

Лекція 4. ПКСУ ТП

Математичні моделі електричних схем комп'ютеризованих систем управління технологічними процесами

1. Способи представлення математичних моделей компонентів електричних схем

Моделі компонентів схем можна розглядати із змістовної точки зору і основну увагу звертати на можливість більш точного відображення в них особливостей реальних компонентів. Розвиток методів автоматизованого проектування примушує виконавців програм оцінювати моделі з точки зору форми її представлення, яка забезпечує ступінь зручності включення її в програму. В цьому розумінні моделі компонентів схем розглядаються як рівняння або система рівнянь, особливістю яких є тип змінних, форма представлення (явна або неявна), відсутність чи наявність похідних тощо. Тобто на перший план виступає математична форма представлення моделі і її тлумачення в термінах теорії кіл. З цієї точки зору компоненти можуть бути такими [12, 25, 30]:

1) i -компонент. Це компонент, рівняння якого має вигляд:

$$i = f(U),$$

$$i = f(i),$$

$$i = f(i, U).$$

де i та U – скалярна або векторна величина.

2) U -компонент. Це компонент, рівняння якого має вигляд:

$$U = f(U),$$

$$U = f(i),$$

$$U = f(i, U).$$

Компонент може бути однополюсним або багатополісним, який можна назвати i -гілкою або U -гілкою. Ці поняття в більшій мірі відповідають специфіці нелінійних схем, ніж поняття Z - або Y -гілок, які використовуються в лінійних схемах. Поняття i -та U -гілок повною мірою відповідають поняттям джерел струму та напруги, але є більш широким, тому що не пов'язані з ідеалізацією внутрішнього опору джерел.

Рівняння, які описують i -та U -компоненти, можна розподілити на три класи:

1. Рівняння з одним аргументом та однією функцією.
2. Рівняння з однією функцією та декількома аргументами.
3. Рівняння з декількома функціями та декількома аргументами.

Компоненти, які описуються рівняннями першого класу, будемо називати скалярними двополюсниками або просто двополюсниками.

Компоненти, які описуються рівняннями другого класу, будемо називати векторними двополюсниками або скалярними багатополісниками, тому що за кількістю входів вони є багатополісниками, а за кількістю виходів – двополюсниками.

Компоненти, які описуються рівняннями третього класу, тобто системою рівнянь, будемо називати векторними багатополісниками.

Розглянемо математичні моделі скалярних двополюсників.

Як вказувалося раніше, скалярні двополюсники описуються рівняннями (в загальному випадку нелінійними) типу $i = f(U)$ або $U = f(i)$. Досить часто розрахунки схем ведуться на базі алгоритмів, заснованих на використанні відрізків ряду Тейлора, які складаються з одного, двох або трьох членів цього ряду, в залежності від необхідної точності розрахунків. Ці моделі отримують розкладом початкової моделі з рівняннями $y = f(x)$ в ряд Тейлора в деякій області ΔX точки X^* :

$$f(X_k + \Delta X) = f(X_k) + \frac{df}{dt} \cdot \Delta X + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dt^2} \cdot \Delta X^2,$$

Якщо вважати, що $X = U$, то отримаємо рівняння для i -компонента:

$$i^* = f(U_k) + Y_k \cdot \Delta U_k + \dot{Y}_k \cdot \frac{(\Delta U_k)^2}{2},$$

де Y_k – диференційна провідність в точці U_k ;

$\dot{Y}_k$ – питома диференційна провідність в точці U_k (друга похідна).

Вважаючи, що $f(U_k) = i_k$, а $\Delta U_k = U_{k+1} - U_k$, можна тейлорівським моделям поставити у відповідність схеми заміщення i -компонента (рис. 2.14).

Для U -компонента маємо аналогічні рівняння:

$$U_k = f(i_k) + Z_k \cdot \Delta i_k + \dot{Z}_k \cdot \frac{(\Delta i_k)^2}{2},$$

де Z_k – диференційний опір в точці i_k ;

$\dot{Z}_k$ – питома диференційний опір в точці i_k .

Схеми заміщення U -компонента наведені на рис. 2.15.

