

ЛЕКЦІЯ №6

Інженерні методи забезпечення надійності технічних систем. Наближені методи розрахунку показників безвідмовності. Розрахунок показників ремонтпридатності.

Перехід від логічної моделі до графа станів при оцінці надійності

У ряді випадків при оцінці надійності пристроїв (систем), що відновлюються, із використанням методу графа станів побудова графа стану пристрою може бути значно полегшена, якщо попередньо скласти логічну схему (модель) для розрахунку надійності пристрою, вважаючи його умовно невідновлюваним.

У табл.6.1 приведені типові з'єднання елементів для невідновлюваних систем. Для переходу до графів станів відповідних систем необхідно в графах станів (табл.6.1) вказати стрілки з інтенсивностями відновлень.

Як видно з табл.6.1, послідовному з'єднанню на логічній схемі надійності відповідає простий граф станів, що розгалужується, а паралельному (навантаженому) з'єднанню - складний граф трикутної структури.

На схемах графів (при елементах різної надійності) номери станів позначені двійковим кодом, у якому кількість знаків дорівнює кількості елементів. Місце знака відповідає номеру елемента, а символ "1" і "0" означають працездатний та непрацездатний стани відповідно.

У випадку елементів однакової надійності графи станів спрощуються.

У випадку триразового резервування (резерв навантажений) стани, що відповідають непрацездатності будь-якого з елементів з'єднання розміщуються послідовно зі станами, що відповідають непрацездатності елементів.

З урахуванням цих особливостей структури графа станів перехід від логічної схеми для розрахунку надійності до графа станів варто виконувати в такій послідовності:

1) в логічній схемі для розрахунку надійності виділяють послідовно-паралельні і паралельно-послідовні з'єднання елементів, які потім об'єднують;

2) будують граф станів послідовно-паралельної підсистеми, що складається з елементів, починаючи з вихідного (справного) стану. Кожний такий стан будують з урахуванням попереднього за наступними правилами:

- ♦ всі непрацездатні стани для даної підсистеми є кінцевими, а працездатні стани - проміжними;

- ♦ кожному проміжному i -тому стану відповідає n_1-i таких станів, що різняться непрацездатністю одного з елементів, що були працездатними при i -му стані підсистеми;

- ♦ побудова нових станів продовжуються, доки всі стани графа не стануть кінцевими;

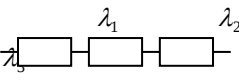
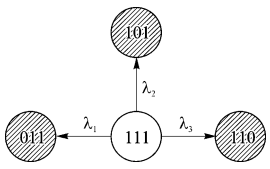
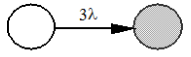
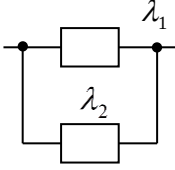
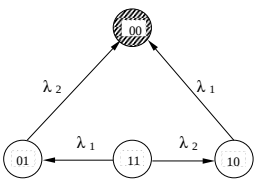
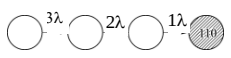
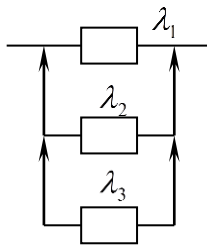
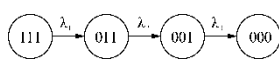
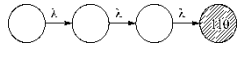
- ♦ однакові стани елементів з'єднуються;

- ♦ кожному проміжному i -тому стану відповідає n_1-i таких станів, що різняться непрацездатністю одного з елементів, які були працездатними при i -му стані підсистеми;

3) за даними правилами будують графи станів окремо для працюючих (навантажених) підсистем і підсистем, що знаходяться в ненавантаженому резерві;

4) кінцеві стани графа станів працюючої (навантаженої) підсистеми є початковими вершинами графа станів для підсистеми, що знаходиться в ненавантаженому резерві. До кожної з цих вершин необхідно приєднати граф станів підсистеми ненавантаженого резерву.

