

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли I роду

За означенням невласні інтеграли I роду обчислюються за формулами:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx; \quad (1)$$

$$2) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx; \quad (2)$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx. \quad (3)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку 3) сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку 3) хоча б одна з двох границь), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$33. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx.$$

┐ Згідно з формулою (1) маємо

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-3}}{-3} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} \right) + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad _ \end{aligned}$$

$$34. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}). \end{aligned}$$

Так як $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{b} = +\infty$, то $\lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2) = +\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. ┐

$$35. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = (-x^2)' dx = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \\ \text{межі:} \\ t_1 = -0^2 = 0 \\ t_2 = -b^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{-b^2} \left(-\frac{1}{2} e^t \right) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \int_0^{-b^2} e^t dt \right) = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^t) \Big|_0^{-b^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-b^2} - e^0) = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{b^2}} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{b^2}} - 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}. \quad _ \end{aligned}$$

$$36. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \text{межі:} \\ t_1 = \ln 2, \quad t_2 = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |t| \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |\ln b| - \ln |\ln 2|). \end{aligned}$$

Так як $\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$, то $\lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |\ln b| - \ln |\ln 2|) = +\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\perp$

$$37. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \text{межі:} \\ t_1 = \ln 2 \\ t_2 = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} t^{-2} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{-1}}{-1} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{t} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} \right) + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}. \quad \perp \end{aligned}$$

$$38. \int_0^{+\infty} \cos x \, dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b. \text{ Отримана границя не існує.}$$

Отже, заданий невластний інтеграл I роду розбіжний. $\perp$

$$39. \int_{-\infty}^1 \frac{x \, dx}{x^4 + 1}.$$

Відповідно до формули (2) маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{x \, dx}{x^4 + 1} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{x \, dx}{(x^2)^2 + 1} = \left. \begin{array}{l} t = x^2, \quad dt = 2x \, dx, \\ x \, dx = \frac{1}{2} dt \\ \text{межі:} \\ t_1 = a^2, \quad t_2 = 1^2 = 1 \end{array} \right| = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{a^2}^1 \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2 + 1} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{a^2}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg t \Big|_{a^2}^1 = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg a^2) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg a^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

оскільки $\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a^2 = \frac{\pi}{2}$ (див. розділ 4, рис. 5). $\perp$

$$40. \int_{-\infty}^0 x e^x \, dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \text{ Нехай } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases} \text{ Тоді } \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$$

$$\text{Маємо } \int_{-\infty}^0 x e^x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(x e^x \Big|_a^0 - \int_a^0 e^x \, dx \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(0 \cdot e^0 - a \cdot e^a - e^x \Big|_a^0 \right) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{-a}{e^{-a}} - (e^0 - e^a) \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a \right).$$

Оскільки $\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 0$, то потрібно обчислити границю $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-a}{e^{-a}}$. Так як $\begin{cases} \lim_{a \rightarrow -\infty} (-a) = +\infty \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a} = +\infty \end{cases}$, то для обчислення цієї

границі можна скористатися правилом Лопітала: $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-a}{e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{(-a)'_a}{(e^{-a})'_a} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 0$.

$$\text{Отже, } \int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a \right) = 0 - 1 + 0 = -1. \quad \rfloor$$

$$41. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

┌ Згідно з формулою (3) маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctg x \Big|_a^0 \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg x \Big|_0^b \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \\ &= -\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = -\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \begin{cases} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad \rfloor$$

$$42. \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e^0) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) = +\infty, \end{aligned}$$

так як перша границя дорівнює 1, а друга $-(+\infty)$.

Отже, заданий інтеграл є розбіжним. $\rfloor$

$$43. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x^3}{1+x^4} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x^3}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^4, \\ dt = 4x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{1+a^4}^1 \frac{1}{4} \frac{dt}{t} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{1+b^4} \frac{1}{4} \frac{dt}{t} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \int_{1+a^4}^1 \frac{1}{t} dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_1^{1+b^4} \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln |t| \Big|_{1+a^4}^1 + \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |t| \Big|_1^{1+b^4} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln |1+a^4|) + \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |1+b^4| - \ln 1) = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \ln(1+a^4)) + \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(1+b^4) - 0) = \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln(1+a^4) + \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(1+b^4). \end{aligned}$$

Оскільки $\begin{cases} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln(1+a^4) = +\infty \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(1+b^4) = +\infty \end{cases}$, то заданий інтеграл є розбіжним. $\square$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невластні інтеграли I роду або довести їх розбіжність:

44. $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^5} dx$.

