точки зору похибок) результатів спостережень: Ірвіна, Романовського, Діксону, Смирнова, Шовене, "3 σ ".

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 7

Так як вимоги, що визначають межу, за якою знаходяться "грубі" результати спостережень, для різних критеріїв різні, то перевірку слід виконувати по декількох критеріях (рекомендується використовувати не менше трьох критеріїв з тих, що розглядаються далі). Остаточний висновок про приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень слід робити по більшості критеріїв.

1.1.3. Критерій Ірвіна

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт по формулі:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{S}, \quad (1.2)$$

де x_{n+1} , x_n – найбільші значення випадкової величини; S – середнє квадратичне відхилення, обчислене по всіх значеннях вибірки. Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ_q , можливі значення якого наведені в табл.1.1

Таблиця 1.1

Число вимірювань n	Рівень значущості	
	$q=0,05$	$q=0,01$
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Якщо $\lambda > \lambda_q$, то нульова гіпотеза не підтверджується, тобто результат – помилковий, і він має бути виключений при подальшій обробці результатів спостережень.

1.1.4. Критерій Романовського

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок в "підозрілих" результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

$$|x_{ii} - \bar{x}| \geq t_p S, \quad (1.3)$$

де t_p – квантиль розподілу Стюдента при заданій довірчій ймовірності з числом мір свободи $k=n-k_n$ (k_n – число "підозрілих" результатів спостережень). Значення квантилів для розподілу Стюдента представлені в додатку 1.

Точкові оцінки розподілу $\bar{x}$ і СКВ результатів спостережень обчислюється без урахування k_n "підозрілих" результатів спостережень.

1.1.5. Критерій Діксону

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 8

Критерій заснований на припущенні, що похибки вимірювань мають нормальний закон розподілу (заздалегідь необхідна побудова гістограми результатів спостережень і перевірка гіпотези про приналежність нормальному закону розподілу). При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксону (спостережуване значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення залежно від числа вимірювань. У табл.1.2 приведені формули коефіцієнтів Діксону. Коефіцієнти r_{10} , r_{11} застосовують, коли є один викид, а r_{21} , r_{22} – коли два викиди. При цьому потрібне первинне впорядкування результатів вимірювань (об'єму вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більш, ніж одну грубу похибку.

Таблиця 1.2

Число вимірювань n (обсяг вибірки)	Коефіцієнт Діксону	Для найменшого експериментального значення параметра	Для найбільшого експериментального значення параметра
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Обчислені для вибірки по формулах значення коефіцієнтів Діксону r порівнюють з табличним значенням коефіцієнтів Діксону r_q (табл. 1.3).

Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність $r < r_q$. Якщо $r > r_q$, то результат визнається грубою похибкою і виключається з подальшої обробки.

Таблиця 1.3

Статистика	Число вимірювань	r_q при рівні значущості q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
r_{01}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 9

r ₂₁	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r ₂₂	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497

1.1.6. Критерії «Зс», Райта

Критерій «правило трьох сигм» є одним з простих способів перевірки результатів, що мають нормальний закон розподілу. Суть правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потрійного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомий, але умова, вказана в приведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що ця величина розподілена нормально; інакше вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється $\bar{x}$ і оцінка СКВ результату спостережень.

Результат, який задовольняє умові $x_{in} - \bar{x} \geq 3S$, вважається за той, що має грубу похибку і вилючається, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо залишкова похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою похибкою і має бути виключений при подальшій обробці. Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20...50.

Може статися, що при нових значеннях $\bar{x}$ і S інші результати потраплять в категорію аномальних. Однак, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 10

1.1.7. Критерій Смирнова

Критерій Смирнова використовується при об'ємах вибірки $n \geq 25$. Він встановлює менш жорсткі межі грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються дійсні значення квантилів розподілу (спостережуване значення критерію) по формулі:

$$\beta = \frac{\max |x_{ii} - \bar{x}|}{s}. \quad (1.4)$$

Знайдене значення порівнюється з критерієм β_k , наведеним в табл.1.4.

Таблиця 1.4.

Об'єм вибірки	Граничне значення β_k при рівні значущо-				
	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

1.1.8. Критерій Шовене

Критерій Шовене застосовується для законів, що не суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень $n_{оч}$, які мають такі ж великі похибки, як і “підозрілий” результат. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

$$n_{оч} \leq 0,5. \quad (1.5)$$

Порядок перевірки гіпотези наступний:

1) обчислюється середнє арифметичне $\bar{x}$ і СКВ результатів спостережень для всієї вибірки;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 11

2) з таблиці інтегральної функції нормованого нормального розподілу (додаток 2) по величині $z = \frac{|x_{in} - \bar{x}|}{S}$ визначається ймовірність появи “підозрілого” результату в генеральній сукупності чисел n :

$$P(zS < x_{in} - \bar{x}). \quad (1.6)$$

3) число очікуваних результатів $n_{оч}$ визначається по формулі:

$$n_{оч} = nP. \quad (1.7)$$

1.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Виконати перевірку для контрольної вибірки у відповідності з варіантом завдання по табл. 1.5. на наявність грубих похибок по критеріям Ірвіна, Романовського та "3σ", для непарних варіантів завдань і по критеріям Діксона, Смірнова та Шовене для парних варіантів завдань при рівні значущості $q=0,05$.

2. Зробити остаточний висновок про приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень по більшості критеріїв.

1.3. Контрольні запитання

1. Яка необхідність в попередній обробці експериментальних даних?
2. Що таке грубі похибки?
3. Що таке статистичні гіпотези?
4. Які існують методи виключення грубих похибок?
5. Як визначається СКВ?
6. Як визначається квантиль розподілу?
7. По скількох критеріях рекомендується виявляти грубі похибки?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015															Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1															Арк 56 / 12

Таблиця 1.5

№ в	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀
1	216	133	312	283	185	419	418	296	332	317	281	372	241	518	286	311	406	605	290	216
2	229	566	271	362	130	285	325	41	56	257	160	269	281	271	329	266	319	79	198	184
3	239	325	224	441	219	352	321	607	183	294	298	361	350	4,9	359	235	338	299	298	298
4	200	168	309	126	242	289	273	257	204	267	256	174	162	170	52	176	511	231	344	164
5	362	379	394	601	321	323	199	225	408	286	338	308	236	244	344	205	378	356	217	273
6	281	79	498	348	432	423	402	299	305	362	581	294	547	405	278	395	287	265	373	495
7	512	565	183	453	473	378	368	593	501	435	580	523	401	633	528	647	613	431	370	492
8	366	315	449	548	353	315	75	466	314	279	388	393	448	340	385	356	392	553	339	265
9	346	209	303	237	353	355	279	94	313	439	501	141	292	231	197	176	328	257	305	263
10	153	237	272	4112	64	97	513	161	61	231	355	270	395	250	386	166	86	178	319	88
11	363	239	355	290	308	199	250	346	267	423	236	167	276	605	288	337	394	187	235	229
12	98	181	352	196	322	130	501	121	258	174	248	266	192	288	430	252	198	291	205	89
13	348	299	272	427	486	247	610	219	368	63	399	321	326	421	272	286	172	133	229	328
14	345	266	507	328	398	399	375	439	373	233	97	424	274	365	305	282	297	359	417	388
15	606	475	348	500	507	531	549	627	445	526	498	441	713	474	359	677	532	188	562	626
16	510	613	586	483	718	298	653	528	534	631	610	784	572	821	750	405	431	542	581	601
17	583	427	427	479	197	527	605	562	324	569	581	563	631	532	432	485	255	547	511	440
18	334	291	395	437	366	350	96	382	304	529	444	528	350	288	480	404	324	391	199	508
19	201	231	433	209	258	249	461	608	191	187	473	493	463	174	278	280	330	242	202	255
20	308	437	222	173	270	151	386	310	77	133	334	238	239	29	222	268	136	499	181	94
21	256	133	312	328	185	419	418	296	332	317	281	372	241	518	286	311	606	305	290	216
22	429	266	471	562	330	485	525	240	255	457	360	469	481	471	529	466	519	279	98	384
23	339	525	394	641	419	552	521	407	282	494	398	561	550	669	559	435	538	399	198	495
24	601	568	709	412	642	289	673	657	604	667	656	574	562	570	452	576	611	631	744	744
25	762	779	394	601	7212	723	599	625	808	686	738	708	636	644	744	605	778	756	617	673

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 13

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

ЗАСТОСУВАННЯ РОБАСТНИХ МЕТОДІВ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи:

Ознайомитися з робастними методами, слабо залежними від наявності викидів або промахів і відхилення розподілу від гаусівського.

Вирішити задачу пошуку оцінки середнього по випадковій вибірці робастним методом.

2.1. Основні теоретичні відомості

Класичні методи математичної статистики розроблені для тих випадків, коли експериментальні дані задовольняють строгим статистичним моделям і є оптимальними для цих моделей. Проте більшість з них чутливо до наявності викидів або промахів, до відхилень розподілу від гаусівського тощо. В практичних задачах строгі моделі нерідко порушуються і тому бажано використовувати такі методи, які слабо залежать від порушення введених припущень, однак дають достатньо високу точність оцінки. Такі методи, названі робастними або стійкими і активно розробляються в сучасній статистиці та все більш широко використовуються на практиці. Так, наприклад, в ГОСТ ISO 5725-5-2002 приведено застосування робастних методів для аналізу результатів експериментів.

Робастні оцінки будуються так, щоб їх властивості залишалися добрими навіть у тому випадку, коли дійсний розподіл експериментальних даних відрізняється від передбачуваного. Так, для багатьох наборів даних реалістичнішою є не строга модель розподілу Гауса, а розподіли з “важкими” хвостами (коли ймовірність великих відхилень від середнього значення суттєво більша, ніж при розподілі Гауса). Найбільш поширеною серед таких моделей є модель застиснення (або модель грубих помилок): розподіл вибірки представляють у вигляді суміші основного розподілу Гауса $\varphi(x)$ з іншим розподілом $h(x)$:

$$p_{\varepsilon}(x) = (1 - \varepsilon)\varphi(x) + \varepsilon h(x). \quad (2.1)$$

Розподіл $h(x)$ може бути або розподілом Гауса із значно більшою дисперсією, ніж $\varphi(x)$ (часто при дослідженні оцінок приймають відношення СКВ h/σ_{φ} рівним 3 або 10), або $h(x)$ відрізняється від розподілу Гауса і має затягнуті хвости.

Переходити до робастного оцінювання слід при розподілі вибірки з довгими хвостами, ніж у розподілу Гауса.

Робастні оцінки повинні задовольняти двом основним вимогам:

- мало поступатися в ефективності оптимальним оцінкам при виконанні основної моделі, коли розподіл дійсно є гаусовським;
- залишатися досить добрими при відхиленнях від основної моделі, коли розподіл відмінний від гаусівського.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 14

Застосування робастних методів розглянемо на прикладі пошуку оцінки середнього по випадковій вибірці $x_1, \dots, x_n$, тобто стосовно обробки даних при прямих вимірюваннях з багатократними спостереженнями. Найчастіше використовується класична оцінка – середнє арифметичне результатів спостережень. Ця оцінка є якнайкращою при розподілі Гауса. Проте при відхиленнях від цього розподілу або при наявності викидів її властивості різко погіршуються: оцінка втрачає ефективність і сильно залежить від викидів.

Найбільш розробленим методом побудови робастних оцінок є узагальнений метод максимальної правдоподібності, в якому побудова оцінки виходить з умови

$$\min Q(\Psi) = \sum_1^n \Psi(x_i - a), \quad (2.2)$$

де a – математичне очікування випадкової величини.

При цьому вагова функція $\psi(x)$ вибирається так, щоб при великих $|x|$ вона зростала повільніше, ніж квадратична функція $|x|^2$, а при малих x була близька до x^2 . Тому М-оцінка, визначена умовою (2.2), слабо залежить від викидів (промахів) і хвостів, що впливають на розподіл, але при розподілі Гауса вибірка близька до середнього $\bar{x}$.

М-оцінки зазвичай не виражаються в явному вигляді, навіть при оцінці середнього. В цьому випадку вони є рішенням рівняння

$$\sum_1^n \varphi(x_i - a) = 0, \quad (2.3)$$

де $\varphi(x) = \Psi'(x)$, для вирішення цього рівняння зазвичай використовують ітераційні методи.

Найбільш поширеними на практиці є М-оцінки Хьюбера (Ψ_H), Хампеля (Ψ_{HA}), Андрюса (Ψ_A) і Тьюкі (Ψ_T); відповідні похідні вагових функцій $\Psi_H, \Psi_{HA}, \Psi_A$ і Ψ_T ($\varphi_H, \varphi_{HA}, \varphi_A$ і φ_T) наведені в таблиці 2.1.

У таблиці 2.1 аргумент вагової функції масштабують за допомогою залежності

$$x = \frac{x_i - a_l}{S}, \quad (2.4)$$

де x_i – елемент впорядкованої вибірки;

a_l – оцінка параметра зсуву, зазвичай беруть за початковий параметр зсуву медіану;

S – початкова оцінка параметра масштабу (стійка оцінка СКВ).