Таблиця 6.1 – Графи станів

Тип з'єднання елементів на логічній схемі	Графи станів	
	при елементах різної надійності	при елементах однакової надійності
		
		
		

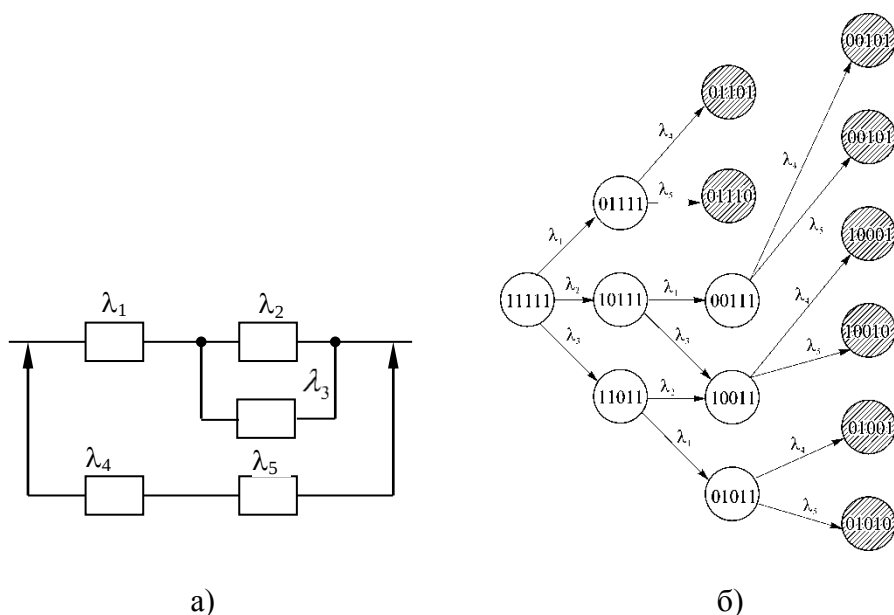


Рис.6.6. Логічна схема для розрахунку надійності (а) та граф станів, що відповідає їй (б). Заштриховано непрацездатні стани

Розглянемо особливості побудови графа при елементах різної надійності. Припустимо, що потік відмов елементів найпростіший, тобто без післядії. В цьому випадку при відмові будь-якого з елементів система з справного стану переходить до

інших станів, кожний з яких відповідає непрацездатності лише одного з елементів, що входять в послідовне або паралельне з'єднання на логічній схемі. При цьому інші елементи системи у цих станах залишаються працездатними.

Так, у випадку дубльованої системи (резерв навантажений) при відмові обох елементів з'єднання, шляхи графа сходяться до одного стану, у якому система непрацездатна.

На рис.6.6 приведено приклад логічної схеми для розрахунку надійності відповідного їй графа станів.

Метод розрахунку надійності із застосуванням формули повної імовірності

Метод заснований на використанні формули повної імовірності:

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j) \cdot P\left(\frac{A}{B_j}\right),$$

де $P(A)$ - ймовірність події A , що може наступити лише за умови появи одної з несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, що утворюють повну групу; $P\left(\frac{A}{B_j}\right)$ - умовна ймовірність події A .

При використанні формули повної імовірності для розрахунку надійності розглядаються гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$ появи несумісних подій, що утворюють повну групу. Разом з однією із цих подій може відбутися подія X - безвідмовна робота системи на протязі часу t .

В цьому випадку формула повної імовірності має вигляд:

$$P(X) = \sum_{j=1}^n P(H_j) \cdot P\left(\frac{X}{H_j}\right) \quad (6.11)$$

Таким чином, ймовірність появи події X (безвідмовна робота системи) дорівнює сумі добутків імовірності кожної гіпотези $P(H_j)$ на умовну ймовірність $P\left(\frac{X}{H_j}\right)$ події при цій гіпотезі.

При використанні формули (6.11) для розрахунку надійності на логічній схемі надійності системи вибирається визначена група елементів і розглядаються всі можливі гіпотези, що стосуються зміни станів цих елементів на протязі наробітку $(0, t)$. При цьому в кожній з гіпотез враховується, що будь-який елемент групи може знаходитися в одному із двох можливих станів: працездатному або непрацездатному.

