

Лекція 3

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ НАДІЙНОСТІ

3.1. Елементи теорії ймовірностей в задачах аналізу надійності

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.1)$$

де $P(A)$ – імовірність події A ; m – кількість випадків, сприятливих події A ; n – загальна кількість випадків.

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.2)$$

Сумою двох подій A та B називають подію C , що складається з події A або події B , або ж обох подій разом. Сумою декількох подій називають подію, що складається з принаймні однієї з цих подій. Імовірність суми подій завжди більша за ймовірності подій, що додаються.

Добутком двох подій A та B називають подію D , що полягає в одночасному виконанні подій A та B .

Однією з найважливіших вважають теорему про підсумовування ймовірностей: імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей окремих подій, або

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3.3)$$

Теорема (3.3) має такий наслідок: імовірність появи однієї з декількох взаємно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Приклад 3.1. Фрагмент електричної мережі має схему, наведену на рис. 3.1.

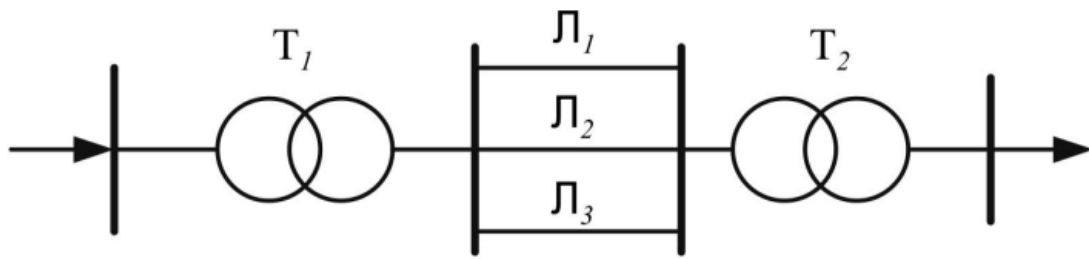


Рис. 3.1. Схема фрагменту електричної мережі

Імовірність відмови елементів, відповідно, $q_{T_1} = 0,0005$; $q_{T_2} = 0,0008$; $q_{Л_1} = q_{Л_2} = 0,01$; $q_{Л_3} = 0,015$. Визначити надійність безперервного електропостачання споживачів, що живляться від підстанції з трансформатором T_2 .

Розв'язання. Суму ймовірностей кількох сумісних подій обчислюють так:
 $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$,
де подія A – відмова першого трансформатора; подія B – відмова всіх паралельних ліній електропередачі; подія C – відмова другого трансформатора; подія $A + B + C$ – припинення електропостачання споживачів через відмови елементів схеми.

Отже:

$$Q(B) = (0,01)^2 \cdot 0,015 = 0,15 \cdot 10^{-5};$$

$$Q(A + B + C) = 0,0005 + 0,0008 + 0,15 \cdot 10^{-5} - 0,0005 \cdot 0,0008 - 0,0008 \cdot 0,15 \cdot 10^{-5} - 0,15 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0005 + 0,0005 \cdot 0,0008 \cdot 0,15 \cdot 10^{-5}.$$

$$Q(A + B + C) = 1,3 \cdot 10^{-3};$$

$$P(A + B + C) = 1 - 1,3 \cdot 10^{-3} = 0,9987.$$

Відповідь: ймовірність електропостачання споживачів дорівнює 0,9987.

Приклад 3.2. Статистична ймовірність пошкодження кожного кола двоколової ЛЕП

$$P(A_1) = P(A_2) = 10^{-3}.$$

Двоколова ЛЕП забезпечує 75 % від необхідного резерву електропостачання. Кожне коло ЛЕП може забезпечити 75 % електропостачання споживачів. Розглядаючи пошкодження кіл ЛЕП як незалежні події, визначити ймовірність повної втрати та 25-відсоткового дефіциту електропостачання.

Розв'язання.

$$P(A)_{100\%} = P(A_1 A_2) = 10^{-6};$$

$$P(A)_{25\%} = P(A_1) \cdot [1 - P(A_2)] + P(A_2) \cdot [1 - P(A_1)];$$

$$P(A)_{25\%} = 10^{-3}(1 - 10^{-3}) + 10^{-3}(1 - 10^{-3}) = 2 \cdot 10^{-3},$$

де подія A_1 – відмова першого кола ЛЕП; подія A_2 – відмова другого кола ЛЕП; подія A – повне припинення електропостачання.

Відповідь: імовірність повного та 25-відсоткового припинення електропостачання споживачів, відповідно, $P(A)_{100\%} = 10^{-6}$ та $P(A)_{25\%} = 2 \cdot 10^{-3}$.

Імовірність події A , обчислену за умови, що відбулася подія B , називають *умовною ймовірністю події A* і позначають як $P(A/B)$.

Відповідно до теореми про взаємозалежні події, імовірність виконаних двох подій $P(AB)$ дорівнює добутку ймовірності однієї з них і умовної ймовірності другої, обчисленої за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \quad (3.4)$$

Теорема (3.4) має такі наслідки: по-перше, якщо подія A не залежить від події B , тоді й подія B не буде залежати від події A , тобто:

$$\text{якщо } P(A) = P(A/B), \text{ то } P(B) = P(B/A); \quad (3.5)$$

відповідно до другого наслідку виразу (3.5) ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

На підставі теорем (3.3) та (3.4) можна вивести формулу повної ймовірності. Відповідно, *повна ймовірність* деякої події A , що може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій (гіпотез), становитиме

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i). \quad (3.6)$$

Тобто, ймовірність події A обчислюють як суму добутків ймовірностей кожної гіпотези та ймовірності події за відповідної гіпотези. Формулу (3.6) називають *формулою повної ймовірності події*.

Наслідком теореми множення та формули повної ймовірності події є теорема гіпотез. Нехай є повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, ймовірності яких відомі до досліду й, відповідно, дорівнюють $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Виконано дослідження, у результаті якого з'явилася деяка подія A , у зв'язку з чим ймовірності гіпотез змінюються і дорівнюють

$$P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Формулу (3.7) називають формулою Баєса або теоремою гіпотез.