Таблиця 2.1

Оцінка	Вагова функція	Значення параметрів
Хьюбера	$\varphi_H(x) = \max[-c, \min(c, x)]$	$c=1,5$
Хампеля	$\varphi_{Ha}(x) = \begin{cases} x, & x \leq a; \\ a \operatorname{sign}(x), & a \leq x \leq b; \\ a \left(\frac{x - c \operatorname{sign}(x)}{b - c} \right), & b \leq x \leq c; \\ 0, & x \geq c \end{cases}$	$a=1.7;$ $b=3.4;$ $c=8.5$
Андрюса	$\varphi_A(x) = \begin{cases} \sin(x/c), & x \leq c\pi; \\ 0, & x > c\pi \end{cases}$	$c=2.1$
Тьюки	$\varphi_T(x) = \begin{cases} x[1 - (x/c)^2]^2, & x \leq c; \\ 0, & x > c \end{cases}$	Тьюки

Значення медіани, залежно від парної або непарної кількості елементів вибірки, визначається згідно виразу:

$$\operatorname{med} = \begin{cases} x'_{m+1} & \text{їдє } n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(x'_m + x'_{m+1}) & \text{їдє } n = 2m \end{cases} \quad (2.5)$$

Значення початкової оцінки параметра масштабу рекомендується визначати з наступного виразу:

$$S = 1,483 \operatorname{med}\{|x_i - \operatorname{med}(x_i)|\}. \quad (2.6)$$

Найбільший інтерес представляє оцінка Хьюбера, для якої функція Ψ_H в області $x \leq c$ є квадратичною, тобто відповідає розподілу Гауса, а в області $x > c$ — лінійною, тобто відповідає експоненціальному розподілу, який має хвости, що істотно «обважнюють» вибірку у порівнянні з розподілом Гауса. Оцінка Хьюбера є рішенням мінімаксної задачі: максимальна асимптотична дисперсія оцінки на класі засмічених розподілів Гауса для неї досягає мінімуму. Вона досить стійка до відхилень від розподілу Гауса.

Для вирішення рівняння (2.6), що визначає М-оцінку, можна застосувати ітераційну схему Гауса – Ньютона:

$$a_{l+1} = a_l + \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i - a_l)}{\sum_{i=1}^n \varphi'(x_i - a_l)}. \quad (2.7)$$

Виконавши один крок ітераційної процедури ми можемо зупинитися на однокроковій М-оцінці, яка дає цілком задовільні результати при використанні функції Хьюбера. Однокрокова М-оцінка з обрахуванням зсуву і масштабу матиме вигляд:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 16

$$a_{l+1} = a_l + S \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x_i - a_l}{S}\right) / \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x_i - a_l}{S}\right) \quad (2.8)$$

В даний частині робастний підхід перетворився в добре розроблену область статистики. Запропоновано численні і різноманітні оцінки, які поєднують високу ефективність при використанні основних моделей з достатньою стійкістю по відношенню до відхилень початкових даних від цих моделей. Для багатьох оцінок досліджено точність (стосовно до різних моделей) і розроблено апарат статистичних висновків.

Головна мета використання робастних методів – виключити вплив грубих похибок і промахів, до яких чутливі класичні методи. Однак, в класичній статистиці також наявні методи видалення промахів. Для цього можна використовувати двоступінчасту процедуру:

- виділити і виключити грубі похибки і промахи;
- застосувати до «відредагованих» даних, що залишилися, класичну процедуру оцінювання.

Корисно зіставити приведену двоступінчасту процедуру з одним із робастних методів. Дослідження показують, що кращою є, як правило, робастна процедура. Це обумовлено такими причинами:

1) при використанні двоступінчастої процедури не завжди вдається чітко розмежувати етапи, особливо для складних задач; наприклад, при побудові емпіричних залежностей грубі похибки важко виявити на основі класичних оцінок;

2) навіть ретельно «відредагована» вибірка, як правило, матиме розподіл, що відрізняється від гауса; тому застосування класичних методів все-таки залишається не цілком обґрунтованим;

3) більшість процедур виділення і виключення грубих похибок поступаються в ефективності робастним процедурам; крім того, вони можуть бути досить трудомісткими.

Тому переважними в більшості випадків є робастні процедури, оскільки вони допускають плавний перехід від повної вибірки до суттєвого скорочення даних з урахуванням властивостей конкретної вибірки. Ця перевага стає особливо наочною при переході до складніших задач, наприклад до побудови емпіричних залежностей. Таким чином, необхідно якнайширше використовувати робастні методи в вимірjuвальних задачах, для яких особливо важлива властивість стійкості результатів.

У тих випадках, коли по тих або інших причинах доцільно орієнтуватися на класичні методи, рекомендується паралельно застосовувати один з простих робастних методів; виконати, наприклад, однокрокову М-оцінку для контролю результатів і виявлення відхилень від моделі. Якщо немає суттєвої розбіжності між двома результатами, то можна зробити звичайні статистичні висновки на основі класичного підходу. Інакше необхідно ретельніше проаналізувати початкові дані та або виявити і відкинути промахи (а потім знову застосувати кла-

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 17

сичну процедуру), або орієнтуватися на один з точніших робастних методів, для яких є оцінки похибок. Така процедура забезпечить достовірність отриманих висновків і дозволить уникнути грубих помилок.

2.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Знайти однокрокову М-оцінку математичного очікування випадкової величини по методу Хьюбера і оцінку середньоарифметичного для контрольної вибірки у вигляді моделі засмічення у відповідності з варіантом завдання по таблиці 2.2.

2. Зробіть висновок по отриманих результатах.

2.3. Контрольні запитання

1. Які переваги робастних методів в порівнянні з класичними методами математичної статистики?

2. Назвіть найбільш поширені робастні оцінки.

3. Як визначається медіана вибірки?

4. Як визначаються початкова оцінка масштабу?

5. Як знаходяться М-оцінки?

6. Як визначається однокрокова М-оцінка?

7. У чому доцільність зіставлення оцінок, отриманих класичним методом, з робастною оцінкою?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1		Арк 56 / 18

Таблиця 2.2

Nb	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈
1	4.10	5.13	4.86	3.83	6.18	4.98	5.53	4.28	4.34	5.31	5.10	6.84	4.72	7.21	9.52	0.01	0.02	3.27
2	5.83	4.27	4.17	4.79	4.97	5.27	6.05	5.62	3.24	5.69	5.81	5.63	6.31	5.32	2.98	4.55	0.01	6.41
3	4.34	3.91	4.95	5.37	4.66	4.50	4.96	4.82	4.04	6.29	5.44	6.28	4.50	3.88	7.42	5.12	2.73	4.73
4	4.01	4.31	6.33	4.09	4.58	4.49	6.61	5.08	3.91	3.87	6.73	6.93	6.63	3.74	4.35	4.40	5.92	3.28
5	6.08	7.37	5.22	4.73	5.70	4.51	6.86	6.10	3.77	4.33	6.34	5.38	5.39	3.29	5.68	7.05	3.08	1.99
6	6.38	6.31	4.09	2.69	6.78	5.39	5.02	4.59	3.46	5.22	3.62	4.16	4.79	5.75	6.12	0.96	9.44	5.09
7	4.21	4.23	4.89	4.02	4.03	2.62	4.16	5.25	4.81	4.83	4.88	5.16	4.49	4.29	6.52	3.73	5.68	2.12
8	2.57	4.77	5.05	4.57	4.79	3.48	3.87	4.18	5.36	4.41	6.53	5.14	3.13	4.54	3.04	5.31	4.33	4.16
9	3.55	5.61	3.67	4.33	4.85	5.24	4.92	6.73	6.62	5.62	5.09	4.19	4.53	3.59	3.87	3.58	9.99	7.25
10	5.08	5.76	7.23	5.32	5.86	5.67	5.55	6.00	6.25	5.04	4.68	5.22	5.99	6.21	3.37	7.73	4.48	3.99
11	4.42	3.50	4.94	5.55	5.08	6.57	4.66	5.79	4.21	3.73	5.66	3.60	3.69	4.39	0.53	6.67	4.16	1.11
12	4.92	2.58	4.30	3.60	5.32	5.59	5.14	4.89	2.36	5.02	4.12	4.73	4.67	3.84	6.74	5.71	3.94	7.67
13	4.97	3.88	5.75	5.50	4.48	4.44	4.24	5.92	4.75	4.85	3.74	5.31	7.69	5.28	0.73	5.74	0.69	5.44
14	6.14	6.55	6.38	4.24	5.44	5.91	3.92	5.20	5.76	3.71	4.04	5.77	4.99	5.52	9.09	6.44	2.63	7.25
15	4.48	5.24	5.36	5.17	4.96	3.39	5.33	4.86	5.48	5.59	4.91	5.32	4.66	4.67	3.85	2.13	5.70	8.70
16	5.72	5.03	6.54	3.29	3.96	4.23	7.17	5.43	4.55	5.03	4.68	5.97	5.01	5.81	7.10	4.30	4.65	5.38
17	4.91	3.97	5.93	3.86	4.28	3.83	6.06	4.31	3.27	5.81	6.44	5.67	5.13	4.14	2.74	8.68	8.45	3.17
18	4.62	4.16	5.28	3.18	3.42	7.01	4.92	7.62	4.75	5.17	5.92	4.82	4.47	6.43	2.38	7.42	3.46	7.23
19	5.53	6.03	3.94	5.36	4.96	3.77	4.72	4.83	3.91	3.04	4.09	4.99	3.27	6.26	3.19	0.01	5.33	9.46
20	4.97	5.17	5.88	5.18	5.75	5.50	5.13	5.28	4.01	4.05	4.98	5.35	4.10	5.81	5.32	9.99	6.23	1.07
21	4.48	5.23	4.40	5.02	5.41	6.19	5.77	2.35	5.28	5.82	4.99	5.85	5.77	6.30	8.69	7.87	0.03	2.02
22	4.39	5.68	5.02	6.06	3.65	5.47	3.36	3.55	5.29	4.85	3.86	4.70	4.41	4.10	5.74	0.53	5.94	0.02
23	5.75	4.30	5.68	3.92	5.89	2.87	5.28	4.26	4.22	5.15	4.66	5.97	4.89	6.01	3.57	5.20	6.19	8.34
24	3.62	4.31	5.33	4.00	5.29	6.10	5.24	5.16	5.40	6.21	6.44	3.97	5.20	5.58	4.20	9.98	7.56	2.44
25	5.75	3.28	6.53	3.39	6.10	3.89	5.38	5.96	5.81	5.03	4.07	4.88	4.19	3.33	2.29	6.76	6.66	3.75

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 19

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

“ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО ОДНОРІДНІСТЬ ДВОХ ГРУП ДАНИХ”

Мета роботи:

Ознайомитися з непараметричним критерієм Колмогорова-Смирнова, призначеним для перевірки гіпотези однорідності двох груп даних.

3.1. Основні теоретичні відомості

При обробці даних нерідко виникає необхідність перевірки гіпотези однорідності декількох груп даних, тобто рівності функцій розподілу вибірок. Іноді буває необхідно перевірити збіг центрів розподілів (медіан) або однакове розсіювання декількох вибірок. Можна також перевірити певні властивості однієї вибірки, наприклад відповідність її заданій функції розподілу, гіпотези про симетрію, незалежність і однаковий розподіл (однорідності) членів вибірки. Всі ці гіпотези можна перевірити за допомогою непараметричних критеріїв.

Більшість непараметричних методів заснована на варіаційному ряду, який отримуємо, якщо члени початкової вибірки розташувати в порядку зростання: $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$.

Для перевірки однорідності двох вибірок часто використовується критерій Колмогорова-Смирнова, який заснований на порівнянні емпіричних функцій розподілів.

Нехай $F_{1n}(x)$ – емпірична функція розподілу випадкової величини X , побудована по вибірці $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ і $F_{2n}(x)$ – емпірична функція розподілу випадкової величини Y , побудована по вибірці $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$:

$$F_{1n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{x_i} \leq x, \quad \text{ää} \quad I_{x_i} = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \\ 0, & x_i > x \end{cases} \quad (3.1)$$

$$F_{2n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{y_i} \leq x, \quad \text{ää} \quad I_{y_i} = \begin{cases} 1, & y_i \leq x \\ 0, & y_i > x \end{cases} \quad (3.2)$$

і обчислюють відстані між ними:

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{F_{1n}(x) - F_{2n}(x)\}; \\ D_n^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \{F_{2n}(x) - F_{1n}(x)\}; \\ D_n &= \max(D_n^+, D_n^-). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для цих статистик відомі асимптотичні розподіли. Обчислені значення

$$z_n = D_n(\sqrt{n} + 0,275 - 0,04/\sqrt{n}), \quad (3.4)$$

$$z_n^{+(-)} = D_n^{+(-)}(\sqrt{n} + 0,12 + 0,11/\sqrt{n}) \quad (3.5)$$

порівнюють з критичними значеннями статистик Стефенса $\tilde{D}_n(q)$ і $\tilde{D}_n^{+(-)}(q)$ для декількох рівнів значущості q , приведених в табл. 3.1.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 20

Таблиця 3.1

	Рівень значущості q				
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,15
$\tilde{D}_n^{+(-)}(q)$	1,518	1,358	1,224	1,073	0,973
$\tilde{D}_n(q)$	1,628	1,480	1,358	1,224	1,138

При $z_n > \tilde{D}_n(q)$ або $z_n^{+(-)} > \tilde{D}_n(q)$ гіпотеза про однорідність двох вибірок на рівні значущості q відхиляється.

При використанні критерію Колмогорова-Смирнова корисно також накреслити графіки емпіричних функцій F_{1n} і F_{2n} , які дозволяють виявити особливості вибірок.

До переваг критерію Колмогорова-Смирнова можна віднести те, що в разі відмінні справжнього розподілу вибірки від гіпотетичного за допомогою цього критерію така відмінність буде виявлена (при досить великому числу спостережень n).

Приклад. Перевірити гіпотезу однорідності двох вибірок $X=[x_1, x_2, \dots, x_{10}]$ и $Y=[y_1, y_2, \dots, y_{10}]$, приведених в таблиці. 3.2 .