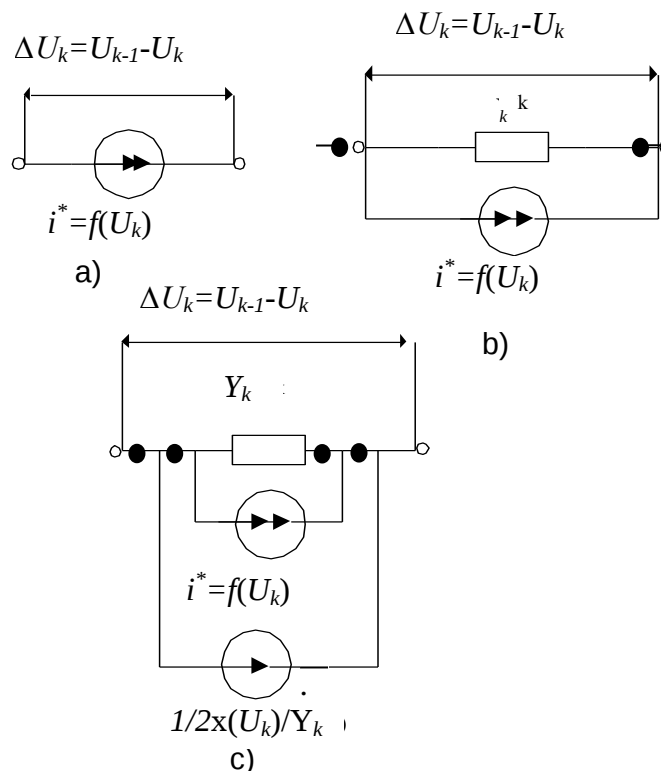


Рис. 2.14. Схеми заміщення i -компонента:

а) використовується один доданок ряду; б) два доданки; в) три доданки

Наведені моделі та схеми їх заміщення будемо називати ітераційними, а індекс k трактувати як номер ітерації. Для використання цих моделей треба розуміти їх дві особливості:

1. Оскільки в моделі замість нескінченної кількості членів ряду Тейлора використовують їх кінцеву кількість, то величина ΔU_k відрізняється від величини $U^* - U_k$

$$\Delta U_k = U^* - U_k \neq U_{k+1} - U_k$$

При розрахунках схеми з такою моделлю на кожній ітерації будемо отримувати не точне значення U^* , а тільки чергове наближення до нього.

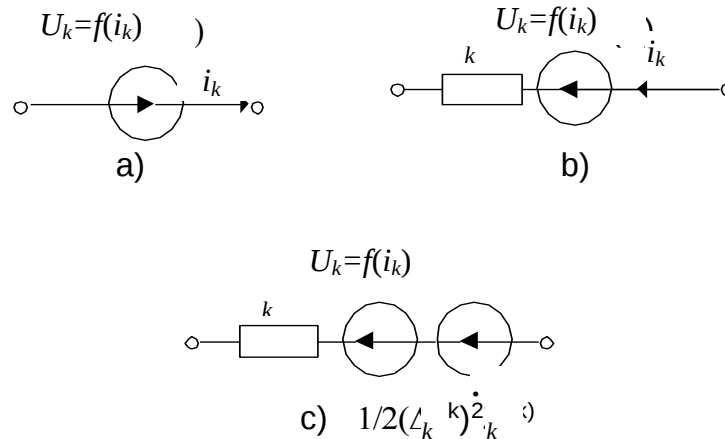


Рис. 2.15. Схеми заміщення U -компонента:

a) використовується один доданок ряду; b) два доданки; c) три доданки

2. Невідомі струми i^* та напруги U^* , які відповідають стану електричної рівноваги, в процесі обчислень складаються в вузлах та контурах по законам Кірхгофа і утворюють в точності нульові суми, так що знати ці значення не потрібно. Звідси також випливає, що i -компоненти можна використовувати тільки в першому законі Кірхгофа, а U -компоненти – тільки в другому законі Кірхгофа.

Розглянемо математичні моделі скалярних та векторних багатополюсників.