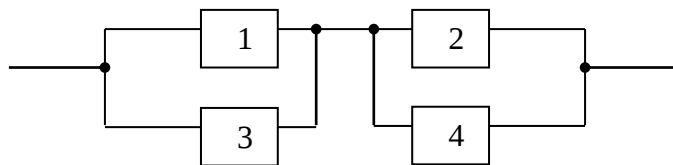


Рис.6.7. Логічна схема розрахунку надійності

Як приклад застосування формули повної імовірності для розрахунку надійності, розглянемо систему, логічна схема якої наведена на рис.(6.7).

Система являє собою паралельно - послідовне з'єднання елементів. Розглянемо групу, що складається з 1 і 2 елементів при таких гіпотезах, що стосуються можливих станів цих елементів:

H₁ - обидва елементи працездатні;

H₂ - перший елемент відмовив, другий елемент залишився працездатним;

H₃ - другий елемент відмовив, перший елемент залишився працездатним;

H₄ - обидва елементи відмовили.

Гіпотези і відповідні їм імовірності наведені в табл.6.2. В таблиці застосовані наступні умовні позначення: символ "1" означає працездатний стан елемента, а символ "0" - непрацездатний.

Таблиця 6.2

Гіпотеза	Стан елемента		Ймовірність гіпотези $P(H_j)$	Умовна ймовірність безвідмовної роботи системи при гіпотезі $P\left(\frac{X}{H_j}\right)$
	1	2		
H₁	1	1	P_1P_2	1
H₂	0	1	q_1P_2	P_3
H₃	1	0	P_1q_2	P_4
H₄	0	0	q_1q_2	P_3P_4

Підставляючи вираз для $P(H_j)$ та $P\left(\frac{X}{H_j}\right)$ в (4.11), одержимо вираз для імовірності безвідмовної роботи системи за заданий час (0, t):

$$P_c(t) = P_1P_2 + q_1P_2P_3 + P_1q_2P_4 + q_1q_2P_3P_4$$

Так як $q_i = 1 - p_i$, то вираз для $P(t)$ буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_c(t) &= P_1P_2 + (1 - P_1)P_2P_3 + P_1(1 - P_2)P_4 + (1 - P_1)(1 - P_2)P_3P_4 = \\ &= P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_4 + P_3 \cdot P_4 - (P_1P_2P_3 + P_1P_2P_4 + P_1P_3 \cdot P_4 + \\ &+ P_2P_3P_4) + P_1P_2P_3P_4. \end{aligned}$$

Застосування даного методу при розрахунку надійності дозволяє скоротити обсяг математичних перетворень і обчислень.

Показники ремонтпридатності.

Властивість ремонтпридатності об'єктів РЕТ прийнято "вимірювати" часом приведення об'єкта в працездатний стан, тобто часом установлення (позначимо його τ). Цей показник у більшості випадків містить у собі такі основні складові:

час виявлення дефекту - причини несправності;

час ремонту або заміни несправного елемента;

час доставки необхідних елементів і деталей;

час налаштування й контролю після ремонту або заміни.

Кожна з перерахованих складових залежить від різноманітних факторів, у результаті чого час відновлення - випадкова величина. Тому для показників

ремонтпридатності технічних об'єктів використовують такі ж імовірні характеристики, як і для показників безвідмовності, а саме:

$v(t)$ - Ймовірність відновлення;

$\bar{v}(t)$ - Ймовірність невідновлення;

$f_{\tau}(t)$ - густина розподілу часу відновлення;

$\mu(t)$ - інтенсивність відновлення;

$T_{\text{в}}$ – середній час відновлення.

Відповідно ДСТУ 2860-94 Ймовірність відновлення $v(t)$ - це ймовірність того, що час відновлення працездатного стану об'єкта не перевищить задане значення.

Відповідно до визначення

$$v(t) = \text{Імов}\{\tau \leq t\}.$$

Так само як й $q(t)$, $v(t)$ - функція розподілу.

Ймовірність невідновлення $\bar{v}(t) = \text{Імов}\{\tau > t\} = 1 - v(t)$.

Для пояснення статистичних оцінок показників ремонтпридатності розглянемо випадок випробування на ремонтпридатність, коли при $t=0$ починається відновлення N_0 однотипних об'єктів й у ході випробувань через рівні проміжки часу Δt фіксується число відновлених об'єктів $N_B(t_i)$, де $t_i = i\Delta t, i = 1, 2, \dots$.