Таблиця 3.2

X	4,14	5,68	5,20	3,86	4,31	4,93	5,91	3,75	4,40	4,51
Y	5,98	6,76	6,42	5,65	5,98	5,10	0,50	3,74	4,72	5,34

Розташуємо члени початкові вибірки в порядку зростання: $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_{10}$ и $y'_1 \leq y'_2 \leq \dots \leq y'_{10}$ і приведемо їх в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

X	3,75	3,86	4,14	4,31	4,40	4,51	4,93	5,20	5,68	5,91
Y	0,50	3,74	4,72	5,10	5,34	5,65	5,98	5,98	6,42	6,76

Відстані між емпіричними функціями розподілу випадкових величин $F_{1n}(x)$ і $F_{2n}(x)$ приведені в табл. 3.4.

З табл.3.4 значення $D_n=0,4$ и $D_n^-=0,2$. Отримаємо у відповідності з (3.4) і (3.5) значення $z_n=1,323$ и $z_n^-=0,6617$. При рівні значущості $q=0,05$ $z_n < \tilde{D}_n(q)$ і $z_n^- < \tilde{D}_n^{+(-)}(q)$, що підтверджує однорідність двох груп даних.

Таблиця 3.4

x	$F_{1n}(x)$	$F_{2n}(x)$	$F_{1n}(x) - F_{2n}(x)$
0,5	0	0,1	-0,1
3,74	0	0,2	-0,2
3,75	0,1	0,2	-0,1
3,86	0,2	0,2	0
4,14	0,3	0,2	0,1
4,31	0,4	0,2	0,2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 21

4,4	0,5	0,2	0,3
4,51	0,6	0,2	0,4
4,72	0,6	0,3	0,3
4,93	0,7	0,3	0,4
5,1	0,7	0,4	0,3
5,2	0,8	0,4	0,4
5,34	0,8	0,5	0,3
5,65	0,8	0,6	0,2
5,68	0,9	0,6	0,3
5,91	1	0,6	0,4
5,98	1	0,7	0,3
5,98	1	0,8	0,2
6,42	1	0,9	0,1
6,76	1	1	0

3.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Провести перевірку гіпотези про однорідність двох груп даних, представлених двома варіантами завдання в табл. 2.2.
2. Зробіть висновок по отриманих результатах.

3.3. Контрольні запитання

1. У чому полягає різниця між параметричними і непараметричними методами обробки даних?
2. Як проводиться перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу помилок вимірювань по критерію W?
3. Як проводиться перевірка однорідності двох вибірок по критерію Пірсона χ^2 ?
4. Як проводиться перевірка однорідності двох вибірок по критерію Колмогорова-Смирнова?
5. Як проводиться перевірка однорідності двох вибірок по критеріях знаків і серій?
6. Як проводиться перевірка однорідності двох вибірок по рангових критеріях Манна-Уїтні і Вілкоксона?
7. Як проводиться перевірка однорідності двох вибірок по ранговому критерію Сижела-Тьюки?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 22

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

“ОСНОВИ ПРОВЕДЕННЯ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ”

Мета роботи:

Ознайомиться з основами проведення багатофакторних експериментів.

4.1. Основні теоретичні відомості

4.1.1. Основні поняття і визначення

Експеримент – сукупність операцій, що здійснюються над об'єктом дослідження з метою отримання інформації про його властивості. Експеримент, в якому дослідник на свій розсуд може змінювати умови його проведення, називається активним експериментом. Якщо дослідник не може самостійно змінювати умови його проведення, а лише реєструє їх, то це пасивний експеримент.

Вхідні параметри, які можуть бути змінені, називають факторами.

План експерименту – сукупність даних, що визначають число, умови і порядок проведення дослідів.

Дослід – це окрема експериментальна частина.

Планування експерименту – вибір плану експерименту, що задовольняє заданим вимогам, сукупність дій спрямованих на розробку стратегії експериментування (від отримання апріорної інформації до отримання працездатної математичної моделі або визначення оптимальних умов). Це цілеспрямоване управління експериментом, що реалізовується в умовах неповного знання механізму явища, що вивчається.

Мета планування експерименту – знаходження таких умов і правил проведення дослідів, при яких вдається отримати надійну і достовірну інформацію про об'єкт з найменшими витратами праці, а також представити цю інформацію в компактній і зручній формі з кількісною оцінкою точності.

Хай властивість Y об'єкту, що цікавить нас, залежить від декількох (n) незалежних змінних ($x_1, x_2, \dots, x_n$) і ми хочемо з'ясувати характер цієї залежності – $Y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, про яку ми маємо лише загальне уявлення. Величина Y називається “відгуком”, а сама залежність $Y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – це “функція відгуку”.

Для побудови ефективної математичної моделі доцільно провести попередній аналіз значущості факторів (міри впливу на функцію), їх ранжирування і виключити малозначні фактори.

Діапазони зміни факторів задають область визначення Y . Якщо прийняти, що кожному фактору відповідає координатна вісь, то отриманий простір називається факторним простором. При $n=2$ область визначення Y представляє собою прямокутник, при $n=3$ – куб, при $n > 3$ – гіперкуб.

При виборі діапазонів зміни факторів потрібно враховувати їх сумісність, тобто контролювати, щоб в цих діапазонах будь-які поєднання факторів можна

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 23

було реалізувати у дослідях і це не приводило до абсурду. Для кожного з факторів вказують граничні значення

$$X_{i\min} \leq X_i \leq X_{i\max}, \quad i=1\dots n. \quad (4.1)$$

Регресійний аналіз функції відгуку призначений для отримання її математичної моделі у вигляді рівняння регресії

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n; B_1, B_2, \dots, B_m) + e, \quad (4.2)$$

де $B_1, \dots, B_m$ – деякі коефіцієнти; e – похибка.

При використанні методів планування експерименту необхідно знайти відповіді на 4 питання:

- Які поєднання факторів і скільки таких поєднань необхідно узяти для визначення функції відгуку?
- Як знайти коефіцієнти $B_0, B_1, \dots, B_m$?
- Як оцінити точність представлення функції відгуку?
- Як використовувати отримане уявлення для пошуку оптимальних значень Y ?

4.1.2. Розкладання функції відгуку в степеневий ряд, кодування факторів

Якщо заздалегідь не відомий аналітичний вираз функції відгуку, то можна розглядати не саму функцію, а її розкладання, наприклад в степеневий ряд у вигляді полінома

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + \dots + B_n X_n + B_{12} X_1 X_2 + \dots + B_{nn-1} X_n X_{n-1} + B_{11} X_1^2 + \dots + B_{nn} X_n^2 + \dots \quad (4.3)$$

Розкладання функції в степеневий ряд можливо в тому випадку, якщо сама функція є неперервною і гладкою. На практиці зазвичай обмежуються числом членів степеневого ряду і апроксимують функцію поліномом деякої міри.

Фактори можуть мати різні розмірності (A, B, B_m) і значно відрізнятися кількісно. У теорії планування експерименту використовують кодування факторів.

Ця операція полягає у виборі нового масштабу для кодованих факторів, причому такого, щоб мінімальне значення кодованих факторів відповідало “-1”, а максимальне значення “+1”, а також в перенесенні початку координат в точку з координатами $X_{1cp}, X_{2cp}, \dots, X_{ncp}$

$$X_{i\delta} = \frac{X_{i\min} + X_{i\max}}{2}. \quad (4.4)$$

Поточне значення кодованого фактора

$$x_i = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{icp} - X_{imin}} = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{imax} - X_{icp}} = \frac{2X_i - X_{imax} - X_{imin}}{X_{imax} - X_{imin}}, \quad (4.5)$$

де X_i – іменоване (абсолютне) значення фактора; x_i – кодоване значення фактора; $X_{icp} - X_{imin} = X_{imax} - X_{icp}$ – інтервал варіювання фактора.

Функція відгуку може бути виражена через кодовані фактори $Y = f(x_1, \dots, x_n)$ і записана в поліноміальному вигляді

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{nn-1} x_n x_{n-1} + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2 + \dots \quad (4.6)$$

Очевидно, що $B_i \neq b_i$, та

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 24

$$Y=F(X_1, X_i, X_n)=f(x_1, x_i, x_n). \quad (4.7)$$

Для полінома, записаного в кодованих факторах, ступінь впливу фактора або їх поєднань на функцію відгуку визначається величиною їх коефіцієнта b_i . Для полінома в іменованих факторах величина коефіцієнта B_i ще не вказує однозначно на ступінь впливу цього фактора або їх поєднань на функцію відгуку.

Якщо вважати, що існує фактора x_0 завжди рівний 1, то

$$b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \sum_{i=0}^n b_ix_i. \quad (4.8)$$

Якщо додатково всі подвійні, потрійні і так далі поєднання факторів, а також квадрати факторів і всі відповідні їм коефіцієнти позначити через x_i і b_i для $i=n+1, \dots, m$, то степеневий ряд можна записати у вигляді

$$Y = \sum_{i=0}^m b_ix_i. \quad (4.9)$$

В даному випадку $m+1$ – загальне число доданків ряду.

4.1.3. Матричні перетворення при обробці результатів експерименту

При матричному записі результатів різних дослідів N для поліноміального представлення результату $Y_u = \sum_{i=0}^m b_ix_{iu}$ матимемо рівняння

$$Y = X \cdot B; \quad (4.10)$$

де: X - матриця поєднань чинників

$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ x_{02} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0u} & x_{1u} & x_{2u} & \dots & x_{iu} & \dots & x_{mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{iN} & \dots & x_{mN} \end{pmatrix}.$$

В даному випадку $0, 1, \dots, i, \dots, m$ – номери доданків рівняння; $1, \dots, u, \dots, N$ – номери дослідів. Матриця X – прямокутна і містить $m+1$ стовпців і N рядків.

Якщо врахувати, що в матриці X елементи $x_{0u}=1$, $u=1, \dots, N$, то матриці X , Y , B можна записати у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1u} & x_{2u} & \dots & x_{iu} & \dots & x_{mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{iN} & \dots & x_{mN} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_u \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 25

де: Y – матриця-стовпець результатів дослідів, B – матриця-стовпець коефіцієнта полінома.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (4.10) на транспоновану матрицю X_t :

$$X_t \cdot X \cdot B = X_t \cdot Y. \quad (4.12)$$

Матриця $C = X_t X$, що отримана в результаті множення на транспоновану матрицю, є квадратною матрицею, що містить $m+1$ рядків і $m+1$ стовпців.

Запишемо (4.12) у вигляді:

$$C \cdot B = X_t \cdot Y. \quad (4.13)$$

Для того, щоб отримати в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів, необхідне помножити обидві частини матричного рівняння (4.13) зліва на матрицю C^{-1} (матрицю, зворотну матриці C).

$$C^{-1} \cdot C \cdot B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \quad (4.14)$$

Зворотна матриця будується так, що при множенні її на початкову матрицю виходить одинична матриця E , у якої на головній діагоналі розташовані 1, а поза нею – 0.

$$\tilde{N}^{-1} \cdot \tilde{N} = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Запишемо в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів полінома

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \quad (4.16)$$

Розглянемо, як простий приклад, поліном у вигляді:

$$Y_u = b_0 x_0 + b_1 x_u; \quad x_0 = 1; \quad u = 1, \dots, N; \quad (4.27)$$

який сформованого за результатами N дослідів.

$$C = X_t \cdot X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_u \\ \dots & \dots \\ 1 & x_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & \dots & \sum_{u=1}^N x_u \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{u=1}^N x_u & \dots & \sum_{u=1}^N x_u^2 \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

$$X_t \cdot Y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_u \\ \dots \\ y_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \\ \dots \\ \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{vmatrix}.$$

Зворотна матриця C^{-1} для матриці C має вигляд:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 26

$$C^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N x_u^2 & -\sum_{u=1}^N x_u \\ -\sum_{u=1}^N x_u & N \end{vmatrix}, \quad (4.19)$$

де D – визначник матриці C .

На основі виразу (4.16) отримаємо:

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N x_u^2 & -\sum_{u=1}^N x_u \\ -\sum_{u=1}^N x_u & N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \\ \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{vmatrix} = \frac{1}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u^2 - \sum_{u=1}^N x_u y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u \\ -\sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u + N \sum_{u=1}^N x_u y_u \end{vmatrix}.$$

Звідси вирішення системи рівнянь щодо коефіцієнтів b_0 і b_1 :

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u^2 - \sum_{u=1}^N y_u x_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}, \quad (4.20)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N y_u x_u - \sum_{u=1}^N y_u \cdot \sum_{u=1}^N x_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}. \quad (4.21)$$

Цей результат повністю збігається з співвідношеннями для такого ж полінома при використанні методу найменших квадратів, де використовується чисельний показник мінімальності суми квадратів відхилень у всіх N дослідах. Отже, побудований таким чином поліном буде найбільш близький до точних значень результатів експерименту.

Елементи вектора B матричного рівняння (4.10) можна знайти, використовуючи програму MATLAB.

Запишемо програму пошуку коефіцієнтів b в наступному вигляді:

```
%Знаходження коефіцієнтів рівняння регресії
function kregres
X=input ('Введітьзапроваджуйте значення матриці
X[...]' )
Y=input ('Введітьзапроваджуйте значення транспонованого
вектора Y[...]' )
%Знаходження зворотної матриці
D=inv (X'*X);
%Знаходження коефіцієнтів рівняння регресії
B=D*X'*Y';
B=B';
%Знаходження ширини матриці X
```

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 27

```

n=length(X(1,:));
disp('Виведення коефіцієнтів рівняння регресії')
for j=1:1:n
i=j-1;
b=B(j);
disp(['b' num2str(i) ' = ' num2str(b)])
end
disp('Виведення обчисленихобчислити значень відгуку
Y(Yv)')
Yv=(X*B)
disp('Виведення різниці значень експериментального від-
гуку і обчисленогообчислити')
DE=(Y'-Yv)

```

Наведемо приклад знаходження коефіцієнтів наступного рівняння регресії:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Для зручності обчислень переписемо це рівняння у вигляді

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5,$$

де: $x_3 = x_1x_2$, $x_4 = x_1^2$, $x_5 = x_2^2$.

