

ЛЕКЦІЯ №8

Оцінки показників надійності технічних систем. Точкові та інтервальні оцінки показників надійності

Точкові оцінки

Найбільше застосування в інженерній практиці одержали наступні точкові оцінки: відбіркова середня та відбіркова дисперсія.

Для одержання формули, яка зв'язує оцінку середнього наробітку до відмови T_1 з одержаними значеннями випадкової величини $t_1, t_2, \dots, t_N$, використовують слідуючи методи точкових оцінок:

- ♦ **графічні** методи (з використанням ймовірнісних паперу та номограм).
- ♦ **аналітичні** методи (метод максимальної правдоподібності, метод моментів та ін.).

Графічний метод широко застосовують в інженерній практиці для визначення закону розподілу випадкової величини по експериментальним даним. Основою методу є застосування координатної сітки (ймовірнісного паперу), що має ймовірнісну шкалу по осі ординат.

Визначення виду розподілу випадкової величини на базі статистичних даних полягає в тому, що на основі цих даних вибирається приблизно такий теоретичний розподіл цієї величини (наприклад, експоненційний), щоб експериментальний розподіл цієї величини на координатній сітці зображався прямою лінією.

При визначенні характеру розподілу відмов експериментальні дані, одержані при випробуванні виробів, записуються в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Δt_i	$N(\Delta t_i)$	$N(t_i)$	$\frac{n(t_i)}{N_0}$	$1 - \frac{n(t_i)}{N_0}$
1	2	3	4	5

В таблиці позначено:

Δt_i – довжина i -го інтервалу часу; $n(\Delta t_i)$ – кількість відмов за час Δt_i ; $n(t_i)$ – накопичене до цього моменту кількість відмов; N_0 – кількість зразків пристроїв, що були поставлені на випробування; $\frac{n(t_i)}{N_0}$ – ймовірність відмови на інтервалі часу $[0, t_i]$.

При перевірці, наприклад, на експоненційний закон використовується папір, по осі абсцис якого нанесена рівномірна шкала для Δt_i , а по осі ординат – логарифмічна шкала.

Перевірка відповідності експериментального розподілу припустимому теоретичному зводиться до перевірки того, чи лягають експериментальні дані на пряму лінію та визначення найбільшого відхилення D по критерію, наприклад, Колмогорова.

При використанні критерію Колмогорова в якості міри розходження експериментального та теоретичного розподілів приймається число D^* , яке вираховується по правилам [25]:

$$D^* = D_{\max} \sqrt{n_i} < 1 \text{ при } n > 100, \quad (8.1)$$

де $D_{\max}$ – максимальне значення різниці статистичної і теоретичної функцій розподілу; n – об'єм вибірки (кількість відмов).

Якщо провести лінію на координатній сітці між точками $\frac{n(t_i)}{N_0}$ або $[1 - \frac{n(t_i)}{N_0}]$ не вдається або не виконується умова (8.1), то слід перейти до перевірки на папір з іншою координатною сіткою і т. д.

Приклад 8.1. При випробуванні на надійність партії однотипних електронних виробів в кількості $N=50$ були одержані наступні дані про відмови виробів, які вказані в таблиці.

Встановити закон розподілу часу безвідмовної роботи виробів шляхом побудови гістограми інтенсивності відмов $\lambda(t)$ та її апроксимації кривою.

Δt_i , год	$n_i(\Delta t_i)$	$N_{\text{сер.}i} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2}$	$\lambda(t) = \frac{n_i(\Delta t_i)}{N_{\text{сер.}i} \cdot \Delta t_i}$
0-100	2	49	$0,408 \cdot 10^{-3}$
100-200	4	46	$0,869 \cdot 10^{-3}$
200-300	6	41	$1,463 \cdot 10^{-3}$
300-400	4	36	$1,111 \cdot 10^{-3}$
400-500	2	33	$0,606 \cdot 10^{-3}$

$$n_i=18$$

Розв'язання:

1) визначимо середню кількість справно працюючих виробів в інтервалах часу Δt_i за формулою:

$$N_{\text{сер.}1} = \frac{50+48}{2} = 49; N_{\text{сер.}2} = \frac{48+44}{2} = 46 \text{ і т.д.}$$