Приклад 3.3. Дві електростанції працюють на спільне навантаження. Повне електропостачання можливе лише у разі одночасної роботи двох електростанцій. Імовірність безвідмовної роботи за час t для першої електростанції дорівнює 0,96, для другої – 0,94. У системі за цей час одноразово було припинено енергопостачання. Визначити ймовірність того, що припинення спричинено відмовою першої електростанції.

Розв'язання. Оскільки у задачі йдеться про припинення електропостачання, спричинене відмовою першої електростанції (події несутимісні та становлять повну групу подій), використаємо формулу Баєса.

$$P\left(\frac{B_k}{A}\right) = \frac{P\left(\frac{A}{B_k}\right)P(B_k)}{\sum_{k=1}^n P\left(\frac{A}{B_k}\right)P(B_k)},$$

де $\sum_{k=1}^n P\left(\frac{A}{B_k}\right)P(B_k)$ – повна ймовірність.

Відповідно, ймовірності цих подій:

$$P(B_0) = 0,96 \cdot 0,94 = 0,902;$$

$$P(B_1) = 0,94 \cdot 0,04 = 0,038;$$

$$P(B_2) = 0,96 \cdot 0,06 = 0,058;$$

$$P(B_3) = 0,04 \cdot 0,06 = 0,0021;$$

$$P\left(\frac{A}{B_0}\right) = 0;$$

$$P\left(\frac{A}{B_1}\right) = P\left(\frac{A}{B_2}\right) = P\left(\frac{A}{B_3}\right) = 1;$$

$$P\left(\frac{B_1}{A}\right) = \frac{1 \cdot 0,038}{1 \cdot 0,038 + 1 \cdot 0,058 + 1 \cdot 0,0021};$$

$$P\left(\frac{B_1}{A}\right) = 0,385,$$

де подія B_0 – обидві електростанції працюють; подія B_1 – відмовила перша електростанція; подія B_2 – відмовила друга електростанція; подія B_3 – відмовили обидві електростанції.

Відповідь: імовірність припинення енергопостачання споживачів через відмову першої електростанції дорівнює 0,385.

У процесі практичного застосування теорії ймовірностей часто трапляються завдання, у яких однакові або аналогічні дослідження повторюються неодноразово. У результаті кожного дослідження може виникнути або не виникнути деяка подія A . Нас цікавить ймовірність появи будь-якої кількості разів цієї події в серії досліджень.

Задачу вирішують просто, коли дослідження незалежні. У цьому разі ймовірність події A в усіх дослідженнях однакова. Нехай здійснюється n незалежних досліджень, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p , тоді ймовірність того, що подія A з'явиться саме m разів, визначають за формулою

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (3.8)$$

де C_n^m – кількість сполучень від n до m ; q – це ймовірність того, що подія A не відбудеться, $q = 1 - p$.

Оскільки вираз (3.8) за формою являє собою розкладання бінома $(q + p)^n$, розподіл ймовірностей, який відповідає виразу (3.8), називають *біномним*.

Приклад 3.4. Статистична ймовірність пошкодження ізоляції трансформатора за нормального режиму мережі з малим струмом замикання на землю $P\left(\frac{A}{B_1}\right) = 0,001$.

Під час замикання однієї фази мережі на землю ймовірність пошкодження збільшується до $P\left(\frac{A}{B_2}\right) = 0,005$. Як показують спостереження, робота із заземленою фазою мережі триває 100 год. за рік.

Визначити ймовірність пошкодження трансформатора.

Розв'язання. Використовуючи формулу для повної ймовірності, маємо:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P\left(\frac{A}{B_k}\right) P(B_k);$$

$$P(B_2) = \frac{100}{8760} = 0,0114;$$

$$P(B_1) = 1 - 0,0114 = 0,9886;$$

$$P(A) = 0,001 \cdot 0,9886 + 0,005 \cdot 0,0114 = 0,00105,$$

де подія A – пошкодження трансформатора, можлива у двох випадках; подія B_2 – пошкодження трансформатора у період заземленої фази; подія B_1 – пошкодження трансформатора у період незаземленої фази.

Відповідь: ймовірність пошкодження трансформатора за рік становить 0,00105.

Приклад 3.5. В енергосистемі працюють п'ять однотипних генераторів. Розглядаючи їх відмови як незалежні випадкові події з однаковою ймовірністю $P(A) = 0,1$, визначити ймовірність одночасного пошкодження всіх генераторів; трьох генераторів; не менше трьох генераторів.

Розв'язання. Подія A – відмова одного генератора. Оскільки подія A не залежить від того, як працюють інші генератори, а ймовірність відмови однакова в усіх випадках, то використаємо формулу Бернуллі:

$$P = C_n^m P(A)^m P(\bar{A})^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot P(A)^m P(\bar{A})^{n-m};$$

для п'яти генераторів

$$P(5) = \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^0 = 10^{-5}.$$

Ймовірність одночасної відмови трьох із п'яти генераторів відповідно:

$$P(3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 = 8,1 \cdot 10^{-3}.$$

Визначимо ймовірність одночасної відмови не менше трьох генераторів, тобто, коли пошкоджуються три, чотири або п'ять генераторів. Обчислимо пошкодження чотирьох генераторів:

$$P(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^1 = 4,5 \cdot 10^{-4};$$

$$P_{3,5} = \sum_{k=3}^5 P(k) = 4,5 \cdot 10^{-4} + 10^{-5} + 8,1 \cdot 10^{-3} = 8,56 \cdot 10^{-3}.$$

Відповідь: ймовірність пошкодження п'яти генераторів дорівнює 0,00001; трьох генераторів – 0,0081; менше трьох генераторів – 0,00856.

Законом розподілу випадкової величини називають співвідношення між можливими значеннями випадкової величини й відповідними їм ймовірностями. Для дискретної випадкової величини закон розподілу ймовірностей подають у вигляді ряду розподілу. Взаємозв'язок задають графічно або у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Ряд розподілу дискретної випадкової величини

X_i	X_1	X_2	...	X_n
P_i	P_1	P_2	...	P_n

не однаково ймовірні. Для кількісної характеристики розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини використовують не ймовірність події $X = x$, а ймовірність події $X < x$, де x – деяка поточна змінна. Ймовірність цієї події є функцією від x , яку називають *функцією розподілу* випадкової величини X і позначають $F(x)$; $F(x) = P(X < x)$.