Запишемо результати дослідів в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

<i>u</i>	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y'	y	$y'-y$
1	1	1	1	1	1	1	10,4	10,1889	0,2111
2	1	-1	1	-1	1	1	2,2	2,0889	0,1111
3	1	1	-1	-1	1	1	0,2	0,2222	-
4	1	-1	-1	1	1	1	-2,0	-1,8778	-
5	1	0	0	0	0	0	0,7	0,5222	0,1778
6	1	1	0	0	1	0	3,9	4,0889	-
7	1	0	1	0	0	1	4,8	5,1222	-
8	1	-1	0	0	1	0	-1,0	-1,0111	0,0111
9	1	0	-1	0	0	1	-1,7	-1,8444	0,1444

Результати обчислень за програмою *kregres* наводимо нижче.

kregres

Введіть значення матриці $X[...][1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

```

1 -1 1 -1 1 1
1 1 -1 -1 1 1
1 -1 -1 1 1 1
1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 1 0
1 0 1 0 0 1
1 -1 0 0 1 0

```

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 28

1 0 -1 0 0 1];

Введіть значення транспонованого вектора $Y[...]$ [10.4
2.2 0.2 -2 07 3.9 4.8 -1 -1.7]

Виведення коефіцієнтів рівняння регресії

$b_0 = 0.52222$

$b_1 = 2.55$

$b_2 = 3.4833$

$b_3 = 1.5$

$b_4 = 1.0167$

$b_5 = 1.1167$

Виведення обчислених значень відгуку $Y(Yv)$

$Yv =$

10.1889 2.0889 0.2222 -1.8778 0.5222
4.0889 5.1222 -1.0111 -1.8444

Виведення різниці значень експериментального відгуку і обчисленого

$DE =$

0.2111 0.1111 -0.0222 -0.1222 0.1778 -
0.1889 -0.3222 0.0111 0.1444

Занесемо в табл. 4.1 обчислені значення відгуку і різницю між результатами дослідів та обчисленими значеннями.

4.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Знайти коефіцієнти рівняння регресії наступного вигляду:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

відповідно до варіанту завдання по табл. 4.2. Значення x для експериментів U_1 ... U_8 беруться з табл. 4.1 у відповідності з варіантом завдання.

2. Зробити висновок по отриманих результатах.

4.3. Контрольні запитання

1. У чому полягає процедура пасивного експерименту?

2. У чому полягає процедура активного експерименту?

3. Що таке планування експерименту?

4. Яка мета планування експерименту?

5. Як проводиться кодування факторів?

6. У якому вигляді записується функція відгуку?

7. Як знаходяться коефіцієнти функції відгуку?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1		Арк 56 / 29

Таблиця 4.2

№	u	y'	№	u	y'	№	u	y'	№	u	y'	№	u	y'
1	1	9,7	6	1	7,7	11	1	6,9	16	1	5,7	21	1	7,5
	2	1,2		2	0,9		2	0,8		2	-1,1		2	-0,5
	3	3,4		3	0,2		3	0,4		3	1,6		3	1,9
	4	-0,6		4	-3,3		4	-2,7		4	-2,3		4	-2,2
	5	2,1		5	0,7		5	0,6		5	0,5		5	1,3
	6	6,1		6	3,9		6	3,8		6	3,3		6	4,6
	7	4,3		7	3,7		7	3,2		7	2,2		7	3,2
	8	-0,3		8	-1,1		8	-1,4		8	-2,1		8	-1,7
	9	0,6		9	-2,3		9	-1,7		9	-0,8		9	-0,5
2	1	7,4	7	1	5,5	12	1	9,5 1,1 3,5 -0,59 2,02 6,09 4,46 -0,21 0,52	17	1	7,4 1,5 -2,4 0,4 3,3 2,1 -2 - 0,6	22	1	7,2
	2	1,1		2	-0,9		2	1,4		2	-0,7		2	0,6
	3	0,1		3	1,3		3	3,3		3	2,1		3	0,5
	4	-3,5		4	-2,2		4	-0,5		4	-2,2		4	-2,6
	5	0,6		5	0,3		5	1,8		5	1,3		5	0,5
	6	4,1		6	3,5		6	6,3		6	4,4		6	3,8
	7	3,5		7	1,9		7	4,3		7	3,4		7	3,1
	8	-1,3		8	-2		8	-0,1		8	-1,7		8	-1,1
	9	-2,1		9	-0,5		9	0,4		9	-0,3		9	-1,8
3	1	6,8	8	1	7,2 1,5 -2,4 0,4 3,3 2,1 -2 - 0,6	13	1	8	18	1	10,1 1,1 3,5 -0,59 2,02 6,09 4,46 -0,21 0,52	23	1	5,9
	2	0,7		2	-0,5		2	0,7		2	0,9		2	-1,3
	3	0,6		3	1,7		3	0,3		3	3,7		3	1,7
	4	-2,9		4	-2,5		4	-3,1		4	-0,6		4	-2,6
	5	0,7		5	1,1		5	0,8		5	2,2		5	0,5
	6	3,4		6	4,8		6	3,7		6	5,9		6	3,1

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015											Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020	
	Екземпляр № 1											Арк 56 / 30	

	7	3,2		7	3,1		7	3,6		7	4,7		7	2,2
	8	-1,3		8	-1,5		8	-1,1		8	-0,2		8	-2
	9	-1,6		9	-0,5		9	-2,4		9	0,6		9	-0,7
4	1	5,6	9	1	7,5	14	1	7,8 1,5 -2,4 0,4 3,3 2,1 -2 - 0,6	19	1	7,1	24	1	9,6 1,1 3,5 -0,59 2,02 6,09 4,46 -0,21 0,52
	2	-1		2	1		2	-0,6		2	0,8		2	1,2
	3	1,4		3	0,3		3	2		3	0,4		3	3,4
	4	-2,3		4	-3,4		4	-2,1		4	-2,7		4	-0,7
	5	0,4		5	0,7		5	1,3		5	0,6		5	1,9
	6	3,4		6	4		6	4,5		6	3,7		6	6,2
	7	2,1		7	3,8		7	3,3		7	3,3		7	4,4
	8	-2		8	-1,4		8	-1,6		8	-1,1		8	-0,3
	9	-0,5		9	-2,3		9	-0,4		9	-1,7		9	0,5
5	1	7,3 1,5 -2,4 0,4 3,3 2,1 -2 - 0,6	10	1	6,9	15	1	5,7	20	1	9,9 1,1 3,5 -0,59 2,02 6,09 4,46 -0,21 0,52	25	1	7,9
	2	-0,7		2	0,6		2	-1,1		2	1,1		2	0,8
	3	1,8		3	0,5		3	1,6		3	3,6		3	0,2
	4	-2,5		4	-2,9		4	-2,5		4	-0,5		4	-3,2
	5	1,2		5	0,5		5	0,3		5	2,1		5	0,8
	6	4,7		6	3,5		6	3,2		6	6		6	3,9
	7	3,2		7	3		7	2,3		7	4,6		7	3,4
	8	-1,7		8	-1,2		8	-2		8	-0,1		8	-1,2
	9	-0,3		9	-1,8		9	-0,6		9	0,4		9	-2,1

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 31

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

“ВИКОНАННЯ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ НА ОСНОВІ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ”

Мета роботи:

Ознайомитися з процедурою проведення ортогонального планування експерименту.

5.1. Основні теоретичні відомості

5.1.1. Ортогональне планування експерименту

Структура матриці C відіграє важливу роль в реалізації алгоритму визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома. Структура цієї матриці залежить від вибору значень факторів в N дослідах. Тому бажано особливим чином вибирати значення факторів в дослідах.

Елемент C_{ii} на головній діагоналі матриці C (i -тий рядок, i -тий стовпець) представляється сумою квадратів значень i -того стовпця поєднань факторів матриці X в N дослідах

$$C_{ii} = \sum_{U=1}^N X_{iU}^2, \quad i=0,1,2,\dots,m. \quad (5.1)$$

Елементи матриці симетрично розташовані відносно головної діагоналі та рівні між собою, тобто матриця C – симетрична.

$$C_{ij}=C_{ji}, \quad i,j=0,1,2, \dots, m, \quad (5.2)$$

При цьому перший індекс вказує номер стовпця матриці X , другий індекс – номер рядка.

Тоді

$$\tilde{N}_{ij} = \sum_{U=1}^N x_{iU} x_{jU}, \quad C_{ji} = \sum_{U=1}^N x_{jU} x_{iU} \quad (5.3)$$

Щоб існувала матриця C^{-1} , матриця C розміру $(1+m; 1+m)$ має бути не виродженою, тобто її визначник має бути відмінний від нуля. Ця умова виконується, якщо всі $m+1$ стовпці матриці X лінійно незалежні. Крім того, необхідно, щоб число різних поєднань факторів в матриці X (число дослідів N) повинно бути не менше, ніж $m+1$. Ця умова виходить з того, що для визначення $m+1$ коефіцієнтів полінома необхідно не менше $m+1$ рівнянь (дослідів).

Отримані коефіцієнти B дозволяють сформулювати рівняння функції відгуку при $m+1$ членах рівняння. Якщо точність цього рівняння виявилася недостатньою, то потрібно узяти рівняння з великим числом членів і почати все заново, оскільки всі коефіцієнти B виявляються залежними один від одного. Це виникає при використанні пасивного експерименту. Проте, якщо цілеспрямовано використовувати активний експеримент і особливим чином побудувати матрицю поєднань факторів в дослідах X , тобто планувати експеримент, то коефіцієнти полінома визначаються незалежно один від одного.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 32

Стратегія застосування планів полягає в принципі поступового планування – поступового ускладнення моделі. Починають з простої моделі, знаходяться для неї коефіцієнти, визначаються її точність. Якщо точність не задовольняє, то планування і модель поступово ускладнюються.

Задача планування полягає в тому, як побудувати матрицю X , щоб матриця C_{ij} легко оберталася і коефіцієнти B визначалися незалежно один від одного. Ці вимоги виконуються, якщо матриця C_{ij} є діагональною, тобто всі її елементи, що розташовані не на головній діагоналі, дорівнюють нулю:

$$C_{ij}=0; \quad i \neq j; \quad i, j=0, 1, 2, \dots, m; \quad (5.4)$$

або

$$\tilde{N} = \begin{vmatrix} \tilde{N}_{00} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_{mm} \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Тоді зворотна матриця визначається як

$$\tilde{N}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tilde{N}_{00}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{N}_{11}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\tilde{N}_{ii}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{C_{mm}} \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

В цьому випадку система рівнянь розпадається на $m+1$ незалежних рівнянь і коефіцієнти полінома визначаються як

$$b_i = \frac{1}{C_{ii}} \sum_{u=1}^N (x_{iu} y_u); \quad i=0, 1, 2, \dots, m. \quad (5.7)$$

Якщо врахувати, що C_{ii} визначається як сума квадратів значень факторів

$$C_{ii} = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2, \quad (5.8)$$

то коефіцієнти визначаються як

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2} \quad (5.9)$$

Вимога виконання умови $C_{ij} = C_{ji} = 0$ полягає у виконанні умови

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 33

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} x_{iu} = 0, \quad (5.10)$$

де i, j – номери стовпців в матриці X ; $i, j = 0, 1, 2, \dots, m$; при $i \neq j$.

Кожен стовпець матриці X можна представити у вигляді вектора

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iu} \\ \vdots \\ x_{iN} \end{pmatrix}, \quad X_j = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{ju} \\ \vdots \\ x_{jN} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Якщо, $X_i \cdot X_j = \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0$, то це означає, що скалярний добуток двох векторів

X_i і X_j дорівнює нулю, тобто вектори X_i і X_j – ортогональні.

Оскільки будь-який скалярний добуток двох різних стовпців в матриці X має дорівнювати нулю, то ця умова називається умовою ортогональності матриці X , а відповідне планування експерименту (визначення поєднань факторів) називається ортогональним плануванням.

Для ортогонального планування (при $u=1, \dots, N$)

$$\sum_{u=1}^N x_{0u} x_{iu} = \sum_{u=1}^N x_{iu} = 0. \quad (5.12)$$

Таким чином, при ортогональному плануванні сума елементів будь-якого стовпця матриці X , окрім першого, повинна дорівнювати нулю. Це правило використовується при побудові плану експерименту, тобто як потрібно змінювати значення факторів в дослідах. Це правило показує, що в ортогональному плануванні при парному числі рівнів, на яких фіксується кожен фактор, ці рівні мають бути симетрично розташовані відносно центральної точки $x=0$. При непарному числі рівнів повинна використовуватися і центральна точка.

5.1.1. Плани повного факторного експерименту 2^n (плани ПФЕ 2^n)

Плани ПФЕ 2^n є простими планами першого порядку. Основа 2 означає, що прийнято два рівні варіювання, на яких фіксуються фактори, n – число чинників.

Для плану ПФЕ 2^2 число факторів рівне двом ($n=2$) і число рівнів фіксації факторів також 2. Значення кодованих факторів вибираються у вигляді $+1$ і -1 . Повне число можливих поєднань значень n факторів (число дослідів, а значить і число рядків плану) $N=2^2=4$. Складається план, в якому число стовпців чинників і їх поєднань дорівнює числу доданків у рівнянні. Так для рівняння

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad m+1=6. \quad (5.13)$$

План ПФЕ 2^2 для цього рівняння представляється в наступному вигляді (табл. 5.1).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 34

Таблиця 5.1

i	0	1	2	3	4	5	
u	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	$x_4 = x_1^2$	$x_5 = x_2^2$	y
1	1	-1	-1	1	1	1	y_1
2	1	1	-1	-1	1	1	y_2
3	1	-1	1	-1	1	1	y_3
4	1	1	1	1	1	1	y_4
$\sum_{u=1}^N x_{iu}$	4	0	0	0	4	4	

В першому стовпці ($i=0$) у всі чотири комірки заносяться +1. В другому стовпці ($i=1$) заносяться одиниці із змінними знаками (починаємо з -1). В цьому випадку сума елементу стовпця дорівнює нулю. Третій стовпець заповнюємо одиницями із знаками, що чередуються через 2 елементи. Сума елементів також дорівнює нулю.