2) визначимо інтенсивність відмов виробів в i -му інтервалі часу за формулою:

$$\lambda^*(t) = \frac{n_i(\Delta t_i)}{N_{\text{сер.}i} \Delta t_i} = \frac{2}{49 \cdot 100} = 0,408 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}$$

3) побудуємо гістограму для інтенсивності відмов та апроксимуємо її кривою (рис. 8.2):

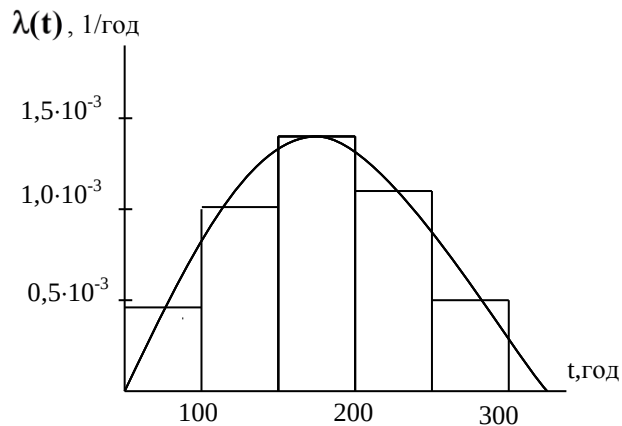


Рис. 8.2

4) визначимо середнє значення інтенсивності відмов та найбільше її відхилення D від середнього значення:

$$\lambda_{\text{сер}} = \frac{(0,408 + 0,869 + 1,463 + 1,111 + 0,606)10^{-3}}{5} = 0,89 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}. \text{ Звідки:}$$

$$D = 1,463 \cdot 10^{-3} - 0,89 \cdot 10^{-3} = 0,57 \cdot 10^{-3}.$$

5) перевіряєм розподіл відмов, одержаний експериментальним шляхом, на відповідність припустимому експоненційному за критерієм згоди А.Н. Колмогорова:

$$D\sqrt{n_i} = 0,57 \cdot 10^{-3} \sqrt{18} = 2,4 \cdot 10^{-3} < 1.$$

Отже, у відповідності з рівнянням $D\sqrt{n_i} \leq 1$ вважаємо, що вид розподілу часу безвідмовної роботи випробуваних виробів практично експоненційний з середньою інтенсивністю відмов $\lambda_{\text{сер}} \approx 0,89 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}$.

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи виробів за час роботи $t = 500$ год за даними, які наведені в таблиці:

$$P(500) = 1 - \frac{n}{N} = 1 - \frac{18}{50} = 0,64.$$

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи виробів за формулою експоненційного розподілу:

$$P(500) = e^{-\lambda_{\text{ср}} \cdot t} = e^{-0,8910^{-3} \cdot 500} = 0,64.$$

Як бачимо, розходження обчислення, виконаного за експоненційним розподілом, з експериментальними даними немає.

Метод максимальної правдоподібності

Для підбору виду теоретичного розподілу, який би достатньо близько підходив до експериментального розподілу, частіше всього застосовують метод максимальної правдоподібності, запропонований Фішером. Цей метод є загальним методом точкових оцінок експериментальних розподілів.

Функцією максимальної правдоподібності називають функцію $L(\theta)$ параметра θ , яка визначається рівністю:

♦ у випадку, коли випадкова величина X дискретна,

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) P(x_2, \theta) \dots P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta); \quad (8.2)$$

♦ у випадку, коли випадкова величина X неперервна зі щільністю розподілу $f(x, \theta)$,

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta). \quad (8.3)$$

Оцінкою максимальної правдоподібності θ^* називається те значення параметра θ , при якому функція правдоподібності досягає найбільшого значення при даних $x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто є розв'язком рівняння $L(\theta^*) = \max L(\theta)$.

Отже, метод максимальної правдоподібності полягає в пошуку максимуму функції правдоподібності.

Для зручності обчислення використовують логарифмічну функцію правдоподібності $y = \ln L(\theta)$.