Для скалярного багатополюсника, який представлений рівнянням типу $i = f(U_1, U_2, \dots, U_n)$, двочленна тейлорівська модель має вигляд:

$$i^* = f(U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{df}{dU_i} \Delta U_i$$

$$\text{або } i^* = i_k + \sum_{i=1}^k Y_{ik} \cdot \Delta U_{ik}.$$

Аналогічно, для U -компонента маємо:

$$U^* = U_k + \sum_{i=1}^k Z_{ik} \cdot \Delta i_{ik}.$$

Схеми заміщення цих моделей наведені на рис. 2.16.

Векторний багатополіусник описується системою рівнянь. При цьому є велика кількість варіантів таких схем в залежності від вибору незалежних змінних.

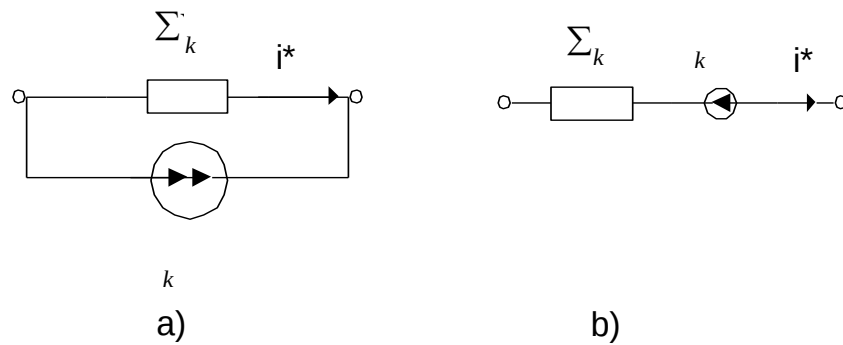


Рис. 2.16. Схеми заміщення скалярного багатополіусника:
а) i -компонент, б) U -компонент

Нехай маємо багатополіусник, зображений на рис. 2.17.

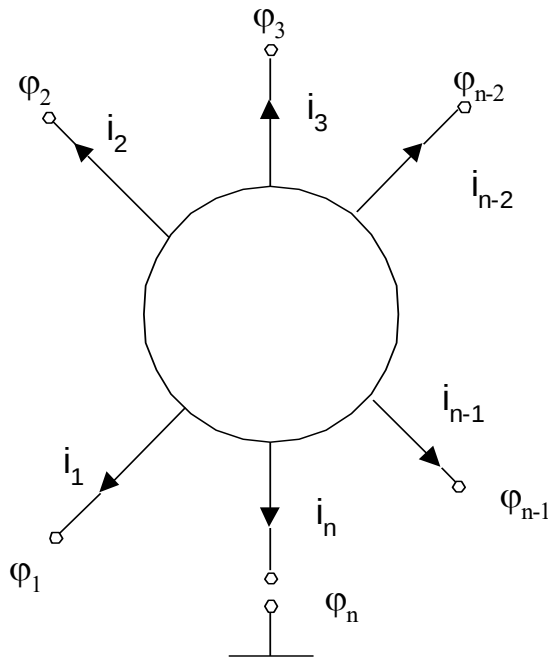


Рис. 2.17

Якщо струм, що протікає через кожний полюс, є функцією потенціалів полюсів відносно деякого базисного вузла, який не входить в число полюсів, то система рівнянь має вигляд:

$$i_m = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \quad m \in 1, 2, \dots, n.$$

Кожне з таких рівнянь можна розглядати як рівняння скалярного i -багатополіусника, а тому схема заміщення одночленного багатополіусника є зірка (рис. 2.18).

Другою системою для опису електричного стану багатополіусника є система міжполюсних величин, яка утворена вектором напруги між полюсами (рис. 2.19).

Якщо напруга між полюсами є функцією струмів кожного з полюсів, то система рівнянь має вигляд:

$$U_m = f(i_1, i_2, \dots, i_n),$$

$$m \in 1, 2, \dots, n.$$

Кожне рівняння відповідає скалярному U -багатополюснику. Одночленна схема його заміщення зображена на рис. 2.20.