Елементи стовпців, відповідних добуткам факторів, отримують шляхом перемноження елементів попередніх стовпців. Таке правило дозволяє гарантувати, що ми не пропустили жодного можливого поєднання факторів в досліді і в той же час не буде повторень однакових факторів. Останні два стовпці факторів, відповідні їх квадратам, містять тільки +1. Стовпці, обведені потовщеною рамкою, утворюють план експерименту. Стовпець $x_1 x_2$, не обведений потовщеною рамкою, при проведенні дослідів носить допоміжний характер.

Особливості плану ПФЕ 2^n :

1. Різних стовпців в табл. 5.1 вийшло лише чотири. Стовпці, відповідні квадратам факторів, невідмітні від стовпця x_0 , – це загальний результат для плану ПФЕ 2^n . Це не дозволяє визначити окремо коефіцієнти при квадратах факторів. Тому плани ПФЕ 2^n називають планами першого порядку. Для визначення коефіцієнтів при квадратах факторів використовують плани другого порядку. Надалі в планах ПФЕ 2^n стовпці квадратів факторів зображатися не будуть.

2. Число різних стовпців дорівнює числу різних поєднань факторів, тобто числу рядків плану – числу дослідів N . Це теж загальний результат для цих планів, тобто за допомогою планів ПФЕ 2^n можна визначити всі коефіцієнти лінійного полінома з всіма можливими поєднаннями факторів, включаючи коефіцієнти $b_{12\dots n}$, що відображають максимальну взаємодію факторів виду $x_1 x_2 \dots x_n$.

3. У плані ПФЕ 2^n сума квадратів елементів будь-якого стовпця

$$\sum x_{iu}^2 = 2^n = N.$$

Звідси на основі (5.7) для планів ПФЕ 2^n

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 35

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{N}. \quad (5.14)$$

Для плану ПФЕ 2^3 число факторів $n = 3$. Виконується $N = 2^3 = 8$ дослідів. Рівняння може містити до восьми членів

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (5.15)$$

Таким чином формується план з восьми рядків і восьми стовпців. У четвертому стовпці ($i=3$) записуються одиниці із знаками, що змінюються через чотири елементи. План складається подібно плану ПФЕ 2^2 .

5.1.2. Плани другого порядку

Плани другого порядку дозволяють сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, який містить більше число доданків, ніж неповний квадратичний поліном, сформований по планах першого порядку, і тому вимагають більшого числа виконуваних дослідів. Повний квадратичний поліном при $n=2$ містить 6 доданків

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad (5.16)$$

при $n = 3$ містить 11 доданків

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \quad (5.17)$$

Відомо, що для отримання квадратичної залежності кожен фактор повинен фіксуватися як мінімум на трьох рівнях.

Для планів другого порядку область планування може:

- Бути природною, тобто включати область планування для планів першого порядку і додаткові точки (такі плани називаються композиційними). Додаткові точки можуть виходити за область плану першого порядку – одиничного гіперкуба. В цьому випадку досліди в них реалізуються при встановленні факторів за межами варіювання. Це треба враховувати при визначенні області сумісності факторів.

- Не виходити за межі одиничного гіперкуба.
- Не виходити за межі одиничної гіперкулі.

У другому і третьому випадках використовують спеціальні прийоми виконання приведених співвідношень в плані. План з однією областю планування можна перебудувати в план з іншою областю планування.

Якщо вже був раніше сформований план ПФЕ, але точність його функції відгуку не задовольняє, то ми можемо добудувати цей план до плану другого порядку і сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома без втрати інформації про раніше зроблені дослідів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 36

5.1.3. Ортогональний центрально-композиційний план другого порядку

Як було визначено, ортогональним планом називається такий план, в якому матриця планування X будується так, що матриця $C=X_tX$ є діагональною. Використаємо цей підхід і при побудові планів другого порядку. План називається центральним, якщо всі точки розташовані симетрично щодо центру плану. ОЦКП – ортогональний центральний симетричний композиційний план.

У ОЦКП входять: ядро – план ПФЕ з $N_0 = 2^n$ точками плану, n_0 (одна для цього плану) центральна точка плану ($x_i=0, i=1,2,3, \dots n$) і по дві точки для кожного фактору

$$x_i = \pm\lambda, \quad x_j = 0, \quad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,n, \quad i \neq j, \quad (5.18)$$

де λ – плече цих точок.

Загальна кількість точок в плані ОЦКП

$$N=2^n + 2n + n_0, \quad (5.19)$$

де для ОЦКП $n_0=1$.

При $n > 2$ в ОЦКП менша кількість точок, ніж в плані ПФЕ 3^n . Число точок в плані для ОЦКП і ПФЕ 3^2 при n від 2 до 6 дано в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

n	2	3	4	5	6
ОЦКП	9	15	25	43	77
ПФЭ 3^n	9	27	81	243	729

Для ортогонального плану необхідно, щоб виконувалося співвідношення (5.12). Це означає необхідність виконання вимоги, щоб сума елементів будь-якого стовпця (окрім $j=0$), включаючи стовпці, відповідні квадратам чинника, мала дорівнювати нулю. Це можливо, якщо елементистовпців, відповідних квадратам факторів, перетворені, інакше сума квадратів факторів не може дорівнювати нулю.

Перетворення елементів цих стовпців здійснюється у вигляді

$$x'_{ju} = x_{ju}^2 - \hat{a}, \quad (5.20)$$

де a – величина, залежна від числа факторів.

Сума елементів стовпця, відповідного квадратам факторів

$$\sum_{u=1}^N x'_{ju} = \sum_{u=1}^N (x_{ju}^2 - a) = \sum_{u=1}^N x_{ju}^2 - N \cdot a = 0. \quad (5.21)$$

Звідки

$$\hat{a} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{ju}^2}{N}. \quad (5.22)$$

У ОЦКП кожен фактор фіксується в загальному випадку на п'яти рівнях ($-\lambda - 1, 0, 1, +\lambda$).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 37

Для визначення невідомих “ a ” і “ λ ” потрібно сформулювати і вирішити систему з двох рівнянь. Одне з них для “ a ” ми записали раніше. Інше рівняння отримаємо з умови ортогональності для стовпців x'_{4u} і x'_{5u} :

$$\sum_{u=1}^N x'_{4u} \cdot x'_{5u} = N_0(1-a)^2 - 4a(\lambda^2 - a) + a^2(2n-4) + n_0a^2 = 0. \quad (5.23)$$

Після простих перетворень з урахуванням того, що $N=N_0+2n+n_0$ – загальне число дослідів в плані, отримуємо співвідношення

$$\frac{N_0}{N} - 2a \cdot \frac{N_0 + 2\lambda^2}{N} + a^2 = 0. \quad (5.24)$$

Співвідношення для a при $j=1, 2$ або 3 може бути записано як

$$\hat{a} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{ju}^2}{N} = \frac{N_0 + 2 \cdot \lambda^2}{N}. \quad (5.25)$$

Підставивши його в рівняння (5.24), отримуємо

$$\frac{N_0}{N} - 2a^2 + a^2 = 0, \quad (5.26)$$

звідки константа перетворення a

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}}. \quad (5.27)$$

Тоді

$$\frac{N_0 + 2a^2}{N} = a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} \quad (5.28)$$

і плече точок

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0)}. \quad (5.29)$$

Значення параметрів ОЦКП при числі факторів n приведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

n	2	3	4	5	6	7	8
λ	1	1,215	1,414	1,596	1,761	1,909	2,045
a	0,667	0,73	0,8	0,86	0,91	0,946	0,968
N	9	15	25	43	77	143	273

5.1.4. Перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії і адекватності рівняння експерименту

Для оцінки значущості коефіцієнтів рівняння регресії і перевірки адекватності рівняння експерименту досить провести серію паралельних дослідів, виконаних при якомусь одному поєднанні факторів.

Хай в центрі плану (у точках (X_{10}, X_{20}) і (X_{10}, X_{20}, X_{30}) для ПФЕ 2^2 і 2^3 відповідно) проведена серія з m дослідів. Тоді вибіркова дисперсія відтворюваності, що характеризує вплив випадкових факторів, дорівнює:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 38

$$s_{\text{вoсnp}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (y_{i0} - \bar{y}_0)^2}{m-1}, \quad (5.30)$$

де y_{i0} – результат i -го дослідження ($i = 1, 2, m$), $\bar{y}_0$ – середнє значення серії дослідів. У математичній статистиці доводиться, що для спланованих експериментів всі коефіцієнти рівнянь регресії визначаються з однаковою випадковою похибкою, рівною

$$s(b_j) = \frac{s_{\text{âmîð}}}{\sqrt{N}}. \quad (5.31)$$

Значущість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стюдента. В умовах нульової гіпотези H_0 відношення абсолютної величини коефіцієнта до його помилки має розподіл Стюдента. Для кожного коефіцієнта визначається t -відношення:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} = \frac{|b_j|}{s_{\text{вoсnp}}} \sqrt{N}, \quad (5.32)$$

яке порівнюється з табличним значенням критерію Стюдента $t_\gamma(k)$ (додаток 1) для вибраного рівня значущості $q=1-\gamma$ (зазвичай q береться 0,05) і числа степенів свободи $k = m-1$. Якщо для даного коефіцієнта $t_j > t_\gamma(k)$, то він значно відрізняється від нуля. Вибіркові коефіцієнти, для яких $t_j \leq t_\gamma(k)$, незначущі, і їх слід виключити з рівняння регресії.

Допустимо, при перевірці значущості коефіцієнтів рівняння (5.15) виявилось, що всі коефіцієнти, що характеризують ефекти взаємодії факторів, незначущі. Після їх виключення отримуємо рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad (5.33)$$

при цьому значення b_0 , b_1 , b_2 і b_3 не потрібно обчислювати наново через те, що коефіцієнти рівняння некорельовані між собою. На відміну від класичного регресійного аналізу, виключення незначущого коефіцієнта не позначається на величинах решти коефіцієнтів рівняння регресії, а самі вибіркові коефіцієнти, отримані при реалізації ПФЕ, є незмішаними оцінками теоретичних коефіцієнтів.

Адекватність рівняння перевіряється по критерію Фішера

$$F = (s_{\text{аd}}^2 / s_{\text{вoсnp}}^2). \quad (5.34)$$

Дисперсія адекватності (залишкова дисперсія) дорівнює:

$$s_{\text{âä}}^2 = s_{\text{îñð}}^2 = \frac{1}{N-l} \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2, \quad (5.35)$$

де l — число значущих коефіцієнтів (для даного випадку $l = 4$). Рівняння адекватно описує експеримент, якщо

$$F \leq F_{1-q}(k_1, k_2), \quad (5.36)$$

де $F_{1-q}(k_1, k_2)$ — табличне значення критерію Фішера (додаток 3) для $q=0,05$ і числа степенів свободи $k_1=k_{\text{ад}}=N-l$ і $k_2=k_{\text{вoсnp}}=m-1$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 39

Розглянемо також схему проведення регресійного аналізу для спланованого експерименту у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторювався m разів. Як приклад, візьмемо ПФЕ 2^3 і при отриманні рівняння регресії обмежимося лінійним наближенням (рівняння (5.33)). Матриця планування такого експерименту представлена в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

№	x_0	x_1	x_2	x_3	y	$\bar{y}_i$	s_i^2
1	+1	-1	-1	-1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$	$\bar{y}_1$	s_1^2
2	+1	+1	-1	-1	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$	$\bar{y}_2$	s_2^2
3	+1	-1	+1	-1	$y_{31}, y_{32}, \dots, y_{3m}$	$\bar{y}_3$	s_3^2
4	+1	+1	+1	-1	$y_{41}, y_{42}, \dots, y_{4m}$	$\bar{y}_4$	s_4^2
5	+1	-1	-1	+1	$y_{51}, y_{52}, \dots, y_{5m}$	$\bar{y}_5$	s_5^2
6	+1	+1	-1	+1	$y_{61}, y_{62}, \dots, y_{6m}$	$\bar{y}_6$	s_6^2
7	+1	-1	+1	+1	$y_{71}, y_{72}, \dots, y_{7m}$	$\bar{y}_7$	s_7^2
8	+1	+1	+1	+1	$y_{81}, y_{82}, \dots, y_{8m}$	$\bar{y}_8$	s_8^2

Для кожного поєднання рівнів факторів визначається середнє значення вимірюваної величини і вибіркова дисперсія:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ui}, \quad (5.37)$$

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{ui} - \bar{y}_u)^2. \quad (5.38)$$

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена. Відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2} \quad (5.39)$$

порівнюється з табличним значенням $G_{1-q}(k_1, k_2)$ (додаток 4) для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k_1 = m-1$ і $k_2 = N$. Якщо $G \leq G_{1-q}(k_1, k_2)$, то вибіркві дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньозважена дисперсія

$$s_{\text{вснр}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N s_u^2 \quad (5.40)$$

з числом степенів свободи $k_{\text{вснр}} = N(m-1)$. Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 40

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{ju} \bar{y}_u \quad (5.41)$$

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s_{\text{воспр}}^2 / m, \quad (5.42)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розрахуються таким чином:

$$s(b_j) = \frac{s_{\text{воспр}}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{u=1}^N s_u^2}. \quad (5.43)$$

Значимість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стюдента: якщо

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_\gamma(k), \quad (5.44)$$

де $t_\gamma(k)$ — табличне значення критерію Стюдента (додаток 1) для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k = N(m - 1)$, то коефіцієнт значно відрізняється від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється по критерію Фішера. Дисперсія адекватності рівна

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{m \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - l}, \quad (5.45)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_{\text{воспр}}^2} \leq F_{1-q}(k_{\text{ад}}, k_{\text{воспр}}), \quad (5.46)$$

де $F_{1-q}(k_{\text{ад}}, k_{\text{воспр}})$ — табличне значення критерію Фішера для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k_{\text{ад}} = N - l$ і $k_{\text{воспр}} = N(m - 1)$. Інакше, для опису результатів експерименту необхідно збільшити порядок апроксимуючого полінома.