Таку функцію ще називають *інтегральною функцією розподілу*. Цю універсальну характеристику випадкової величини використовують як для неперервних, так і для дискретних випадкових величин, вона повністю визначає випадкову величину з імовірнісного погляду. Функція $F(x)$ не спадна, крім того, $F(-\infty) = 0$ та $F(+\infty) = 1$. В окремих точках вона може мати розриви.

Вирішуючи практичні завдання, потрібно обчислювати ймовірність того, що випадкова величина набуде значень, які перебувають у певних межах, наприклад, від α до β :

$$P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (3.9)$$

Першу похідну функції розподілу називають *густиною розподілу* або *густиною ймовірності* неперервної випадкової величини

$$f(x) = F'(x). \quad (3.10)$$

Приклад функції розподілу неперервної випадкової величини наведено на рис. 3.2.

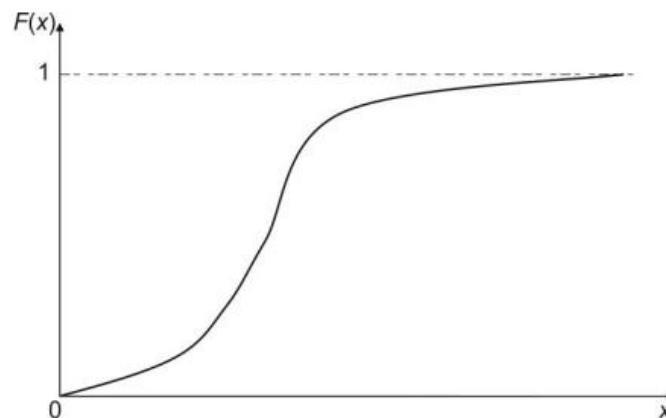


Рис. 3.2. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

Лінію, що зображує густину розподілу випадкової величини, називають *кривою розподілу*. Зазвичай функція розподілу неперервна, тому густина її розподілу також є функцією неперервною і завжди додатною (рис. 3.3).

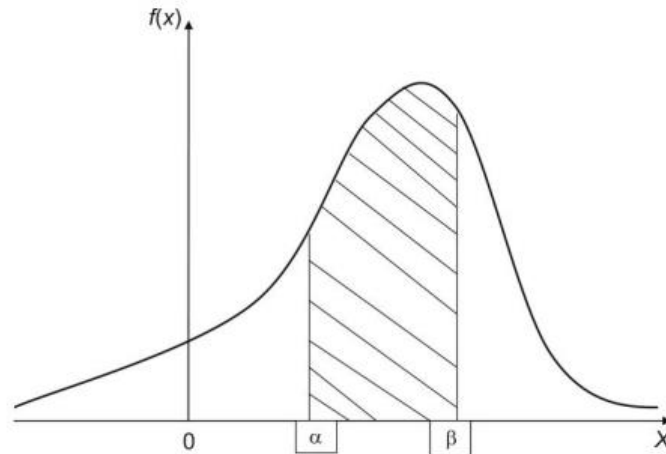


Рис. 3.3. Графік густини розподілу неперервної випадкової величини

Імовірність потрапляння величини x на відрізок від α до β дорівнює площі кривої розподілу, що прилягає до цього відрізка (рис. 3.3), і виражається інтегралом

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (3.11)$$

Функція розподілу, виражена через густину

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (3.12)$$

Математичним сподіванням випадкової величини називають суму добутків усіх значень випадкової величини на ймовірності цих значень:

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i. \quad (3.13)$$

Таке визначення математичного сподівання справедливе для дискретної випадкової величини. Для неперервної величини x математичне сподівання буде

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (3.14)$$

Математичне сподівання випадкової величини залежить від середнього арифметичного значення випадкової величини для великої кількості досліджень, яке позначають так:

$$M^*(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{N}, \quad (3.15)$$

де m_i – кількість виникнень у дослідженнях значення x_i ; N – кількість незалежних досліджень.

Відношення $m_i/N = P_i^*$ називають *частотою* або *статистичною ймовірністю* подій $X = x_i$. Зі збільшенням кількості досліджень N значення P_i^* наближаються до відповідних імовірностей P_i , а середнє арифметичне значення випадкової величини $M^*[X]$ – до її математичного сподівання.

Приклад 3.6. На ТЕС працюють 6 енергоблоків загальною потужністю 1600 МВт ($4 \times 300 + 2 \times 200$). Імовірність аварійного виходу з ладу для блоків 300 МВт становить 0,004, а для блоків 200 МВт – 0,003. У період осінньо-зимового максимуму ТЕС працює в базисі графіка навантаження на повну потужність. Визначити обсяг електроенергії, втраченої під час аварії на ТЕС.

Розв'язання. Період осінньо-зимового максимуму навантаження охоплює чотири місяці, у середньому по 30 днів кожен. Отже, $t = 120 \cdot 24 = 2880$ год.

Втрачена електроенергія під час аварії

$$M(\Delta W) = \sum_k w_k p_k = (4 \cdot 300 \cdot 0,004 + 2 \cdot 200 \cdot 0,003) \cdot 2880 = 17,28 \text{ МВт} \cdot \text{год.}$$

Відповідь. Математичне сподівання не відпущеної з шин електростанції електроенергії становить 17,28 МВт · год.

Приклад 3.7. Приклад статистичного ряду середньомісячних результатів спостережень спускань води з водосховища та відповідного вироблення електроенергії на гідроелектростанції (ГЕС) наведено у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Статистичний ряд середньомісячних результатів спостережень спускань води із водосховища та відповідного вироблення електроенергії на ГЕС

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{Q}{Q_{\max}}$	0,5	0,4	0,8	1	1	0,9	0,9	0,85	0,65	0,6	0,55	0,5
$\frac{N}{N_{\max}}$	0,4	0,35	0,7	1	0,95	0,85	0,8	0,75	0,55	0,45	0,45	0,4

Обчислити статистичні характеристики двовимірного випадкового вектора та записати одне з рівнянь регресії його компонент.