45. $\int_1^{+\infty} (2x+1) dx$.

46. $\int_{-\infty}^1 e^x dx$.

47. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$.

48. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

49. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$.

50. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 dx}{x^6 + 2}$.

51. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

52. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

53. $\int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Невластні інтеграли II роду

Невластний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a, b]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f(x)$ необмежена у точці $x = a$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (4)$$

Тут і далі $\varepsilon > 0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f(x)$ необмежена у точці $x = b$ ($\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (\varepsilon > 0). \quad (5)$$

3) $f(x)$ необмежена у точці $c \in (a, b)$ ($\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$). Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невластні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку 3) сумі значень двох границь. При цьому невластні інтеграли називають *збіжними*. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку 3) хоча б одна з двох), то відповідні невластні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

54. $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$.

Г Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ (див. розділ 4), то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 2$. Згідно

з формулою (4) дістанемо

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x-2} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3-2} - \frac{-1}{2+\varepsilon-2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Так як $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$.

Отже, заданий невластний інтеграл II роду розбіжний. ┘

$$55. \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx.$$

┐ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 3$. Знаходимо

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{x-3} \right) \Big|_{3+\varepsilon}^4 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \cdot 1 - 2 \cdot \sqrt{\varepsilon} \right) = 2 - 0 = 2. \quad _ \end{aligned}$$

$$56. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

┐ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 1$. Відповідно до формули (5) дістанемо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \quad _ \end{aligned}$$

$$57. \int_3^5 \frac{1}{x-5} dx.$$

┐ Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 5$. Знаходимо

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{1}{x-5} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_3^{5-\varepsilon} \frac{1}{x-5} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|x-5| \Big|_3^{5-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln|5-\varepsilon-5| - \ln|3-5| \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon - \ln 2 \right) = -\infty \end{aligned}$$

Отже, заданий інтеграл розбіжний. ┘

$$58. \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx.$$

┐ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty$ (див. розділ 4), тобто підінтегральна функція необмежена у точці $x = 2$. Згідно з

формулою (6) дістанемо

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx &= \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^3} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} (x-2)^{-3} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-3} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} \Big|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x-2)^2} \Big|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x-2)^2} \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2(2-\varepsilon-2)^2} - \frac{-1}{2(1-2)^2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2(3-2)^2} - \frac{-1}{2(2+\varepsilon-2)^2} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Так як $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} = \infty$, то заданий інтеграл є розбіжним. ┘

$$59. \int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Г Так як $\ln 1 = 0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 1$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ \text{межи } t_1 = \ln 2 \\ t_2 = \ln(1+\varepsilon) \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{t} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |t| \Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon)).$$

Оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \ln(1+\varepsilon) = -\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. $\perp$

$$60. \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

Г Аналогічно попередньому прикладу маємо

$$\int_1^2 \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{t} \right) \Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{\ln 2} - \sqrt{\ln(1+\varepsilon)}) = 2 \left(\sqrt{\ln 2} - \sqrt{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1+\varepsilon)} \right) =$$

$$= 2(\sqrt{\ln 2} - \sqrt{\ln 1}) = 2\sqrt{\ln 2}. \quad \perp$$

$$61. \int_0^1 \ln x dx.$$

Г Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty$ (див. розділ 4, рис. 3а), то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 0$.

Перш, ніж застосувати формулу (4), обчислимо інтеграл ($\varepsilon \in (0,1)$):

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx, v = x \end{array} \right| = \ln x \cdot x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 x \frac{1}{x} dx = \varepsilon \ln \varepsilon - \ln 1 - x \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon.$$

За формулою (4) дістанемо

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon - 1.$$

Маємо границю з невизначеністю $0 \cdot \infty$. Звівши дану невизначеність до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\ln \varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

$$\text{Остаточно маємо } \int_0^1 \ln x dx = 0 - 1 = -1. \quad \perp$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невластні інтеграли II роду або довести їх розбіжність:

$$62. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

$$63. \int_1^2 \frac{2}{x \ln^3 x} dx.$$

$$64. \int_{-1}^0 \frac{3}{(x+1)^4} dx.$$

$$65. \int_0^1 \frac{1}{\arctg x \cdot (1+x^2)} dx.$$

$$66. \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx.$$

$$67. \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx.$$

68. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} dx .$

70. $\int_2^3 \frac{4}{\sqrt[5]{x-2}} dx .$

69. $\int_1^2 \frac{3}{x^4 \sqrt{\ln x}} dx .$