Наведемо приклад знаходження коефіцієнтів функції відгуку за допомогою ортогонального планування експерименту.

На основі дослідних даних складемо план ПФЕ 2^2 і перевіримо значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється m разів ($m = 6$). Заповнимо табл. 5.5.

Таблиця 5.5

U	x_0	x_1	x_2	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
1	1	-1	-1	5.32	5.42	5.39	5.53	5.38	5.35
2	1	+1	-1	3.03	3.07	3.11	3.05	3.04	3.06
3	1	-1	+1	5.17	5.25	5.11	5.16	5.13	5.12
4	1	+1	+1	5.81	5.86	5.78	5.75	5.82	5.77

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 41

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ui}, \quad s_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{ui} - \bar{y}_u)^2 \quad (5.47)$$

Матрицю планування ПФЕ 2^2 в умовах лінійної моделі з однаковим числом паралельних дослідів при кожному поєднанні рівнів факторів представимо у вигляді табл. 5.6.

Таблиця 5.6

U	x_0	x_1	x_2	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}	$\bar{y}_u$	$s_u^2 \times 10^{-2}$	y'	$\bar{y} - y'$
1	1	-1	-1	5.3	5.4	5.3	5.5	5.3	5.3	5.4	2.6	4.6	+0.7
2	1	+1	-1	2	2	9	3	8	5	0	7	6	4
3	1	-1	+1	3.0	3.0	3.1	3.0	3.0	3.0	3.0	0.4	3.8	0.74
4	1	+1	+1	3	7	1	5	4	6	6	1.3	0	0.75
				5.1	5.2	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1	2	5.9	+0.7
				7	5	1	6	3	2	6	0.7	1	4
				5.8	5.8	5.7	5.7	5.8	5.7	5.8	9	5.0	
				1	6	8	5	2	7	0		6	

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена. Відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2} = \frac{2,67 \cdot 10^{-2}}{5,18 \cdot 10^{-2}} = 0,515 \quad (5.48)$$

порівнюється з табличним значенням $G_{1-q}(k_1, k_2)$ (додаток 4) для $q = 0,05$ і при числі степенів свободи $k_1 = m-1 = 5$ і $k_2 = N=4$: $G_{1-q}(k_1, k_2) = 0,5441$.

Оскільки $G \leq G_{1-q}(k_1, k_2)$, то вибіркві дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньозважена дисперсія

$$s_{\text{вснр}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N s_u^2 = 0,67 \cdot 10^{-2} \quad (5.49)$$

з числом степенів свободи $k_{\text{вснр}} = N(m-1) = 20$.

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u \quad (5.50)$$

Розраховуємо коефіцієнти рівняння:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{0u} \bar{y}_u = \frac{5,40 + 3,06 + 5,16 + 5,80}{4} = 4,86; \quad (5.51)$$

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{1u} \bar{y}_u = \frac{-5,40 + 3,06 - 5,16 + 5,80}{4} = -0,43 \quad (5.52)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 42

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{2u} \bar{y}_u = \frac{-5,40 - 3,06 + 5,16 + 5,80}{4} = 0,63; \quad (5.53)$$

Рівняння регресії має вигляд:

$$y' = 4,86 - 0,43x_1 + 0,63x_2. \quad (5.54)$$

Результати розрахунку по ньому приведені у відповідному стовпці плану. Розбіжності між $\bar{y}$ і y' також приведені в табл. 5.6.

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s_{\text{вснр}}^2 / m, \quad (5.55)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються за формулою:

$$s(b_j) = \frac{s_{\text{вснр}}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{u=1}^N s_u^2} = \frac{8,185 \cdot 10^{-2}}{4,899} = 1,67 \cdot 10^{-2}. \quad (5.56)$$

Значимість коефіцієнтів перевіряється за критерієм Стюдента:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_{\gamma}(k), \quad (5.57)$$

де $t_{\gamma}(k)$ — табличне значення критерію Стюдента (додаток 1) для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k = N(m - 1)$.

Для $k=20$ і $q = 0,05$ величина $t_{\gamma}(k) = 2,086$. Величини t_j дорівнюють: $t_0 = 2,9 \cdot 10^2$, $t_1 = 1,43 \cdot 10^2$, $t_2 = 1,08 \cdot 10^2$. Вони більше величини $t_{\gamma}(k)$ і всі коефіцієнти рівняння регресії значущо відрізняються від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється по критерію Фішера. Дисперсія адекватності рівна

$$s_{a\partial}^2 = \frac{m \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - y'_u)^2}{N - l} = \frac{6 \cdot 2,21}{1} = 13,26, \quad (5.58)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Для перевірки адекватності рівняння знаходимо

$$F = \frac{s_{a\partial}^2}{s_{\text{вснр}}^2} = \frac{13,26}{0,67 \cdot 10^{-2}} = 19,79 \cdot 10^2. \quad (5.59)$$

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{a\partial}^2}{s_{\text{вснр}}^2} \leq F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{\text{вснр}}), \quad (5.60)$$

де $F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{\text{вснр}})$ — табличне значення критерію Фішера для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k_{a\partial} = N - l$ і $k_{\text{вснр}} = N(m - 1)$. У прикладі $k_{a\partial} = 1$,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 43

$k_{воспр} = 20$ і $F_{1-q}(k_{ад}, k_{воспр}) = 248$. В даному випадку $F > F_{1-q}(k_{ад}, k_{воспр})$ і для опису результатів експерименту необхідно збільшити порядок апроксимуючого полінома. Тому переходимо до складання плану другого порядку на основі ортогонального центрального симетричного композиційного плану (ОЦКП) і перевіряємо значущість коефіцієнтів рівняння регресії

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 \quad (5.61)$$

і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється m разів ($m = 6$), за даними табл. 5.7. Тут додані до раніше проведених ще дослідів на 5 рівнях x_1 і x_2 .

Таблиця 5.7

U	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_1^2 - a$	$x_2^2 - a$	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
1	1	-1	-1	+1	1/3	1/3	5.3	5.4	5.3	5.5	5.3	5.3
2	1	+	-1	-1	1/3	1/3	2	2	9	3	8	5
3	1	1	+1	-1	1/3	1/3	3.0	3.0	3.1	3.0	3.0	3.0
4	1	-1	+1	+1	1/3	1/3	3	7	1	5	4	6
5	1	+	0	0	1/3	-2/3	5.1	5.2	5.1	5.1	5.1	5.1
6	1	1	0	0	1/3	-2/3	7	5	1	6	3	2
7	1	-1	-1	0	-2/3	1/3	5.8	5.8	5.7	5.7	5.8	5.7
8	1	+	+1	0	-2/3	1/3	1	6	8	5	24,	7
9	1	1	0	0	-2/3	-2/3	5.0	5,1	5,0	5,0	99	5,0
		0					04,	2	7	9	4,2	5
		0					13	4,1	4,2	4,1	5	4,2
		0					1,2	9	3	7	1,1	1
							12,	1,2	1,2	1,1	7	1,2
							42	4	7	9	2,3	1
							1.5	2,3	2,4	2,4	81,	2,4
							9	91,	51,	1	68	31,
								62	73	1,5		58
										5		

Плани другого порядку дозволяють сформулювати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, який містить більше число доданків, ніж неповний квадратичний поліном, сформований по планах першого порядку, і тому вимагають більшого числа виконуваних дослідів. Повний квадратичний поліном при $n = 2$ містить 6 доданків

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (5.62)$$

Для отримання квадратичної залежності кожен фактор повинен фіксуватися як мінімум на трьох рівнях.

Якщо вже був раніше сформований план ПФЕ 2^2 , але точність його функції відгуку не задовольняє, то ми можемо добудувати цей план до плану другого порядку і сформулювати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, без втрати інформації про раніше зроблені дослідів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-20.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/152.00.1М/ОК6-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 44

У ОЦКП входять: ядро – план ПФЕ з $N_0 = 2^n$ точками плану, n_0 (одна для цього плану) центральна точка плану ($x_i=0, i=1,2,3,\dots,n$) і по дві точки $\pm \lambda$ для кожного фактору.

При цьому в кожній площині, що містить координатну вісь y і вісь i -того фактора (що проходить через центр плану), виявляються три значення фактора x_i ($-\lambda, 0, \lambda$) і три відповідні значення y .

Загальна кількість точок в плані ОЦКП (5.19) при $n = 2$ дорівнює 9.

У ОЦКП кожен фактор фіксується в загальному випадку на п'яти рівнях ($-\lambda, -1, 0, 1, +\lambda$).

Константу перетворення a знаходимо за формулою

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}}. \quad (5.63)$$

Плече точок дорівнює:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0)}. \quad (5.64)$$

Для ОЦКП при числі факторів $n = 2$ маємо такі параметри плану: $N_0=4$, $N=9$, $\lambda=1$, $a = 2/3$, $1-a=1/3$, $-a=-2/3$, $\lambda^2 - a = 1/3$.

Для кожного поєднання факторів визначаємо середнє значення вимірюваної величини і вибірккову дисперсію:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ui}, \quad (5.65)$$

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{ui} - \bar{y}_u)^2. \quad (5.66)$$

План ОКЦП для $n = 2$ з однаковим числом паралельних дослідів при кожному поєднанні рівнів факторів представимо у вигляді табл. 5.8.

Таблиця 5.8

U	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\dot{x}_3 = x_1^2 - a$	$\dot{x}_4 = x_2^2 - a$	$\bar{y}_u$	$s_u^2 \times 10^{-2}$	y''	$\bar{y} - y''$
1	1	-1	-1	+1	1/3	1/3	5,4	2,67	5,4	+0,00
2	1	+	-1	-1	1/3	1/3	0	0,4	0	+0,02
3	1	1	+1	-1	1/3	1/3	3,0	1,32	3,0	+0,02
4	1	-1	+1	+1	1/3	1/3	6	0,79	4	+0,02
5	1	+	0	0	1/3	-2/3	5,1	1,30	5,1	+0,00
6	1	1	0	0	1/3	-2/3	6	0,94	4	+0,01
7	1	-1	-1	0	-2/3	1/3	5,8	0,65	5,7	+0,03
8	1	+	+1	0	-2/3	1/3	0	0,34	8	-0,02
9	1	1	0	0	-2/3	-2/3	5,0	2,31	5,0	+0,04
		0					5		5	
		0					4,2		4,1	
		0					0		9	
							1,2		1,1	
							2		9	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 45

							2,4		2,4	
							1		3	
							1,6		1,5	
							3		9	

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена (додаток 4). Відношення максимальної дисперсії, рівної $2,67 \cdot 10^{-2}$, до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2} = \frac{2,67 \cdot 10^{-2}}{10,72 \cdot 10^{-2}} = 0,249 \quad (5.67)$$

порівнюється з табличним значенням $G_{1-q}(k_1, k_2)$ (додаток 4), для $q=0,05$ і числа степенів свободи $k_1 = m-1=5$ и $k_2=N=9$. $G_{1-q}(k_1, k_2) = 0,425$

Оскільки $G \leq G_{1-q}(k_1, k_2)$, то вибіркові дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньо зважена дисперсія

$$s_{\text{вснр}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N s_u^2 = 1,19 \cdot 10^{-2} \quad (5.68)$$

з числом степенів свободи $k_{\text{вснр}} = N(m-1) = 45$.

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2} \quad (5.69)$$

Розраховуємо коефіцієнти рівняння:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{0u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2} = \frac{5,40 + 3,06 + 5,16 + 5,80 + 5,05 + 4,20 + 1,22 + 2,41 + 1,63}{9} = 3,77; \quad (5.70)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{1u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2} = \frac{-5,40 + 3,06 - 5,16 + 5,80 - 5,05 + 4,20}{6} = -0,43; \quad (5.71)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{2u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{2u}^2} = \frac{-5,40 - 3,06 + 5,16 + 5,80 - 1,22 + 2,41}{6} = 0,62; \quad (5.72)$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{12u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{12u}^2} = \frac{5,40 - 3,06 - 5,16 + 5,80}{4} = 0,75; \quad (5.73)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 46

$$b_3 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{3u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{3u}^2} = \quad (5.74)$$

$$\frac{(5,40 + 3,06 + 5,16 + 5,80 + 5,05 + 4,20) - 2(1,22 + 2,41 + 1,63)}{3[6(1/9) + 3(4/9)]} = 3,03;$$

$$b_4 = \frac{\sum_{u=1}^N x_{4u} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{4u}^2} = \quad (5.75)$$

$$\frac{(5,40 + 3,06 + 5,16 + 5,80 + 1,22 + 2,41) - 2(5,05 + 4,20 + 1,63)}{3[6(1/9) + 3(4/9)]} = 0,22;$$

Рівняння регресії має вигляд:

$$y'' = 3,77 - 0,43x_1 + 0,62x_2 + 0,75x_1x_2 + 3,03(x_1^2 - 0,67) + \quad (5.76)$$

$$+ 0,22(x_2^2 - 0,67) = 1,59 - 0,43x_1 + 0,62x_2 + 0,75x_1x_2 + 3,03x_1^2 + 0,22x_2^2.$$

Результати розрахунку за цим рівнянням наведено у відповідному стовпці плану. Розбіжності між $\bar{y}$ і y'' також наведено в табл. 5.8.