У цьому випадку статистичні оцінки ймовірності відновлення $v(t)$ й ймовірності невідновлення $\bar{v}(t)$ в заданий час визначаються за формулами:

$$v^*(t_i) = \frac{N_B(t_i)}{N_0}; \quad \bar{v}^*(t_i) = \frac{N_0 - N_B(t_i)}{N_0} = 1 - v^*(t_i).$$

Густина розподілу часу відновлення $f_{\tau}(t)$ - це безумовна ймовірність відновлення об'єкта на нескінченно малому проміжку часу $(t, t + \Delta t)$, віднесена до величини цього проміжку:

$$f_{\tau}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{d\bar{v}(t)}{dt}.$$

Статистична оцінка $f_{\tau}^*(t_i)$ визначається за формулою

$$f_{\tau}^*(t_i) = \frac{v^*(t_i + \Delta t) - v^*(t_i)}{\Delta t} = \frac{\Delta n_B(t_i, t_i + \Delta t)}{N_0 \Delta t},$$

де $\Delta n_B(t_i, t_i + \Delta t)$ - число об'єктів, відновлених на i -м проміжку $(t_i, t_i + \Delta t)$.

Інтенсивність відновлення $\mu(t)$ - це умовна густина ймовірності відновлення працездатного стану об'єкта, встановлена для розглянутого моменту часу за умови, що до цього моменту відновлення не було завершено.

За визначенням, $\mu(t) = \frac{f_{\tau}(t)}{\bar{v}(t)}$.

Статистичну оцінку $\mu^*(t)$ можна знайти за наступною формулою:

$$\mu^*(t_i) = \frac{f_{\tau}^*(t_i)}{\bar{v}^*(t_i)} = \frac{\Delta n_B(t_i, t_i + \Delta t)}{[N_0 - N_B(t_i)] \Delta t}.$$

Відповідно ДСТУ 2860-94 середній час відновлення – це математичне очікування часу відновлення працездатного стану об'єкта після відмови, тобто $T_B = M[\tau]$.

Як математичне очікування T_B визначається з виразу

$$T_B = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - v(t)] dt = \int_0^{\infty} \bar{v}(t) dt .$$

Статистичну оцінку T_B знаходять за формулою:

$$T_B^* = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \tau_i ,$$

де τ_i – час відновлення i -го об'єкта.

Якщо оцінка T_B^* визначається за результатами випробувань одного об'єкта, то використовується формула

$$T_B^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i ,$$

τ_i – час відновлення об'єкта після i -ої відмови;

n – число відмов (відновлення) у перебігу часу випробувань об'єкта на надійність.

Розглянуті показники, крім T_B , зв'язані формулами, представленими в табл.6.3.

Таблиця 6.3 - Зв'язок між показниками ремонтпридатності

Відомий показник	Формули для визначення показників			
	$v(t)$	$\bar{v}(t)$	$f_{\tau}(t)$	$\mu(t)$
$v(t)$	-	$1 - v(t)$	$\frac{dv(t)}{dt}$	$\frac{1}{1 - v(t)} \frac{dv(t)}{dt}$
$\bar{v}(t)$	$1 - v(t)$	-	$-\frac{d\bar{v}(t)}{dt}$	$-\frac{1}{\bar{v}(t)} \frac{d\bar{v}(t)}{dt}$
$f_{\tau}(t)$	$\int_0^t f_{\tau}(x) dx$	$\int_t^{\infty} f_{\tau}(x) dx$	-	$\frac{f_{\tau}(t)}{\int_t^{\infty} f_{\tau}(x) dx}$
$\mu(t)$	$1 - e^{-\int_0^t \mu(x) dx}$	$e^{-\int_0^t \mu(x) dx}$	$\mu(t) e^{-\int_0^t \mu(x) dx}$	-

Основні математичні моделі ремонтпридатності

В якості математичної моделі ремонтпридатності можна використати закони розподілу, які були розглянуті вище як моделі безвідмовності. Однак як моделі ремонтпридатності найбільше часто застосовують експонентний розподіл, логарифмічно нормальний розподіл, гамма-розподіл і його окремий випадок - розподіл Ерланга.