Для знаходження оцінки максимальної правдоподібності розв'язують рівняння:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (8.4)$$

Як приклад застосування методу максимуму правдоподібності знайдемо оцінку параметру λ експоненційного розподілу.

Для експоненційного розподілу випадкової величини при випробуваннях на безвідмовну роботу виробів одержані дані $t_1, t_2, \dots, t_n$ зі щільністю:

$$F(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Необхідно дати статистичну оцінку максимальної правдоподібності для параметру λ .

Оскільки випадкова величина T неперервна, то функція правдоподібності має вигляд:

$$L(\lambda) = f(t_1, \lambda) f(t_2, \lambda) \dots f(t_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i}$$

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n t_i$$

Запишемо рівняння правдоподібності:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i = 0.$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{1}{\bar{T}}$$

Отже, $\lambda^* = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)^{-1}$ є оцінкою максимальної правдоподібності. Цю оцінку називають вибірковою середньою.

У табл. 8.3 для п'яти планів випробувань на надійність приведені формули для обчислення точкової оцінки параметра λ експоненційного розподілу.

Другою точковою оцінкою є вибіркова дисперсія:

$$DT^* = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - MT^*)^2}{N - 1}. \quad (8.5)$$

Таблиця 8.3

План випробувань	Оцінка параметра λ
[NUN]	$\frac{N}{\sum_{i=1}^N t_i}; N > 1$
[NUT]	$\frac{d}{\sum_{i=1}^d t_i + (N - d)T}; d > 0$
[NUR]	$\frac{r - 1}{\sum_{i=1}^r t_i + (N - r)t_r}; r > 1$
[NMT]	$\frac{d}{NT}$
[NMR]	$\frac{r}{Nt_r}$

В якості прикладу розглянемо випробування на надійність по плану **NUN**. Однотипні пристрої в кількості N штук при випробуванні працюють в однакових умовах до відмови кожного з них.

Необхідно визначити по результатам випробувань середній час роботи пристрою до відмови відносно статистичного середнього значення.

В якості статистичного середнього значення часу роботи до відмови T_1 використовується середнє арифметичне значення, яке визначається за формулою:

$$T_1^* = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N}, \quad (8.6)$$

де t_i – час роботи кожного із зразків пристрою до відмови.

Середньоквадратичне відхилення часу роботи пристрою до відмови відносно середнього значення визначається за формулою:

$$\sigma^*(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - T_1^*)^2}{N-1}} \quad (8.7)$$

Середньоквадратичне відхилення середнього значення часу роботи до відмови відносно його середнього значення визначається за формулою:

$$\sigma(T_1) = \frac{\sigma(t)}{N}. \quad (8.8)$$

Для визначення довірчого інтервалу необхідно знати закон розподілу досліджуваної випадкової величини.

Метод моментів

Метод моментів – це загальний метод точкового оцінювання параметрів розподілу, який був запропонований Пірсоном.

Метод моментів при оцінці параметрів статистичного розподілу полягає в прирівнюванні найважливіших значень параметрів статистичного розподілу і відповідних моментів теоретичного розподілу. Наприклад, якщо теоретичний розподіл залежить від двох параметрів, то ставиться вимога, щоб математичне сподівання MT_i та дисперсія DT_i цього розподілу співпадали з відповідними статистичними характеристиками M^*T та D^*T .

Статистичні моменти наробітку до відмови знаходяться за наступними формулами:

♦ початковий статистичний момент k -го порядку:

$$v_{\eta_k}^* = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^k}{N}. \quad (8.9)$$

Очевидно, що статистичним моментом $k = 1$ порядку є $v_1 = MT$ – математичне сподівання.

♦ центральним статистичним моментом k -го порядку:

$$\mu_k^* = \frac{\sum_{i=1}^N (t_i - MT^*)^k}{N}, \quad (8.10)$$

де t_i - наробіток до відмови i -го зразка пристрою із загальної кількості N , що знаходяться на випробуваннях.

Найчастіше на практиці застосовують два моменти:

Статистичне математичне сподівання часу наробітку до першої відмови

$$MT^* = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N} \quad (8.11)$$

та статистична дисперсія часу безвідмовної роботи

$$DT^* = \frac{\sum_{i=1}^N (t_i - MT^*)^2}{N-1} \quad (8.12)$$

Метод моментів в порівнянні з методом максимальної правдоподібності має незначне застосування в зв'язку з тим, що при випробуваннях виробів, як правило, мають справу з неповними вибірками.