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s_{\text{вочсп}}^2 / m, \quad (5.77)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються таким чином:

$$s(b_j) = \frac{s_{\text{вочсп}}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{u=1}^N s_u^2} = \frac{0,109}{7,348} = 1,48 \cdot 10^{-2} \quad (5.78)$$

Значущість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стюдента:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_\gamma(k), \quad (5.79)$$

де $t_\gamma(k)$ — табличне значення критерію Стюдента (додаток 1) для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $N(m - 1)$.

Для $k=20$ і $q = 0,05$ величина $t_\gamma(k) = 2,086$. Величини t_j дорівнюють: $t_0 = 107,4$, $t_1 = 29,1$, $t_2 = 41,9$, $t_{12} = 50,7$, $t_{11} = 204,7$, $t_{22} = 14,9$. Вони більше величини $t_\gamma(k)$ і всі коефіцієнти рівняння регресії значущо відрізняються від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється за критерієм Фішера. Дисперсія адекватності дорівнює:

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{m \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - y_u'')^2}{N - l} = \frac{6 \cdot 0,38 \cdot 10^{-2}}{3} = 0,76 \cdot 10^{-2}, \quad (5.80)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії (для нашого прикладу дорівнює 6).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 47

Для перевірки адекватності рівняння знаходимо

$$F = \frac{s_{a\partial}^2}{s_{воспр}^2} = \frac{0,76 \cdot 10^{-2}}{1,19 \cdot 10^{-2}} = 0,64. \quad (5.81)$$

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{a\partial}^2}{s_{воспр}^2} \leq F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{воспр}), \quad (5.82)$$

де $F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{воспр})$ — табличне значення критерію Фішера (додаток 3) для $q = 0,05$ і числа степенів свободи $k_{a\partial} = N - 1$ і $k_{воспр} = N(m - 1)$. У даному прикладі $k_{a\partial} = 3$, $k_{воспр} = 20$ і $F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{воспр}) = 8,6$. В даному випадку $F < F_{1-q}(k_{a\partial}, k_{воспр})$ і рівняння регресії адекватне експерименту.

5.2. Порядок виконання лабораторної роботи

У відповідності з варіантом завдання за дослідними даними $U_1, \dots, U_4$ скласти план ПФЕ 2^2 і перевірити значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється 6 разів. При невиконанні умови адекватності скласти план другого порядку на основі ОКЦП за даними $U_1, \dots, U_9$ і перевірити значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ і адекватність цього рівняння.

Таблица 5.9

N в	U	y _{U1}	y _{U2}	y _{U3}	y _{U4}	y _{U5}	y _{U6}	N в	y _{U1}	y _{U2}	y _{U3}	y _{U4}	y _{U5}	y _{U6}
1	1	3.0	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8	4	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
	2	0	0	7	1	8	9		7	1	0	5	6	2
	3	3.9	3.9	3.9	3.8	3.9	3.9		4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
	4	6	0	9	8	7	1		0	1	7	5	2	6
	5	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9		2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2
	6	0	7	1	8	2	6		7	5	3	1	0	4
	7	8.9	8.8	8.9	8.9	8.9	8.9		9.5	9.6	9.6	9.6	9.6	9.6
	8	9	8	7	0	8	1		8	0	5	4	1	8
	9	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6		1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
	0	5	1	7	6	2	2		6	4	1	0	2	5
	5,6	5,6	5,6	5,6	5,5	5,6	5,6		6,4	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5
	8	6	0	9	5	1	1		7	0	2	5	9	7
	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9		3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3
	0	1	6	4	2	5	5		8	2	6	0	5	1
	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9	4,9		5,5	5,4	5,5	5,5	5,5	5,5
	7	5	3	0	1	6	6		0	9	7	6	1	5
	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1		3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
	0	2	6	4	3	1	1		6	7	3	0	1	5

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015											Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020		
	Екземпляр № 1											Арк 56 / 48		

2	1	1.6	1.6	1.5	1.5	1.6	1.5	1 5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5
	2	3	4	9	8	4	7		1	8	2	3	0	9
	3	3.7	3.8	3.8	3.7	3.7	3.8		2.7	2.8	2.7	2.7	2.8	2.8
	4	7	2	0	6	8	4		7	2	8	6	1	3
	5	1.4	1.4	1.4	1.3	1.3	1.4		0.8	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7
	6	2	3	0	7	9	1		2	1	8	4	0	7
	7	8.3	8.3	8.4	8.4	8.4	8.3		6.9	7.0	7.0	6.9	7.0	7.0
	8	4	7	1	5	2	8		5	1	3	8	1	4
	9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9		0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1
	3	1	0	8	7	9	9		2	1	3	8	0	9
	5.5	5.5	5.6	5.6	5.6	5.5	5.5		4.3	4.3	4.4	4.4	4.4	4.3
	5	8	1	4	2	7	7		6	8	1	3	5	9
	2.3	2.3	2.2	2.2	2.3	2.2	2.2		1.3	1.3	1.3	1.2	1.2	1.3
	3	1	8	7	2	9	9		1	3	0	7	9	2
	4.4	4.4	4.4	4.5	4.5	4.5	4.5		3.4	3.4	3.5	3.5	3.4	3.5
	4	8	9	1	5	3	3		6	8	1	3	7	2
	2.9	2.9	2.9	2.8	2.8	2.8	2.8		1.9	1.9	1.8	1.9	1.8	1.9
	3	4	0	7	8	9	9		4	2	7	0	8	1
3	1	2.0	2.0	2.0	2.9	2.9	2.0	1 6	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
	2	2	4	0	7	8	1		0	1	5	8	2	7
	3	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8		4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
	4	7	5	9	3	5	7		8	5	4	1	3	2
	5	2.0	2.0	1.9	1.9	2.0	2.0		2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
	6	4	2	7	6	3	1		0	1	4	7	5	2
	7	9.3	9.3	9.3	9.4	9.4	9.4		8.3	8.4	8.3	8.3	8.2	8.3
	8	7	3	5	1	4	2		8	0	4	1	9	0
	9	1.3	1.3	1.3	1.2	1.2	1.2		1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
	4	2	1	7	9	8	8		0	1	4	6	1	5
	5.8	5.9	5.9	5.9	5.8	5.8	5.8		5.6	5.6	5.6	5.6	5.5	5.6
	8	1	4	2	9	7	7		6	8	4	0	8	1
	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3		2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
	1	3	0	8	6	5	5		0	1	4	6	2	3
	5.1	5.2	5.2	5.2	5.2	5.1	5.1		4.8	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8
	8	0	3	5	1	7	7		0	8	1	4	5	7
	3.1	3.1	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1		3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
	3	1	8	7	0	2	2		7	5	4	1	0	2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015											Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020	
	Екземпляр № 1											Арк 56 / 49	

Продовження табл. 5.9

N В	U	Y _{U1}	Y _{U2}	Y _{U3}	Y _{U4}	Y _{U5}	Y _{U6}	N В	Y _{U1}	Y _{U2}	Y _{U3}	Y _{U4}	Y _{U5}	Y _{U6}
4	1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1 7	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
	2	4	6	2	0	1	5		4	2	5	8	7	9
	3	3.9	3.8	3.9	3.9	3.9	3.9		3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
	4	0	7	1	4	6	5		4	2	1	6	8	7
	5	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3		1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
	6	5	7	2	4	0	1		8	9	7	5	3	4
	7	8.6	8.6	8.7	8.7	8.7	8.7		9.2	9.1	9.2	9.2	9.3	9.2
	8	8	6	0	4	7	5		2	8	1	7	0	9
	9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0	1	3	2	5	4			5	4	6	8	3	7
	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6	5.7			5.6	5.7	5.6	5.6	5.6	5.6
	9	5	7	2	9	0			8	0	9	4	1	3
	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6			1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
	0	2	5	1	6	4			2	4	1	7	9	8
	4.6	4.6	4.6	4.6	4.5	4.6			4.4	4.5	4.4	4.4	4.4	4.4
5	5	7	4	1	9	0		1 8	8	0	7	3	5	0
	2.5	2.5	2.5	2.4	2.5	2.5			2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
	1	0	5	9	2	4			3	5	2	7	9	8
	1	1.1	1.0	1.1	1.1	1.0	1.0		1.7	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
	2	2	8	4	5	9	7		4	6	1	8	5	7
	3	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1		1.4	1.5	1.5	1.4	1.4	1.5
	4	7	5	8	2	6	4		8	0	3	7	9	2
	5	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6		3.1	3.1	3.1	3.0	3.0	3.0
	6	3	5	1	8	5	7		4	6	2	8	9	6
	7	9.1	9.1	9.1	9.1	9.0	9.0		7.6	7.6	7.6	7.7	7.7	7.7
	8	5	7	8	2	5	3		7	4	9	2	5	3
	9	1.3	1.4	1.3	1.3	1.4	1.4		1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
	7	2	5	9	4	6			3	5	1	7	9	5
	5.6	5.6	5.6	5.5	5.5	5.5			4.0	4.0	4.0	4.1	4.1	4.1
	4	6	2	8	5	9			8	5	9	2	7	1
	1.6	1.6	1.6	1.7	1.7	1.7			1.2	1.2	1.1	1.2	1.1	1.1
6	8	5	9	2	5	3		1 9	4	2	8	5	7	5
	5.5	5.5	5.5	5.4	5.4	5.4			4.9	4.9	5.0	5.0	4.9	5.0
	4	6	2	7	9	5			7	5	1	7	9	5
	3.0	3.1	3.0	3.0	3.1	3.1			2.6	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5
	8	0	7	5	1	4			3	5	1	7	9	5
	1	2.1	2.1	2.0	2.1	2.1	2.1		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0	2	8	4	8	6		4	5	3	2	1	6
	3	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9		2.8	2.7	2.8	2.8	2.8	2.8
	4	6	8	1	5	0	3		0	8	1	4	7	5
	5	3.5	3.4	3.5	3.4	3.5	3.5		1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3
	6	0	7	6	9	4	7		6	8	1	5	0	9
	7	9.1	9.2	9.1	9.1	9.0	9.0		8.9	8.9	9.0	9.0	9.1	9.0
	8	8	1	5	0	8	6		9	5	1	7	1	5
	9	2.5	2.4	2.5	2.5	2.5	2.5		0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	0	8	1	5	8	6			7	5	2	4	0	1
	5.7	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6			5.6	5.5	5.6	5.6	5.6	5.6
	7	4	8	2	0	8			0	8	1	9	5	8
	2.1	2.1	2.1	2.0	2.1	2.1			1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	1.0
	1	0	6	9	5	7			1	5	2	7	9	6

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015												Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1												Арк 56 / 50

		5.9 6 3.7 5	5.9 4 3.7 7	5.9 8 3.7 2	5.9 2 3.7 6	5.9 0 3.7 1	5.8 8 3.6 9		4.8 8 2.6 0	4.8 5 2.5 8	4.8 2 2.6 3	4.8 6 2.6 1	4.8 0 2.6 7	4.7 9 2.6 9
7	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2 0	1.1	1.1	1.1	1.0	1.1	1.1
	2	5	3	2	4	1	6		6	7	0	8	1	8
	3	0.7	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8		1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.9
	4	5	7	8	1	7	4		0	7	5	8	7	6
	5	3.4	3.4	3.3	3.4	3.3	3.3		2.5	2.5	2.5	2.5	2.4	2.5
	6	6	2	6	0	8	5		7	9	0	5	8	1
	7	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9		8.0	8.0	8.1	8.1	8.1	8.1
	8	0	4	1	8	7	9		9	7	0	6	9	8
	9	1.2	1.2	1.1	1.2	1.1	1.1		1.5	1.5	1.5	1.4	1.4	1.5
	4	6	8	1	6	5	5		6	8	0	8	9	4
		5.3	5.3	5.3	5.4	5.4	5.4		4.7	4.7	4.8	4.6	4.6	4.7
		8	4	9	3	7	5		0	8	0	9	8	6
		0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4		1.1	1.1	1.1	1.1	1.0	1.1
		4	2	1	6	8	5		6	8	0	5	8	1
		6.2	6.3	6.2	6.2	6.3	6.3		4.9	4.9	4.8	4.8	4.9	4.9
		4	1	7	5	4	5		0	9	8	7	5	7
		2.9	2.9	2.8	2.9	2.8	2.8		2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.7
		4	2	7	0	6	8		7	9	4	9	8	0
8	1	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9	2 1	2.2	2.1	2.2	2.2	2.2	2.2
	2	6	3	6	1	7	5		0	8	1	7	5	8
	3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1		2.4	2.4	2.3	2.4	2.4	2.4
	4	5	1	8	8	4	6		8	6	9	1	9	7
	5	2.9	3.0	2.9	3.0	3.0	2.9		2.1	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2
	6	7	7	5	4	5	8		9	5	0	1	7	9
	7	8.6	8.6	8.5	8.5	8.5	8.6		6.8	6.8	6.8	6.8	6.7	6.7
	8	6	2	4	7	9	7		7	9	5	0	7	5
	9	1.4	1.5	1.4	1.4	1.5	1.5		1.9	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9
		6	5	4	8	4	1		0	8	1	6	9	7
		4.9	4.9	4.8	4.9	4.8	4.8		4.3	4.3	4.3	4.3	4.2	4.2
		6	4	8	7	5	6		6	7	9	1	8	6
		1.1	1.2	1.2	1.1	1.1	1.2		1.9	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9
		7	2	6	6	8	5		0	8	1	7	9	5
		5.4	5.4	5.3	5.3	5.4	5.3		4.1	4.1	4.1	4.1	4.0	4.0
		6	3	8	5	5	9		9	6	7	0	8	6
		2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.8		2.7	2.6	2.7	2.7	2.7	2.7
		4	1	4	7	5	6		0	8	1	5	9	8