Експонентний розподіл

Вирази для показників ремонтпридатності повністю збігаються з відповідними виразами для показників безвідмовності і мають такий вигляд:

$$v(t) = 1 - e^{-\mu t};$$

$$\bar{v}(t) = e^{-\mu t};$$

$$f_{\tau}(t) = \mu e^{-\mu t};$$

$$\mu(t) = \mu = \text{const};$$

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{\mu}.$$

Відповідні цим формулам графіки наведені на рис.6.8. Властивості експонентного розподілу були розглянуті в вище.

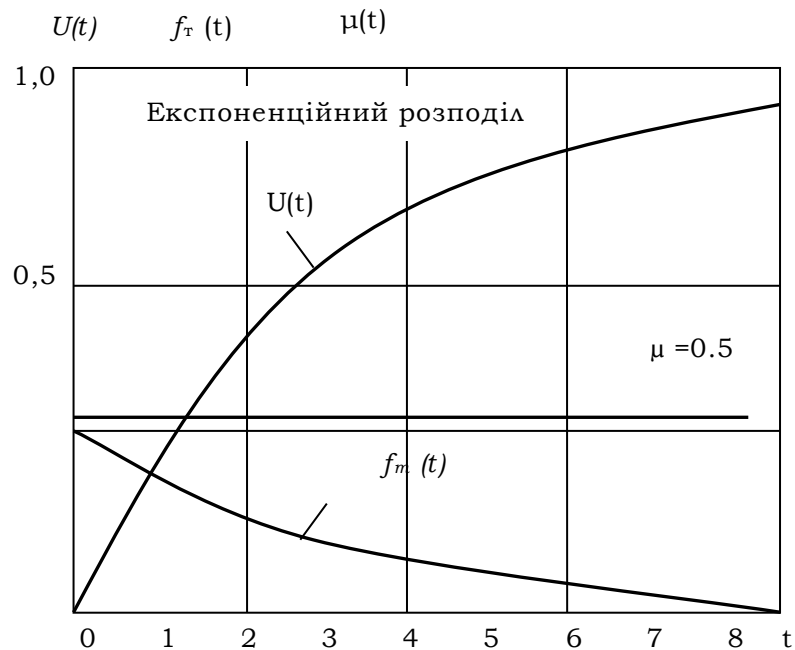


Рис.6.8.

Експонентна модель ремонтпридатності є досить грубим наближенням реального розподілу часу відновлення, однак часто застосовується завдяки її простоті.

Логарифмічно нормальний розподіл

Більш точною моделлю ремонтпридатності в багатьох випадках є логарифмічно нормальний розподіл, що являє собою нормальний розподіл логарифма випадкової величини. Вираз для густини розподілу при логарифмічно нормальному законі має вигляд

$$f_{\tau}(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}},$$

де $m = M[\ln \tau]$ - математичне очікування випадкової величини $\ln \tau$;

σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\ln \tau$.

Математичне очікування можна визначити за формулою

$$m = \ln T_{\text{вн}},$$

де T_{BH} - середній час відновлення при нормальному законі розподілу.
Графіки густини $f_{\tau}(t)$ при різних σ наведені на рис.6.9.

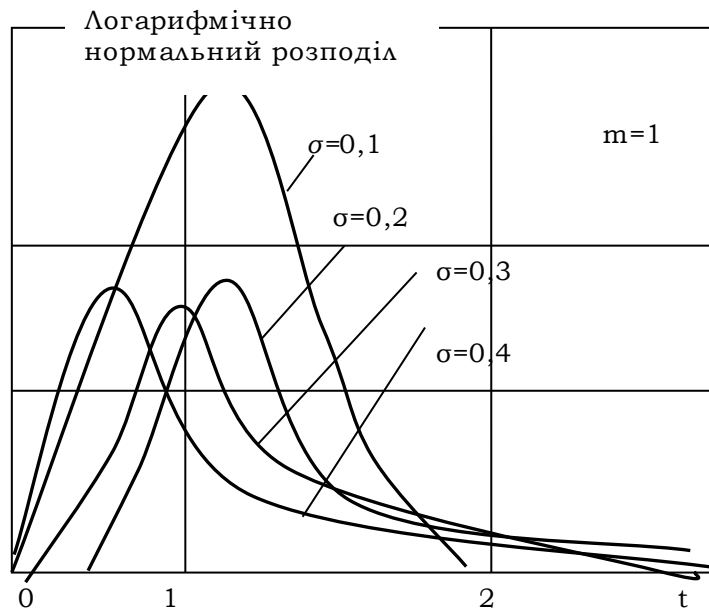


Рис. 6.9.