Інтервальні оцінки

Розглянуті вище способи точкових оцінок для невідомого параметру (показника надійності) при малих об'ємах вибірки можуть мати істотні похибки, а тому не забезпечують потрібної точності та достовірності оцінювання даних параметрів.

Так, у випадку випробувань високо надійних технічних систем виникають складності точкової оцінки параметрів розподілу в зв'язку з тим, що відмови системи можуть взагалі не відбуватися, а якщо вони і відбуваються, то в невеликій кількості. Тому в теорії надійності оцінюються межі (верхня і нижня) інтервалу, в середині якого з певною ймовірністю знаходиться точне значення невідомого показника надійності при даному об'ємі вибірки.

У якості міри достовірності оцінки в математичній статистиці використовується величина γ^* , яка показує, з якою ймовірністю можна зтверджувати, що знайдений інтервал покриває справжнє значення невідомого параметра θ^* :

$$\gamma^* = P(\theta^* - \theta < \delta) = P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \int_{\theta^* - \delta}^{\theta^* + \delta} f(x) dx \quad (8.13)$$

де γ^* - ймовірність; δ - точність оцінки; $\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$ - нижня та верхня межі надійності.

Величина γ^* задається рядом: 0.8; 0.9; 0.95; 0.99.

Інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який покриває параметр θ^* з ймовірністю γ^* і точністю δ , називається надійним інтервалом.

У випадку інтервальної оцінки середнього наробітку до відмови маємо:

$$\gamma^* = P(T_n < T_1 < T_v),$$

де: T_n , T_v – нижня та верхня межі інтервалу для оцінки параметра T з ймовірністю γ^* .

Таким чином, γ^* інтервал – це випадковий інтервал, що залежить від вибірки (але не від параметра θ).

При оцінці показників надійності за допомогою надійного інтервалу завжди існує ризик зробити похибку, коли справжнє значення невідомого показника буде за межами інтервалу. Це можливо в тому випадку, коли вибраний теоретичний розподіл випадкових величин не співпадає з дослідним розподілом.

Ймовірність такої похибки називають рівнем значущості α . Рівень значущості α та ймовірність γ^* пов'язані між собою співвідношенням:

$$\alpha = 1 - \gamma^*$$

Таким чином, визначення виду розподілу випадкової величини по статистичним даним полягає в тому, що на основі цих даних вибирається припустимо теоретичний розподіл даної випадкової величини (наприклад, експоненційний) і вираховується ймовірність, яка характеризує прийнятність даного припущення.

Якщо ця ймовірність перевершує деяку величину рівня α , то вважають, що вибраний теоретичний розподіл не суперечить експериментальним даним.

Для перевірки допустимості припустимого виду розподілу відмов використовують критерій згоди χ^2 (хі-квадрат) або критерій згоди Колмогорова.

χ^2 – розподіл (критерій Пірсона) має багато різних застосувань, в тому числі і при визначенні надійних меж оцінки середнього значення будь-якого параметра надійності при оцінці статистичних даних по результатам випробувань пристроїв на надійність.

Математичний вираз для даного розподілу має вигляд [15]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\delta} \right)^2, \quad (8.14)$$

де x_i – поточне значення випадкової величини; $\bar{x}$ – середнє значення випадкової величини; σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини від її середнього значення; v – кількість ступенів волі (кількість виробів або відмов при випробуванні на надійність).

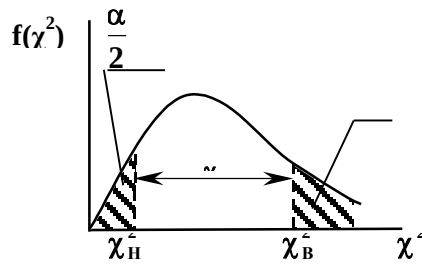


Рис.8.3. Крива щільності χ^2 – розподілу імовірності з нижньою та верхньою межами.