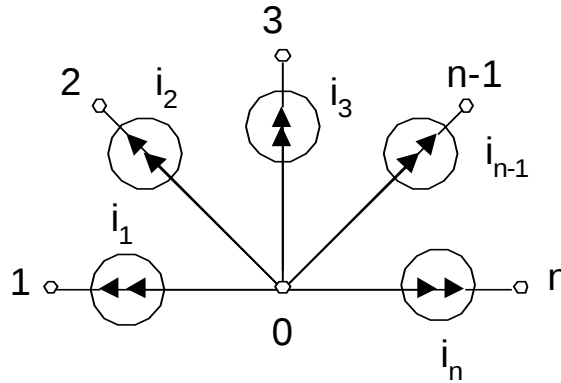


Рис. 2.18

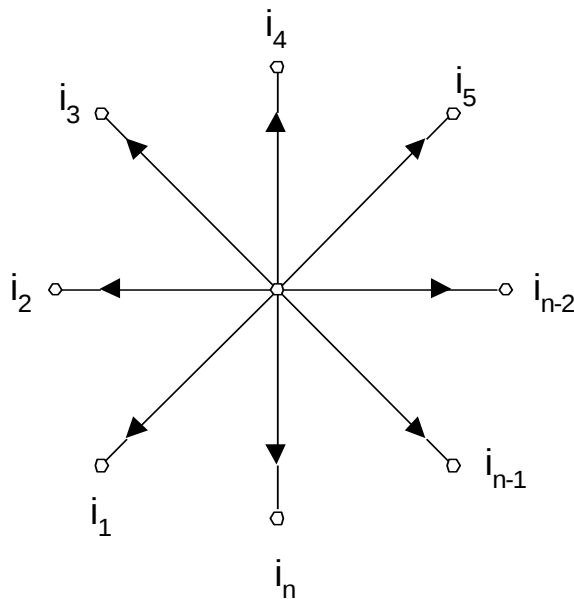
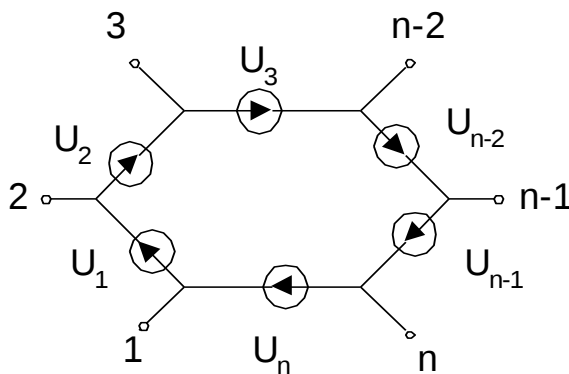


Рис. 5.19



Представлення системи рівнянь тричленним відрізком ряду Тейлора для i -багатополюсника має вигляд:

$$I^* = I_k + Y_k \cdot \Delta\varphi_k + \frac{1}{2} [\Delta\varphi_k^T \cdot Y_k \cdot \Delta\varphi_k],$$

де I^* – вектор невідомих струмів;

I_k – вектор полюсних струмів;

Y_k – матриця вузлових провідностей $\frac{\partial i_i}{\partial \varphi}$;

$[\Delta\varphi_k^T \cdot \dot{Y}_k \cdot \Delta\varphi_k]$ – вектор, в якому $\dot{Y}_k$ – матриця питомих вузлових провідностей $\frac{\partial^2 i}{\partial \varphi^2}$;

$$\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k.$$

Аналогічно для U -багатополюсника:

$$U^* = U_k + Z_k \cdot \Delta I_k + \frac{1}{2} [\Delta I_k^T \cdot \dot{Z}_k \cdot \Delta I_k],$$

Матриця диференційних провідностей (матриця Якобі) має такі властивості:

1. Кожний її елемент дорівнює:

$$\frac{\partial i_p}{\partial \varphi_i} = \partial \sum \frac{i_p}{\partial \varphi_i} = \sum Y_p,$$

де i_p – сума струмів гілок багатополюсника, з'єднаних з p -м полюсом і має такий зміст: він дорівнює сумі диференційних провідностей всіх гілок, в рівняння струмів яких входить потенціал φ_i . Звідси випливає, що власна провідність вузлів або полюсів дорівнює сумі провідностей всіх гілок, які підключені до p -го вузла.

2. Матриця Якобі вироджена, тобто сума елементів по рядках та стовпчиках дорівнює нулю. Усунути цю виродженість можна, якщо викреслити рядок та стовпчик, які відповідають нульовому (базисному) полюсу.