Розв'язання. Математичне сподівання для кожного елемента, відповідно:

$$M(Q) = \frac{\sum_i Q_i}{12} = 0,721; \quad M(N) = \frac{\sum_i N_i}{12} = 0,638.$$

Дисперсія:

$$D(Q) = \frac{1}{11} \cdot \sum_i (Q_i - M(Q))^2 = 0,045; \quad D(N) = \frac{1}{11} \cdot \sum_i (N_i - M(N))^2 = 0,054..$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\delta(Q) = \sqrt{D(Q)} = 0,212; \quad \delta(N) = \sqrt{D(N)} = 0,232.$$

Коефіцієнт коваріації:

$$k(Q, N) = \frac{\sum_i (Q_i - M(Q)) \cdot (N_i - M(N))}{12} = 0,044.$$

Запишемо рівняння регресії

$$M(N, Q) = \frac{k(Q, N)}{(\delta(Q))^2} \cdot (Q - M(Q)) + M(N) = \frac{0,044}{0,045} \cdot (Q - 0,721) + 0,638;$$

$$M(N, Q) = 0,978 \cdot Q - 0,067.$$

Відповідь: $M(Q) = 0,721$; $M(N) = 0,638$;

$$D(Q) = 0,045; \quad D(N) = 0,054;$$

$$\delta(Q) = 0,212; \quad \delta(N) = 0,232; \quad k(Q, N) = 0,044.$$

Рівняння регресії $M(N, Q) = 0,978Q - 0,067$.

Модою M випадкової величини називають її найімовірніше значення. Для неперервної випадкової величини модою вважають те значення, у якому густина ймовірності є максимальною (рис. 3.4). У деяких випадках крива розподілу може мати більше одного максимуму; такий розподіл називають *полімодальним*. Медіаною випадкової величини X називають таке її значення Me , для якого $P(X < Me) = P(X > Me)$, тобто з однаковою ймовірністю може виявитися випадкова величина, більша або менша від Me . Геометрично медіана – це абсциса точки, у якій площа, обмежена кривою розподілу, ділиться навпіл (рис. 3.5).

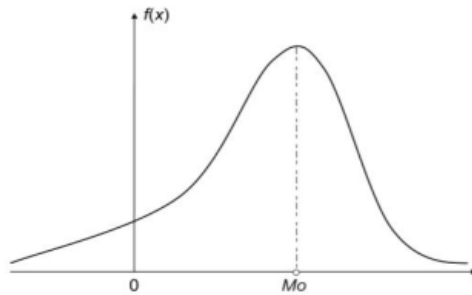


Рис. 3.4. Графік визначення моди M_0 неперервної випадкової величини

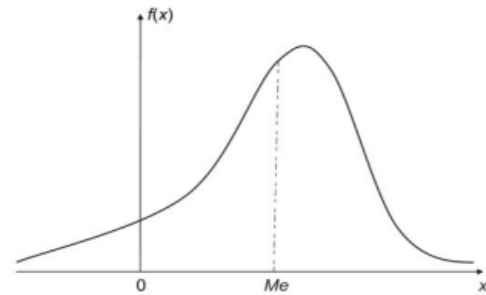


Рис. 3.5. Графік визначення медіани Me неперервної випадкової величини

У разі симетричного модального розподілу медіана збігається з модою та математичним сподіванням. *Центрованою випадковою величиною* X , що відповідає величині X , називають відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$X^0 = X - m_x. \quad (3.16)$$

Центрування випадкової величини полягає у перенесенні початку координат у середню (центральну) точку, абсциса якої дорівнює математичному сподіванню.

Дисперсія випадкової величини характеризує розсіювання (розкидання) значень величини близько від її математичного сподівання. Для дискретних випадкових величин

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 P_i, \quad (3.17)$$

а для неперервних

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (3.18)$$

Для наочної характеристики розсіювання зручніша величина, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Для цього беруть квадратний корінь з дисперсії, а отриману величину називають *середнім квадратичним відхиленням* (інакше – стандартом) випадкової величини X :

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad (3.19)$$

де σ_x – середнє квадратичне відхилення.

$$P(m \leq m') = \sum_{m=0}^{m'} c_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3.20)$$

Математичне сподівання й дисперсію випадкової величини, розподіленої за біномним законом, розраховують за формулами $M[m] = nP$, $D[m] = \sigma^2[m] = nPq$. За великих значень n біномний розподіл наближається до нормального з параметрами $a = nP$ та $\sigma^2 = nPq$.

Приклад 3.8. В енергосистемі працює 500 комплектів релейного захисту. Імовірність неспрацювання захисту становить 0,002. Визначити ймовірність неспрацювання трьох комплектів релейного захисту.

Розв'язання. За умовою $n = 500$, $k = 3$, $p = 0,002$. Події, що полягають у відмові трьох комплектів релейного захисту незалежні, кількість n велика, а ймовірність у кожному з випадків мала, тому використаємо розподіл Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}; \quad \lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1;$$

$$P_{500}(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = 0,061.$$

Відповідь. Імовірність неспрацювання трьох комплектів релейного захисту дорівнює 0,061.

Згідно з розподілом Пуассона ймовірність того, що випадкова величина M (ціла і додатна) набуде значення m , визначають за формулою:

$$P(m) = \frac{1}{m!} a^m e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

де a – параметр розподілу.

Математичне сподівання й дисперсія розподілу Пуассона рівні між собою і становлять $M[X] = \sigma^2[X] = a$.

Функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (3.21)$$

де a – математичне сподівання; σ^2 – дисперсія випадкової величини.