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015											Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020		
	Екземпляр № 1											Арк 56 / 51		

Продовження табл. 5.9

N В	U	Y _{U1}	Y _{U2}	Y _{U3}	Y _{U4}	Y _{U5}	Y _{U6}	N В	Y _{U1}	Y _{U2}	Y _{U3}	Y _{U4}	Y _{U5}	Y _{U6}
9	1	2.4	2.4	2.4	2.4	2.5	2.5	2 2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
	2	1	0	3	8	2	1		6	9	5	0	8	9
	3	2.4	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4		2.4	2.3	2.4	2.4	2.4	2.4
	4	9	2	0	5	2	0		0	7	1	7	9	5
	5	3.2	3.2	3.2	3.2	3.3	3.3		3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.9
	6	3	1	4	9	2	1		5	9	7	0	7	9
	7	8.0	8.1	8.1	8.0	8.0	8.0		7.2	7.1	7.1	7.2	7.2	7.2
	8	9	4	0	5	1	0		0	5	8	5	8	9
	9	2.1	2.1	2.1	2.1	2.2	2.2		2.0	2.0	2.0	2.0	1.9	2.0
	2	0	4	8	3	0	0		8	9	4	0	6	1
	4.6	4.6	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5		4.2	4.1	4.2	4.2	4.2	4.2
	0	3	9	3	0	2	0		0	7	1	7	9	6
	2.0	2.0	2.0	2.0	2.1	2.0	1.9		1.9	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8
	4	0	3	8	2	9	9		6	7	1	5	9	9
	5.3	5.3	5.2	5.2	5.2	5.1	4.6		4.6	4.6	4.6	4.7	4.7	4.7
	0	32.	9	3	0	8	8		6	9	5	9	9	6
	2.9	89	2.9	2.9	3.0	2.9	2.7		2.7	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6
	1		3	7	3	9	7		9	4	0	8	5	5
1 0	1	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4	2.4	2 3	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6
	2	7	4	9	5	8	2		6	9	2	4	2	9
	3	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4		2.6	2.6	2.7	2.6	2.7	2.7
	4	5	8	2	6	3	7		3	8	3	6	5	9
	5	2.7	2.6	2.6	2.7	2.7	2.7		2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.3
	6	2	5	3	7	5	0		7	2	6	3	8	4
	7	7.2	7.2	7.3	7.3	7.3	7.2		7.4	7.4	7.4	7.5	7.5	7.5
	8	3	7	4	8	2	9		3	1	8	3	8	5
	9	1.8	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7		2.1	2.1	2.0	2.1	2.0	2.1
	3	6	1	5	3	8	8		8	2	7	5	9	4
	4.1	4.1	4.1	4.2	4.2	4.2	4.6		4.6	4.6	4.6	4.7	4.7	4.7
	4	1	8	3	8	5	5		2	8	3	8	5	5
	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.9		1.9	1.9	1.8	1.9	1.8	1.8
	5	7	3	8	4	7	5		1	7	7	5	3	3
	4.5	4.4	4.4	4.4	4.5	4.5	4.0		4.0	4.1	4.1	4.1	4.1	4.0
	2	5	2	8	5	8	3		8	3	8	2	5	5
	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4	2.6		2.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.6
	3	8	1	4	2	6	6		1	4	1	8	5	5
1 1	1	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2 4	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1
	2	6	9	4	9	7	5		72.	92.	32.	82.	22.	72.
	3	2.3	2.3	2.4	2.4	2.4	2.4		14	11	18	24	28	25
	4	9	6	1	7	9	6		2.3	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3
	5	2.2	2.2	2.2	2.2	2.1	2.2		5	3	8	1	8	2
	6	7	9	5	0	6	1		6.4	6.4	6.4	6.3	6.3	6.3
	7	7.1	7.0	7.0	6.9	7.0	6.9		7	9	1	5	3	7
	8	2	9	8	8	0	6		1.7	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
	9	1.5	1.6	1.5	1.6	1.6	1.6		7	2	5	4	3	8
	8	0	6	4	9	7	3.7		3.6	3.6	3.7	3.6	3.6	3.7
	4.0	4.1	4.0	3.9	3.9	4.0	2		5	2	6	8	4	4
	9	2	7	9	7	0	1.9		1.8	1.8	1.9	1.9	1.8	1.8
	2.0	2.0	2.1	2.1	2.1	2.1	3		5	2	5	7	8	8
	6	9	1	7	5	9	4.1		4.0	4.0	4.1	4.1	4.1	4.0

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015												Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020	
	Екземпляр № 1												Арк 56 / 52	

		4.3 9 2.5 0	4.4 2 2.4 6	4.3 4 2.5 4	4.2 7 2.5 1	4.3 2 2.5 9	4.2 5 2.5 7		4 2.3 7	8 2.3 4	3 2.3 9	7 2.4 3	9 2.4 9	9 2.4 7
1 2	1	1.6 2 5	1.6 9	1.6 1	1.5 7	1.5 1	1.5 4		1.5 1	1.4 7	1.4 3	1.3 8	1.3 3	1.3 5
	2	1.5 3	1.6 2	1.5 7	1.5 2	1.6 6	1.6 9		1.7 4	1.7 8	1.8 3	1.8 9	1.8 4	1.7 7
	3	2.3 5	2.3 2	2.4 7	2.4 2	2.4 6	2.3 9	2	2.0 4	2.0 8	2.0 3	1.9 9	1.9 4	1.9 7
	4	3 6	9	5	9	3	7	5	5 5	9	1	3	7	2
	5	6.4 7	6.5	6.4	6.3	6.3	6.3		5.5 3	5.5	5.6	5.6	5.6	5.5
	6	6 8	1	3	8	3	6		3 7	8	5	8	1	5
	7	1.4 3	1.4 7	1.5 3	1.5 9	1.5 1	1.4 5		1.2 7	1.2 5	1.2 1	1.1 6	1.1 8	1.1 3
	8	3.5 6	3.5 9	3.5 2	3.4 8	3.4 2	3.4 4		3.1 8	3.1 1	3.2 0	3.2 5	3.2 8	3.2 3
	9	1.2 3	1.1 8	1.1 4	1.1 6	1.2 2	1.2 8		1.2 7	1.2 8	1.2 3	1.1 7	1.1 4	1.1 5
		3.9 1	3.9 7	4.1 1	4.0 5	4.0 1	3.9 5		3.3 5	3.3 8	3.4 3	3.4 9	3.4 5	3.3 7
		2.1 5	2.1 8	2.1 1	2.0 7	2.0 3	2.0 5		1.8 7	1.8 3	1.7 7	1.7 3	1.7 9	1.8 5
1 3	1	1.2 2	1.2 0	1.2 9	1.2 1	1.2 5	1.1 7		0.6 8	0.6 6	0.5 7	0.5 9	0.6 1	0.6 9
	2	1.8 3	1.9 1	1.8 5	1.7 7	1.7 9	1.8 0		1.6 0	1.5 4	1.5 8	1.6 4	1.6 9	1.6 7
	3	1.5 4	1.5 1	1.6 5	1.6 6	1.6 9	1.6 5	2	1.2 0	1.1 5	1.2 2	1.2 7	1.2 9	1.2 5
	4	5.0 7	5.1	5.0	5.0	4.9	4.9	6	4.6 9	4.7 2	4.6 8	4.6 0	4.5 7	4.5 9
	5	8 8	2	5	1	6	8		0.3 7	0.4 3	0.4 8	0.4 0	0.4 1	0.4 9
	6	0.9 8	0.9 1	0.9 9	0.9 7	0.8 8	0.8 5		0.6 7	0.5 3	0.6 8	0.6 0	0.6 6	0.7 8
	7	2.9 0	2.8 5	2.8 7	2.9 5	2.9 9	2.9 8		2.6 8	2.6 6	2.6 0	2.6 3	2.5 7	2.5 5
	8	1.0 8	1.1 1	1.0 5	1.0 0	0.9 3	0.9 8		0.6 0	0.5 5	0.6 1	0.6 6	0.6 8	0.7 0
	9	2.8 9	2.8 1	2.8 7	2.8 5	2.7 8	2.7 5		2.4 7	2.4 9	2.4 1	2.4 5	2.3 9	2.3 4
		1.4 0	1.4 8	1.4 2	1.4 5	1.4 7	1.3 7		0.9 9	1.0 1	0.9 6	1.0 7	1.0 3	1.0 9

5.3. Контрольні запитання

1. Які умови треба виконати для проведення ортогонального планування експерименту?
2. Яка стратегія доцільна для застосування планів?
3. Як виконуються плани повного факторного експерименту 2^n ?
4. Що таке плани другого порядку?
5. Як виконується ортогональний центрально-композиційний план другого порядку?
6. Як проводиться перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 53

7. Як проводиться перевірка адекватності рівняння регресії?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Коефіцієнт довіри t_γ (квантилі розподілу Стюдента)

k	При γ			k	При γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,70	63,65	636,61	19	2,09	2,861	3,883
2	6	7	9	20	3	2,845	3,850
4	2,776	4,604	8,610	22	2,07	2,819	3,792
5	2,571	4,032	6,859	23	4	2,807	3,797
6	2,447	3,707	5,959	24	2,06	2,797	3,745
					9		
					2,06		
					4		
7	2,365	3,499	5,405	25	2,06	2,787	3,725
8	2,306	3,355	5,041	26	0	2,779	3,707
9	2,262	3,250	4,781	27	2,05	2,763	3,674
					6		
					2,05		
					2		
10	2,23	3,169	4,587	28	2,04	2,763	3,674
11	2,201	3,106	4,437	29	8	2,756	3,659
12	2,179	3,055	4,318	30	2,04	2,750	3,646
					5		
					2,04		
					2		
13	2,160	3,012	4,221	40	2,02	2,704	3,551
14	2,145	2,977	4,140	50	1	2,677	3,497
16	2,120	2,921	4,015	80	1,99	2,639	3,416
17	2,110	2,898	3,965	100	0	2,626	3,391
18	2,101	2,878	3,922	∞	1,98	2,576	3,291
					4		
					1,96		
					0		

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 54

Додаток 2

Значення функції нормального розподілу

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} dt$$

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
-3,5	0,00023	-1,7	0,0446	+0,1	0,5398	+ 1,9	0,9713
-3,4	0,00034	-1,6	0,0548	+0,2	0,5793	+2,0	0,9773
-3,3	0,00048	-1,5	0,0668	+0,3	0,6179	+2,1	0,9821
-3,2	0,00069	-1,4	0,0808	+0,4	0,6554	+2,2	0,9861
-3,1	0,00097	-1,3	0,0968	+0,5	0,6915	+2,3	0,9893
-3,0	0,00135	-1,2	0,1151	+0,6	0,7257	+2,4	0,9918
-2,9	0,0019	-1,1	0,1357	+0,7	0,7580	+2,5	0,9938
-2,8	0,0026	-1,0	0,1587	+0,8	0,7881	+2,6	0,9953
-2,7	0,0035	-0,9	0,1841	+0,9	0,8156	+2,7	0,9965
-2,6	0,0047	-0,8	0,2119	+ 1,0	0,8413	+2,8	0,9974
-2,5	0,0062	-0,7	0,2420	+ 1,1	0,8643	+2,9	0,9981
-2,4	0,0082	-0,6	0,2743	+ 1,2	0,8849	+3,0	0,99865
-2,3	0,0107	-0,5	0,3085	+ 1,3	0,9032	+3,1	0,99903
-2,2	0,0139	-0,4	0,3446	+ 1,4	0,9192	+3,2	0,99931
-2,1	0,0179	-0,3	0,3821	+ 1,5	0,9332	+3,3	0,99952
-2,0	0,0228	-0,2	0,4207	+ 1,6	0,9452	+3,4	0,99966
-1,9	0,0287	-0,1	0,4602	+1,7	0,9554	+3,5	0,99977
-1,8	0,0359	0,0	0,500	+ 1,8	0,9641		

Додаток 3

Квантилі розподілу Фішера F_{1-q} для $q = 0,05$

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164, 4	199, 5	215, 7	224, 6	230, 2	234, 0	244, 9	249	254, 3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 55

15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Додаток 4

Квантилі розподілу Кохрена G_{1-q} для $q = 0,05$

k_1	k_2										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	7977	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0780	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Всі квантилі G_{1-q} менше одиниці, тому в таблиці приведені лише десяткові знаки, слідуючі після коми, перед якою при користуванні таблицею потрібно ставити нуль цілих. Наприклад, при $k_1 = 6$, $k_2 = 3$ маємо $G_{0,95} = 0,5321$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/2/152.00.1М/ОК6- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 56 / 56

ЛІТЕРАТУРА

1. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. – М.: Радио и связь.
2. Грановский В.А., Сирая Т.И. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат.
3. Маликов М.Ф. Основы метрологии. – М.: Изд-во Комитета по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949.
4. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. – М.: Изд-во стандартов. – 1991.
5. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справ. пособие. – К.: Техніка, 1987.
6. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учебное пособие для вузов – М.: Логос, 2001.
7. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973.
9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006.
10. Хьюбер П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
11. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссец П., Штоель В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. – М.: Мир, 1989.
12. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика : робастность, оценивание, прогноз. – М.: Финансы и статистика, 2000.
13. ГОСТ ИСО 5725-5-2002 «Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 5. Альтернативные методы определения прецизионности стандартного метода измерений».
14. Новицкий П.В., Зиграф Э.Н. Оценка похибокешностей измерений. – Л.: Энергия, 1983.
15. Джонсон Н. Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1981.
16. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: Учеб. пособие для вузов – М.: Радио и связь, 1983.
17. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976.
18. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. – Л.: Судостроение, 1980.