Значення χ^2 є функцією об'єму вибірки виробів N , які підлягають випробуванням.

При кількості ступенів волі $\nu = N - 1 \geq 30$ крива функції χ^2 наближається до кривої нормального розподілу.

При $\nu = N - 1 \leq 30$ значення функції χ^2 визначають по таблиці при різних рівнях значущості α або імовірності γ .

На рис. 8.3 зображена крива щільності χ^2 – розподілу імовірності з нижньою $\chi_{\text{н}}^2$ та верхньою $\chi_{\text{в}}^2$ межами.

Як приклад визначення надійного інтервалу розглянемо такий.

Маємо технічний пристрій, ймовірність безвідмовної роботи якого в період нормальної експлуатації визначається виразом:

$$P(t) = e^{-\lambda t},$$

де λ - інтенсивність раптових відмов пристрою.

Пристрій пройшов випробування на надійність. Необхідно оцінити по статистичним даним випробувань параметр λ , використовуючи для цього χ^2 розподіл.

В табл. 8.4 наведено приклад запису експериментальних даних, які одержані при випробуванні технічного пристрою по плану [NUN], коли всі N зразків пристрою виходять із ладу за час випробувань, тобто $N = r$.

Таблиця 8.4

Сумарний наробіток, t_{Σ} , год	Оцінка інтенсивності відмов λ , год ⁻¹	Нижня межа допуску $\lambda_{\text{н}}$	Верхня Межа допуску $\lambda_{\text{в}}$
$\sum_{i=1}^N t_i$	$\frac{N}{t_{\Sigma}}$	$\frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2t_{\Sigma}}$	$\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)}{2t_{\Sigma}}$

Значення квантілів $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r)$ і $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r)$ визначаються по таблицям χ^2 розподілу з $2r$ ступенями волі (додаток Д1, табл. Д1-3).

Звідки нижня та верхня межі надійного інтервалу для показників безвідмовності пристрою будуть відповідно.

$$P_{\text{н}}(t) = e^{-a_{\text{н}} t} \quad P_{\text{в}}(t) = e^{-\lambda_{\text{н}} t} \quad T_{\text{н}} = \frac{1}{\lambda_{\text{в}}}; \quad T_{\text{в}} = \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}$$

Розглянемо визначення інтервальної оцінки для коефіцієнта готовності відновлюваного пристрою.

Особливістю цього визначення є те, що випадкова величина K_r є функцією двох випадкових величин T_0 і $T_{\text{в}}$:

$$K_r = \frac{T_0}{T_0 + T_b} = \frac{1}{1 + \frac{T_b}{T_0}} \quad (8.15)$$

Оскільки T_0 і T_b пов'язані з χ^2 розподілом співвідношеннями:

$$\frac{2t_p}{T_0} = \chi^2(T_0); \quad \frac{2t_p}{T_b} = \chi^2(T_b), \quad (8.16)$$

а саме відношення $\chi^2(T_0)$ і $\chi^2(T_b)$ розподілено по закону F – розподілу, тобто:

$$\frac{\chi^2(T_0)}{\chi^2(T_b)} = F, \quad (8.17)$$

то з (8.16) і (8.17) одержимо формули для нижньої та верхньої меж значень K_r :

$$K_{r\ n} = \frac{1}{(1 + \frac{T_b}{T_0} F_b)}; \quad K_{r\ b} = \frac{1}{(1 + \frac{T_b}{T_n} F_n)} \quad (8.18)$$

Числові значення F_n і F_b визначаються з таблиці F – розподілу, вхідними даними для якої є: P_1 (для F_n), P (для F_b) та кількість ступенів волі k . F – розподіл приведено в довідковій літературі.

Як уже відмічалось вище, надійний інтервал – це випадковий інтервал, довжина та положення якого залежать від об'єму вибірки (відмов). У випадку фіксованої точності (величини інтервалу) ймовірність збільшується при збільшенні об'єму вибірки.

При фіксованій виборці (відмов) неможливо збільшити ймовірність, не зменшуючи при цьому точність, тобто розширяючи надійний інтервал, і, навпаки, неможливо збільшити точність оцінки, не зменшуючи при цьому ймовірність.