Показники ремонтпридатності при логарифмічно нормальному розподілі часу відновлення τ мають такий вигляд [10]:

$$v(t) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right),$$

$$\bar{v}(t) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right),$$

$$\mu(t) = \frac{f_{\tau}(t)}{\bar{v}(t)} = \frac{\exp\left[\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma t \sqrt{2\pi} \left[0,5 - \Phi_0\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)\right]},$$

$$T_B = T_{BH} e^{\sigma^2/2}.$$

Гамма-розподіл і розподіл Ерланга

Як підходяща модель ремонтпридатності, а також при розв'язанні інших задач у теорії надійності часто застосовується гамма-розподіл і його окремий випадок - розподіл Ерланга.

Густина імовірності гамма-розподілу має вигляд

$$f_{\tau}(t) = \frac{\mu_0^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu_0 t},$$

де μ_0, k – параметри розподілу (довільні позитивні числа).

Якщо обмежити можливі значення параметра k у розподілі тільки цілими числами ($k = 1, 2, 3, \dots$), то отриманий розподіл буде називатися розподілом Ерланга, що широко застосовується не тільки як модель ремонтпридатності, але й при вирішенні багатьох задач теорії надійності й масового обслуговування.

Розподіл Ерланга можна розглядати як розподіл суми k незалежних випадкових величин, кожна з яких підпорядкована тому самому експонентному закону розподілу з параметром μ_0 . При $k=1$ розподіл Ерланга перетворюється у відомий експонентний розподіл

$$f_{\tau}(t) = \mu_0 e^{-\mu_0 t}.$$

Графіки густини розподілу Ерланга при різних значеннях k (рис.6.10) показують, що зі збільшенням k функція густини розподілу Ерланга наближається до функції густини нормального розподілу.

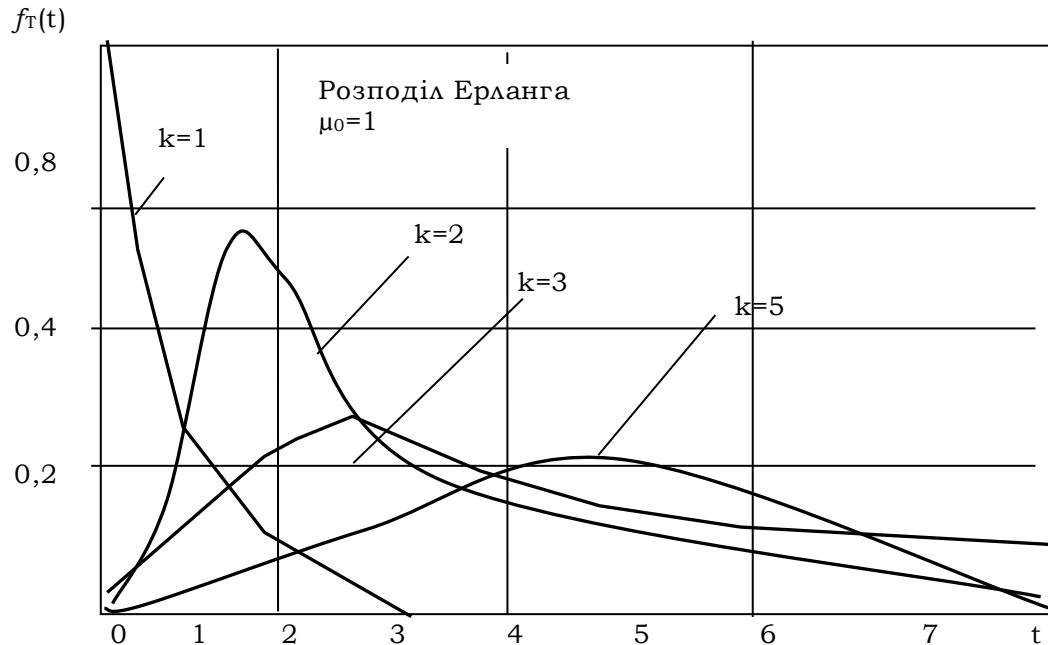


Рис.6.10

Середній час відновлення у випадку розподілу випадкової величини τ за законом Ерланга