Нормована й центрована функція нормального розподілу є табульованою:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (3.22)$$

Для ненормованої й нецентрованої функції нормального розподілу

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (3.23)$$

Густину ймовірності нормального розподілу (рис. 3.6) обчислюють за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.24)$$

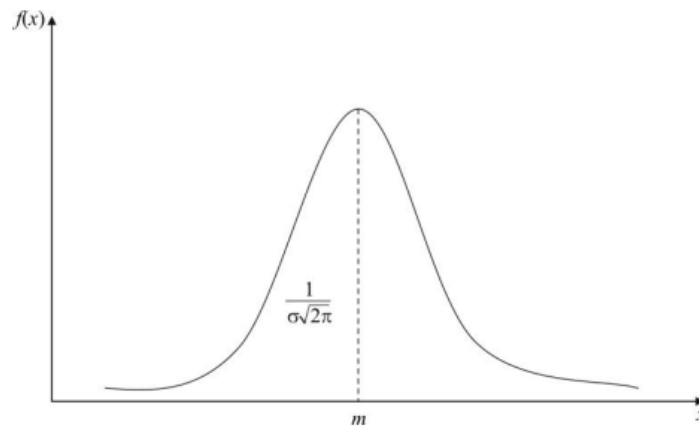


Рис. 3.6. Графік визначення густини ймовірності нормального розподілу неперервної випадкової величини

Розподіл, у якому $a = 0$, називають *центрованим*. Графік функції $f(x)$ розміщено симетрично до початку координат.

Для забезпечення універсальності таблиць застосовують безрозмірний (нормований) аргумент. Для цього приймають $\sigma = 1$. У результаті розраховують нормоване і центроване розподілення, густина якого табульована,

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.25)$$

Щоб обчислити $f(x)$, використовують співвідношення

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (3.26)$$

Якщо напрацювання x до відмови наближено розподілене за нормальним законом, то ймовірність відмови на проміжку $0 \dots x$ розраховують так:

$$P(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx = 1 - F(x) = F_0\left(\frac{a-x}{\sigma}\right). \quad (3.27)$$

Інтенсивність відмов

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{P(x)} = \frac{1}{\sigma} * \frac{\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}{F_0\left(\frac{a-x}{\sigma}\right)} = \frac{1}{\sigma} f_1\left(\frac{a-x}{\sigma}\right), \quad (3.28)$$

де $f_1(y) = \frac{\varphi_0(y)}{F_0(y)}$ – табульована функція.

Приклад 3.9. Математичне сподівання значення напруги на шинах підстанції $M = 108$ кВ; стандартне відхилення $\delta = 5$ кВ за номінального значення напруги 110 кВ. За нормальним законом розподілу визначити ймовірність того, що напруга на шинах підстанції:

- перебуватиме в межах 109–112 кВ;
- буде меншою за 105 кВ.

Розв'язання. Згідно нормального розподілу функція густини відхилення напруги

$$U(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-108)^2}{50}},$$

або функція відхилення напруги

$$f(u) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int_{109}^{112} e^{-\frac{(u-108)^2}{50}} du = F(0,8) - F(0,2) = 0,2881 - 0,0793 = 0,2088.$$

За напруги, меншої ніж 105 кВ,

$$f(u) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int_0^{105} e^{-\frac{(u-108)^2}{50}} du = F\left(\frac{105-108}{5}\right) + 0,5 = -0,2257 + 0,5 = 0,2743.$$

Відповідь. Імовірність того, що напруга на шинах генератора коливатиметься від 109 до 112 кВ, становить 0,2088, а ймовірність того, що напруга буде нижчою за 105 кВ, становить 0,2743.

Напрацювання до відмови багатьох невідновлюваних об'єктів підпорядковано *експоненціальному розподілу*. Для нього густина ймовірності

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad (3.29)$$

де λ – параметр розподілу; $x \geq 0$.

Функція цього розподілу

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (3.30)$$

де t – напрацювання.

Імовірність безвідмовної роботи до напрацювання t

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (3.31)$$

3.2. Методи математичної статистики в задачах аналізу надійності

Встановлення закону розподілу випадкової величини. Нехай у результаті спостережень, випробувань чи вимірювань встановлено n значень деякої випадкової величини X (часу безвідмовної роботи, амплітуди струму блискавки тощо). Одержану сукупність значень X називають простим статистичним рядом. Для встановлення закону розподілу величини X виділяють три етапи:

- оброблення даних простого статистичного ряду та побудова гістограми чи статистичної функції розподілу;
- вибір виду теоретичного розподілу та розрахунок його параметрів;
- перевірка відповідності теоретичного розподілу статистичному за критеріями згоди.

Етап 1. Діапазон значень X поділяють на m інтервалів (розрядів), підраховують кількість значень n_i в кожному розряді, обчислюють статистичну частоту p_i^* (імовірність потрапляння випадкової величини в i -й інтервал) за формулою

$$p_i^* = n_i / n, \quad \left(\sum_{i=1}^m p_i^* = 1 \right) \quad (3.32)$$

і будують статистичний ряд (табл. 3.3). Якщо випадкова величина потрапляє точно на межу двох інтервалів, то до суміжних значень n_i та n_{i+1} додають по 0,5. Число розрядів рекомендується вибирати рівним 10...20.

Таблиця 3.3

Статистичний ряд випадкової величини

Інтервали значень	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_i, x_{i+1}	...	x_m, x_{m+1}
Кількість значень в інтервалі	n_1	n_2	...	n_i	...	n_m
Статистична частота	p_1^*	p_2^*	...	p_i^*	...	p_m^*

Потім статистичний ряд оформляють графічно у вигляді гістограми (рис. 3.7, а). Для цього по осі значень x відкладають розряди і на кожному розряді, як на основі, будують прямокутник заввишки

$$h_i = p_i^* / \Delta x_i. \quad (3.33)$$

Повна площа гістограми згідно з (3.32) дорівнює одиниці. Гістограма завжди вписується у криву густини розподілу випадкової величини X .