Узагальнюючи розглянуті способи представлення нелінійних статичних i -та U -компонентів, розглянемо загальний підхід до їх моделювання з позиції обчислювальної математики. Принциповим елементом такого підходу є відповідність між порядком обчислювального методу та порядком моделі компонента. Під порядком обчислювального методу розуміється порядок похідних від її функції. Необхідно, щоб використання методу k -того порядку відповідало рівняння такого ж порядку (k доданків ряду Тейлора).

Звідси випливає спосіб розв'язання нелінійних схем чисельними методами, заснованими на розкладі в ряд Тейлора. На кожному j -му кроці розрахунку методом k -го порядку необхідно замінити компонентне рівняння приблизними рівняннями – відрізками ряду Тейлора з $(k + 1)$ - м доданком i , задаючи (або знаючи) значення X_m , вирішити систему рівнянь відносно

приблизного значення X_{m+1} . Якщо чисельний метод сходиться, то X_{m+1} буде ближче до X^* ніж X_m .

2.6. Динамічні компоненти електричних схем

До динамічних компонентів належать ємність та індуктивність. Вони описуються диференційними та інтегральними рівняннями:

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt};$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int i_C dt;$$

$$U_L = L \frac{di}{dt};$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int U_L dt.$$

В загальному вигляді ці залежності можна представити в інтегральній або диференційних формах:

$$Y(X) = \frac{dX(t)}{dt};$$

$$X_{i+1} = X_i + \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} Y(X) dX,$$

де $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ – інтервал часу;

X – напруга на ємності або струм індуктивності.

При розрахунках схем обчислювальними методами функції $U_C(t)$ та $i_L(t)$ відомі не у вигляді формул, а у вигляді таблиць чисел U_{Ci} , i_{Li} для різних моментів часу, а тому диференціювання може бути виконано тільки чисельно. Найпростішою формулою числового диференціювання є формула:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t}.$$

Звідси, ітераційні формули ємності та індуктивності мають вигляд:

$$i_C = \frac{C}{\Delta t} (U_{C(i+1)} - U_{Ci});$$

$$U_L = \frac{L}{\Delta t} (i_{L(i+1)} - i_{Li}).$$

В кожне рівняння входить не дві величини, як у звичайних дво полюсників, а три, але одна з них U_{Ci} та i_{Li} відома або задається на початку обчислень. Таким чином, в кожному рівнянні залишається тільки дві змінні, так що ці рівняння є рівняннями типу $i = f(U)$ або $U = f(i)$. В цих рівняннях не проставлені індекси величин I та U , тому що вони можуть відноситися як до i -го, так і до $(i+1)$ -го моменту часу – в залежності від порядку дій при обчислюванні перехідних процесів в схемі.

Обчислювання перехідних процесів можна організувати двома способами. Перший з них полягає в тому, що спочатку розраховують всі струми

та напруги, крім ємностей та індуктивностей, а потім вони використовуються через ці знайдені величини:

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} f_1(U_C, i_L, \text{решта змінних});$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} f_2(U_C, i_L, \text{решта змінних}).$$

Другий спосіб полягає в одночасному розрахунку всіх змінних схеми.

При першому способі обчислень схеми заміщення ємності та індуктивності мають вигляд, наведений на рис. 2.21.

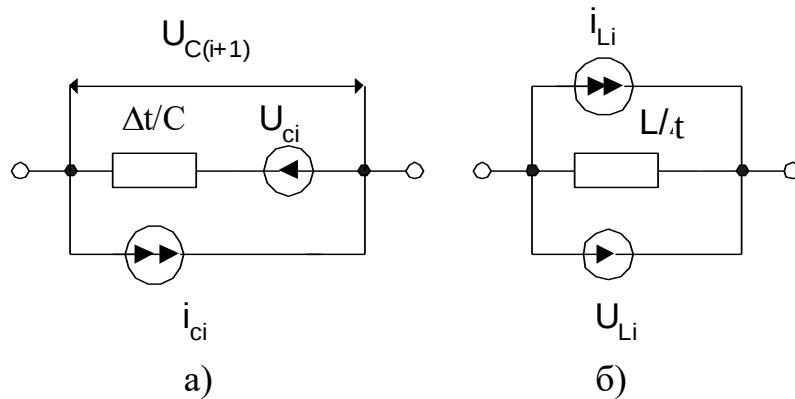


Рис. 2.21. Схеми заміщення ємності та індуктивності:
а) ємність; б) індуктивність

При другому способі обчислень схеми заміщення ємності та індуктивності мають вигляд, наведений на рис. 2.22.