$$T_B = M[\tau] = \frac{k}{\mu_0}.$$

Ймовірність відновлення $U(t)$ й невідновлення $\bar{U}(t)$ в заданий час визначають із виразів:

$$U(t) = \frac{\mu_0^k}{\Gamma(k)} \int_0^t x^{k-1} e^{-\mu_0 x} dx = 1 - e^{-\mu_0 t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu_0 t)^i}{i!};$$

$$\bar{U}(t) = e^{-\mu_0 t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu_0 t)^i}{i!}.$$

Як розподіл часу відновлення об'єктів РЕТ часто застосовують закон Ерланга другого порядку. У цьому випадку формули для показників ремонтпридатності мають вигляд:

$$f_{\tau}(t) = \mu_0^2 t e^{-\mu_0 t};$$

$$U(t) = 1 - (1 - \mu_0 t) e^{-\mu_0 t};$$

$$\bar{U}(t) = (1 + \mu_0 t) e^{-\mu_0 t};$$

$$\mu(t) = \frac{f_{\tau}(t)}{\bar{U}(t)} = \frac{\mu_0^2 t}{1 + \mu_0 t};$$

$$T_B = \frac{2}{\mu_0}.$$

Відповідні цим виразам графіки наведені на рис.6.11. Широке застосування описаного розподілу як модель ремонтпридатності пояснюється тим, що час відновлення наближено можна розглядати як суму двох випадкових величин: часу пошуку несправності й часу її усунення.

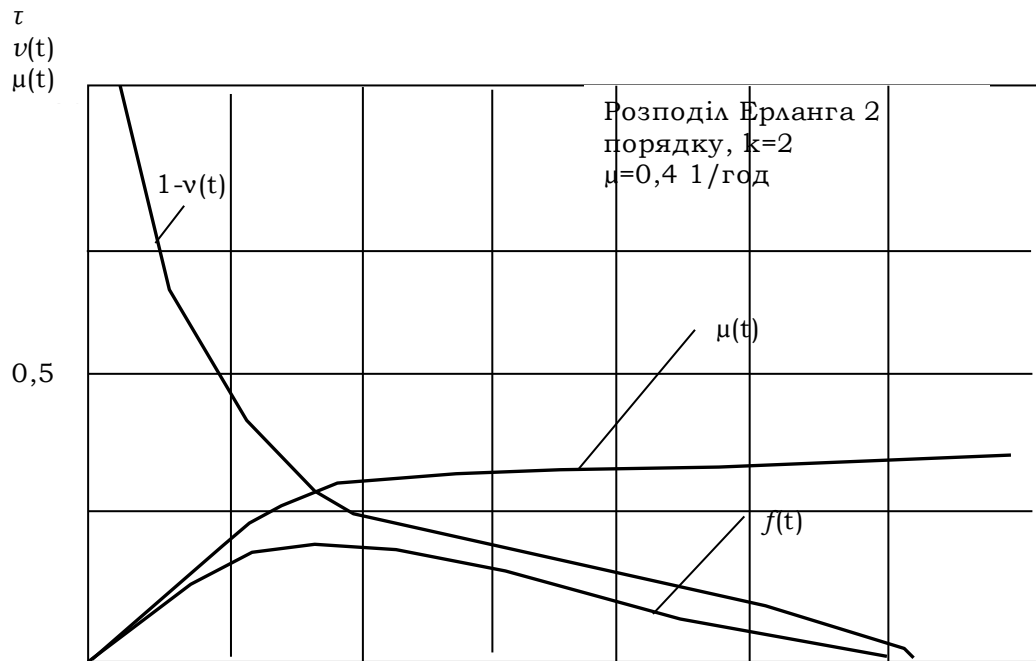


Рис.6.11