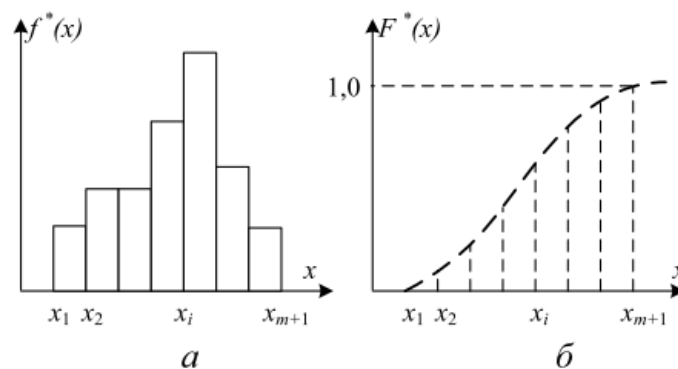


Рис. 3.7. Гістограма (а) і статистична функція розподілу (б)

Для побудови статистичної функції розподілу (рис. 3.7, б) розраховують її значення в дискретних точках, що відповідають межам інтервалів

$$\begin{aligned}
F^*(x_1) &= 0; \quad F^*(x_2) = p_1^*; \quad F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*; \\
F^*(x_i) &= \sum_{k=1}^{i-1} p_k^*; \quad F^*(x_{m+1}) = 1, 0.
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

Етап 2. Тут розв'язують задачу вирівнювання статистичного ряду, яка полягає у виборі кривої теоретичного розподілу, що якнайкраще описує цей статистичний розподіл. Теоретичну криву вибирають переважно, враховуючи міркування, пов'язані із суттю задачі (фізикою явища). У разі відсутності таких міркувань теоретичний розподіл вибирають за зовнішнім виглядом обвідної $f^* x$ чи $F^* x$. Потім встановлюють значення параметрів теоретичного розподілу, за яких його відповідність статистичному розподілові найповніша.

За даними статистичного ряду (табл. 3.2), математичне сподівання (статистичне середнє випадкової величини) m_x^* і статистичну дисперсію D_x^* обчислюють як

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^m x_{i\text{cp}} p_i^*; \quad D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^m (x_{i\text{cp}} - m_x^*)^2 p_i^*,
\tag{3.35}$$

де $x_{i\text{cp}}$ – середнє значення випадкової величини в i -му розряді.

Аналогічно обчислюють статистичні початкові та центральні моменти будь-яких порядків

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^m x_{i\text{cp}}^s p_i^*; \quad \mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^m (x_{i\text{cp}} - m_x^*)^s p_i^*.
\tag{3.36}$$

Припустимо, що висунуто гіпотезу експоненційного розподілу (3.12). Його єдиний параметр може бути визначений двома способами

$$\lambda = 1/m_x^*; \quad \lambda = 1/\sqrt{D_x^*} = 1/\sigma_x^*.
\tag{3.37}$$

Якщо для досліджуваного статистичного розподілу m_x^* та σ_x^* чисельно різні, то бажано знати, яка з формул забезпечує краще наближення експоненційного розподілу до статистичного. На це питання можна відповісти, застосувавши критерії згоди.

Етап 3. Узгодженість статистичного та підбраного теоретичного розподілу найчастіше перевіряють, використовуючи критерій згоди К. Пірсона (критерій χ^2). Не вдаючись до теоретичних засад критерію, наведемо послідовність перевірки узгодженості розподілів.

1. Визначають міру розходження χ^2 за формулою

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^m (p_i^* - p_i)^2 / p_i = \sum_{i=1}^m (n_i - np_i)^2 / (np_i), \quad (3.38)$$

де p_i – імовірність потрапляння випадкової величини в i -й інтервал, визначена за встановленим теоретичним розподілом

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i). \quad (3.39)$$

2. Визначають параметр r – число «ступенів вільності» розподілу

$$r = m - s, \quad (3.40)$$

де s – кількість незалежних умов, накладених на частоти p_i^* .

Першою незалежною умовою, яка завжди враховується, є умова (3.32) рівності одиниці суми частот усіх розрядів. Другою і наступними умовами є вирази m_x^* , D_x^* , $\alpha_s^*[X]$ і $\mu_s^*[X]$. Враховують ті з виразів, які використовують для визначення параметрів теоретичного розподілу.

3. Звертаються до таблиці розподілу χ^2 і за розрахованими значеннями χ^2 та r визначають імовірність p того, що величина, підпорядкована розподілу χ^2 , перевищить значення, обчислене за формулою (3.38). Якщо $p > 0.3$, то можна вважати, що встановлений теоретичний розподіл добре узгоджується зі статистичним. Допускаються навіть дещо менші значення p .

Приклад 3.10. В електроенергетичній системі реєструвався час $T_{\text{л}}$ роботи ПЛ 35 кВ між відмовами. Оскільки ПЛ мали різну довжину l , то щоб узагальнити статистичний матеріал, величина $T_{\text{л}}$ зводилася до єдиної довжини 100 км за формулою

$$T = T_{\text{л}} l / 100.$$

Зафіксовано 40 значень часу T , вимірюваного в годинах: 2540, 8800, 12420, 7670, 4070, 3980, 1330, 6870, 1900, 10340, 980, 1590, 3940, 3430, 5550, 4740, 7390, 7540, 9380, 6530, 1200, 1610, 3760, 6320, 15200, 1410, 3340, 3900, 5070, 4290, 8700, 1300, 11380, 2570, 6930, 7720, 1740, 3880, 2630, 4970. Встановити закон розподілу часу роботи між відмовами.

Розв'язання. Значення величини T знаходяться в діапазоні 0–16000 год. Розділимо його на 8 інтервалів і для кожного з них обчислимо величини, вказані в табл. 3.4.

Гістограма, побудована на рис. 3.8 за даними табл. 3.4, показує, що характер зміни $f^* t$ переважно відповідає експоненційному розподілові. Тому прийmemo гіпотезу цього закону розподілу.

Таблиця 3.4

Результати оброблення статистичних даних

Інтервали величини T		0–2000	2000–4000	4000–6000	6000–8000	8000–10000	10000–12000	12000–14000	14000–16000
Кількість значень T	n_i	9	10	6	8	3	2	1	1
Середнє значення T	$T_{\text{ср}}$	1451	2997	4782	7121	8960	10860	12420	15200
Статистична частота	p_i^*	0,225	0,25	0,15	0,20	0,075	0,05	0,025	0,025
Теоретична частота	p_i	0,32	0,22	0,15	0,11	0,07	0,05	0,03	0,02

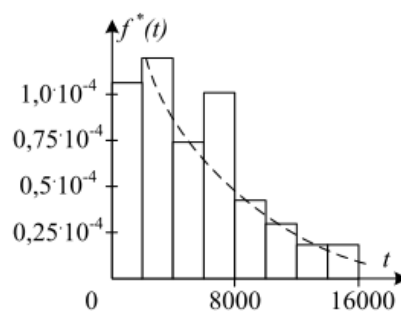


Рис. 3.8. Гістограма величини T

Математичне сподівання часу роботи між відмовами $m_T^* = T_{\text{ср}}^*$, обчислене за формулою (3.35), дорівнює 5223 год. Крива густини теоретичного розподілу наведена на рис. 3.8 штриховою лінією. Наведена в табл. 3.4 теоретична частота p_i розрахована за формулою (3.39).

Для виявлення ступеня узгодженості статистичного та прийнятого теоретичного розподілу за формулами (3.38) і (3.40) розраховано значення $\chi^2 = 4,34$ і $r = 6$. За таблицею розподілу χ^2 встановлюємо, що ймовірність $p = 0,63$. Отже, узгодженість статистичного і теоретичного розподілів забезпечена.

Оцінка ступеня достовірності статистичних показників надійності.

Нехай для випадкової величини X , математичне сподівання m і дисперсія D якої невідомі, встановлено n значень і розраховано оцінку математичного сподівання $\tilde{m}$ та незміщену оцінку дисперсії $\tilde{D}$.

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^n x_i / n, \quad \tilde{D} = \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m})^2 / (n-1). \quad (3.41)$$

Потрібно виявити точність і надійність оцінки $\tilde{m}$.

Величина $\tilde{m}$ залежить від числа значень n величини X і є випадковою. Закон її розподілу можна вважати нормальним, оскільки $\tilde{m}$ є сумою n незалежних однаково розподілених величин x_i . Математичне сподівання випадкової величини $\tilde{m}$ позначимо $m_{\tilde{m}}$, а середньоквадратичне відхилення – $\sigma_{\tilde{m}}$. Тоді згідно з положеннями теорії ймовірностей отримаємо

$$m_{\tilde{m}} = m; \quad \sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{D_{\tilde{m}}} = \sqrt{\tilde{D} / n}. \quad (3.42)$$

Криву густини розподілу величини $\tilde{m}$ показано на рис. 3.9.

Якщо точність оцінки $\tilde{m}$ задати значенням ε_q , то $|\tilde{m} - m| < \varepsilon_q$ і математичне сподівання m повинно накриватися інтервалом $I_q = (\tilde{m} - \varepsilon_q, \tilde{m} + \varepsilon_q)$, як показано на рис. 3.9.

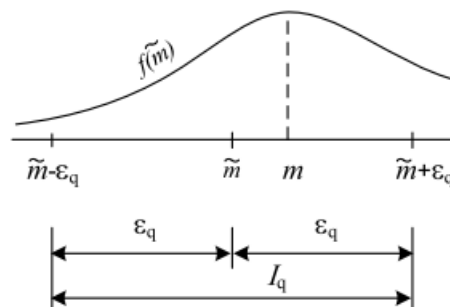


Рис. 3.9. Розподіл оцінки $\tilde{m}$

Обчислена за формулою (3.41) оцінка $\tilde{m}$, будучи розподіленою за нормальним законом, може набути будь-якого значення $-\infty < \tilde{m} < +\infty$. Це означає, що інтервал $I_q = (\tilde{m} - \varepsilon_q, \tilde{m} + \varepsilon_q)$ не завжди накриває значення m , а лише з певною ймовірністю q . Чим більша ця ймовірність, тим надійнішою є оцінка $\tilde{m}$ для точності ε_q .

Величини ε_q і q взаємопов'язані. Зі зменшенням ε_q (підвищенням точності) звужується інтервал I_q і зменшується площа, обмежена кривою густини розподілу $f(\tilde{m})$ та інтервалом I_q , тобто зменшується ймовірність q .

З двох величин ε_q і q заданою може бути лише одна. Найчастіше задають значення q , причому достатньо високі (в межах 0,8...0,99), щоб забезпечити необхідну надійність оцінки, а значення ε_q розраховують. Оскільки q є ймовірністю потрапляння розподіленої за нормальним законом випадкової величини в інтервал I_q її значень, то, враховуючи близькість значень $\tilde{m}$ і m , отримаємо

$$\begin{aligned} q &= F(\tilde{m} + \varepsilon_q) - F(\tilde{m} - \varepsilon_q) = \Phi((\tilde{m} + \varepsilon_q - m) / \sigma_{\tilde{m}}) - \Phi((\tilde{m} - \varepsilon_q - m) / \sigma_{\tilde{m}}) \approx \\ &\approx \Phi(\varepsilon_q / \sigma_{\tilde{m}}) - \Phi(-\varepsilon_q / \sigma_{\tilde{m}}) = 2\Phi(\varepsilon_q / \sigma_{\tilde{m}}) - 1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

звідки

$$\varepsilon_q = \sigma_{\tilde{m}} \arg \Phi((1 + q) / 2) = \sigma_{\tilde{m}} t_q. \quad (3.45)$$

Функція $\arg \Phi((1 + q) / 2)$, позначена t_q , є оберненою до нормальної функції розподілу $\Phi((1 + q) / 2)$. Для залежності $t_q(q)$ складено табл. 3.5.

Залежність (2.65) дає змогу інтервал I_q записати у вигляді

$$I_q = (\tilde{m} - \sigma_{\tilde{m}} t_q; \tilde{m} + \sigma_{\tilde{m}} t_q) \quad (3.46)$$

і точність оцінки $\tilde{m}$ задавати не значенням ε_q , а шириною інтервалу I_q .

Таблиця 3.5

Залежність $t_q(q)$ для обчислення ширини довірчого інтервалу

q	t_q	q	t_q	q	t_q	q	t_q
0,80	1,282	0,85	1,439	0,90	1,643	0,95	1,960
0,81	1,310	0,86	1,475	0,91	1,694	0,96	2,053
0,82	1,340	0,87	1,513	0,92	1,750	0,97	2,169
0,83	1,371	0,88	1,554	0,93	1,810	0,98	2,325
0,84	1,404	0,89	1,597	0,94	1,880	0,99	2,576

Отже, істинне значення показника надійності, для якого за статистичними даними встановлена оцінка $\tilde{m}$, знаходиться в інтервалі I_q з імовірністю q . Інтервал I_q називають *довірчим інтервалом*, а ймовірність q – *довірчою ймовірністю*.

Приклад 3.11. Визначити оцінку $\tilde{t}_*$ для середнього часу відновлення трансформаторів 110 кВ та побудувати її довірчий інтервал I_q для довірчої ймовірності $q = 0,8$. Зібрану в електроенергосистемі статистичну інформацію про значення часу відновлення в годинах задано у вигляді простого статистичного ряду: 248, 28, 317, 46, 204, 211, 140, 82, 60, 223, 64, 306, 30, 196, 92, 218, 106, 161, 210, 246, 52, 330, 206, 120, 223, 59, 272, 36, 145, 230, 74, 347, 112, 44, 251, 173.

Розв'язання. Оцінка для середнього часу відновлення

$$\tilde{T}_в = \sum_{i=1}^n T_{ei} / n = 5862 / 36 = 163 \text{ год.}$$

Незміщена оцінка дисперсії часу відновлення та його середньоквадратичне відхилення

$$\tilde{D}_{\tilde{T}_в} = \sum_{i=1}^n (T_{ei} - \tilde{T}_в)^2 / (n-1) = 9003 \text{ год}^2; \sigma_{\tilde{T}_в} = \sqrt{\tilde{D}/n} = 15,8 \text{ год.}$$

У табл. 3.5 для $q = 0,8$ знаходимо $t_q = 1,282$. Отже, довірчий інтервал I_q оцінки $\tilde{T}_в = 163$ год для довірчої ймовірності $q = 0,8$ становить

$$I_q = (\tilde{T}_в - \sigma_{\tilde{T}_в} t_q; \tilde{T}_в + \sigma_{\tilde{T}_в} t_q) = (163 - 20,25; 163 + 20,25) = (142,75; 183,25).$$

Для таких рівнів точності та достовірності оцінки $\tilde{T}_в$ необхідно продовжити збирання даних, щоб збільшити обсяги статистичної інформації.

Встановлення мінімально необхідних обсягів статистичних даних.

Спостереження за відмовами та випробування на надійність виконують за одним з таких планів: [NUN]; [NUr]; [NRr]; [NMr]; [NUT]; [NRT]; [NMT]; [NUS]; [NRS]; [NMS] і т.д. У наведених позначеннях планів кожна літера несе певний зміст: N – обсяг вибірки; U – невідновлювані об’єкти; R – відновлювані замінювані об’єкти; M – відновлювані ремонтвані об’єкти; r – число відмов чи об’єктів, що відмовили; T – наробок або час випробувань; S – випробування з поточними змінами [5].

План [NUr], наприклад, – це план випробувань (спостережень), згідно з яким випробовують одночасно N об’єктів; об’єкти, що відмовили, не відновлюють і не замінюють; випробування тривають до відмови r об’єктів. Якщо випробування доводять до відмови останнього об’єкта, то план [NUr] вироджується у план [NUN]. Згідно з планом [NMT], одночасно випробовують N об’єктів; після кожної відмови об’єкт відновлюють; випробування тривають протягом заданого часу T або до нагромадження наробку T .

Обсяги випробувань (спостережень) – це кількість випробовуваних об’єктів N для плану [NUN]; кількість випробовуваних об’єктів N і кількість відмов r для планів [NUr], [NMr], [NRr]; кількість випробовуваних об’єктів N і тривалість T випробувань для планів [NUT]; [NRT]; [NMT].

Мінімально необхідні обсяги спостережень визначають за [6]. У цьому нормативному документі зі стандартизації для різних планів спостережень наводять формули та відповідні їм таблиці, за якими можна встановити мінімально необхідні значення N , r , T .

Для плану [NUN], наприклад, для розподілу Вейбула випадкової величини можна встановити необхідне значення N за формулою

$$\frac{2N}{\chi^2_{1-q}(2N)} = (\varepsilon + 1)^b, \quad (3.47)$$

де $\chi^2_{1-q}(2N)$ – квантиль розподілу χ^2 з $2N$ ступенями вільності, що відповідає ймовірності $1-q$; q – довірна ймовірність, яку вибирають з ряду 0,80; 0,90; 0,95;

0,99; ε – гранична відносна похибка, яку вибирають з ряду 0,05; 0,10; 0,15; 0,20; b – параметр розподілу Вейбула.

Формулі (3.47) відповідає табл. 3.6. План [NMr] не вимагає фіксації значень N . Через відновлюваність об'єкта дослідження необхідне значення r можна отримати, спостерігаючи за роботою будь-якої кількості об'єктів. Розподіл наробку між відмовами (до відмови) експоненціальний. У чисельнику тут наведено значення числа відмов r .

Таблиця 3.6

Число відмов r для планів [NMr], [NMT], [NRr], [NRT]

ε	r для q			
	0,80	0,90	0,95	0,99
0,05	331/251	>500/>500	>500/>500	>500/>500
0,10	88/57	217/139	346/231	>500/468
0,15	56/21	114/55	170/94	358/191
0,20	29/10	59/28	116/48	232/98

Приклад 3.12. Визначити необхідний обсяг спостережень за роботою кабельних ліній 10 кВ для встановлення середнього значення часу роботи між відмовами $T_{\text{ср}}$ з граничною відносною точністю $\varepsilon=0,1$ та довірчою ймовірністю $q = 0,9$.

Розв'язання. Кабельні лінії – об'єкти відновлювані та ремонтні, тому вибираємо план [NMr]. Час роботи між відмовами підпорядковується експоненційному закону, тому звертаємося до табл. 3.6 і для заданих значень $\varepsilon = 0,1$ та $q = 0,9$ визначаємо мінімальну кількість відмов $r = 200$, які необхідно зафіксувати, щоб отримати достовірне значення $T_{\text{ср}}$.

За даними табл. 3.6 параметр потоку (частота) відмов кабельної лінії 10 кВ завдовжки 100 км становить $Z_{\text{в}} = 7,5 \text{ рік}^{-1}$. Оскільки необхідний обсяг спостережень V доцільно виражати в одиницях «км·роки», то

$$V = 100 \cdot r / Z_{\text{в}} = 2660 \text{ км} \cdot \text{років}.$$

Отже, спостереження необхідно вести протягом одного року за лініями сумарної довжини 2660 км або протягом більшої кількості років за лініями меншої сумарної довжини.