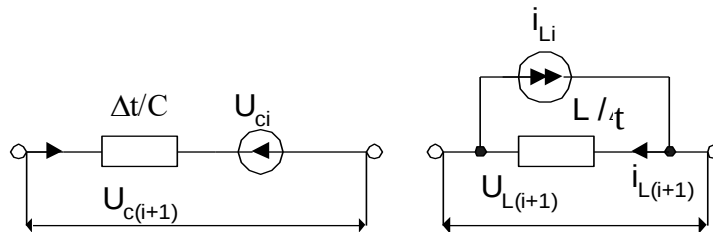


Рис. 2.22. Схеми заміщення ємності та індуктивності:
а) ємність; б) індуктивність

Перший спосіб обчислень застосовують тоді, коли є можливість представити рівняння в явному вигляді.

Далі розглянемо питання взаємозв'язку систем різної фізичної природи на основі досліджених властивостей динамічних компонентів електричних схем.

Можна виділити три типи зв'язків систем різної фізичної природи [17, 35].

Перший тип називається трансформаторним типом зв'язку. При ньому в одну систему включають джерело потенціалу, який залежить від потенціалу на залежному джерелі потоку, яке встановлюють в другу систему і яке, в свою чергу залежить від потоку в першій системі (рис. 2.23).

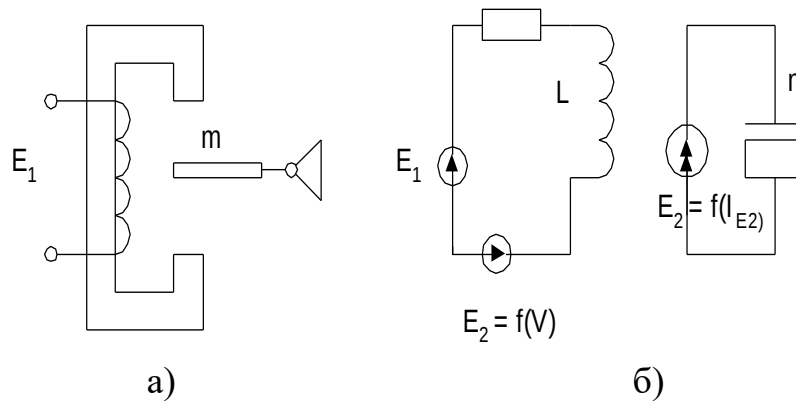


Рис. 2.23. Трансформаторний тип зв'язку систем різної фізичної природи: а) електромеханічний дзвінок; б) схема заміщення

Джерело сили F , яке діє на масу m , залежить від швидкості зміни електромагнітного потоку, тобто від струму через котушку, або теж саме, від струму через джерело проти е.р.с. E_2 , яка залежить від швидкості руху маси m .

Такий тип зв'язку характерний для електромеханічних систем.

Другий тип зв'язку називається гіраторним типом і полягає в тому, що в обидві системи включають джерела одного типу. Такий зв'язок характерний при взаємодії механічної та гідравлічної (пневматичної) систем (рис. 2.24).

Дія на гідросистему зі сторони механічної частини врахована джерелом потоку G , яке залежить від швидкості руху поршня:

$$G = k_1 \cdot V = \rho \cdot S \cdot V,$$

де ρ – щільність рідини;
 S – площа поршня;
 V – швидкість поршня.

Джерело сили F_1 враховує дію гідросистеми на механічну:

$$F_1 = k_2 \cdot P = S \cdot P.$$

Третій тип зв'язку називається зв'язком через залежні параметри. Такий тип зв'язку характерний для взаємодії з тепловою системою, коли від зміни температури змінюються параметри компонентів (наприклад, в'язкість рідини, опір резисторів). Зворотний вплив на теплову систему враховують введенням до неї залежних джерел тепла. Цього зворотного зв'язку може і не бути.

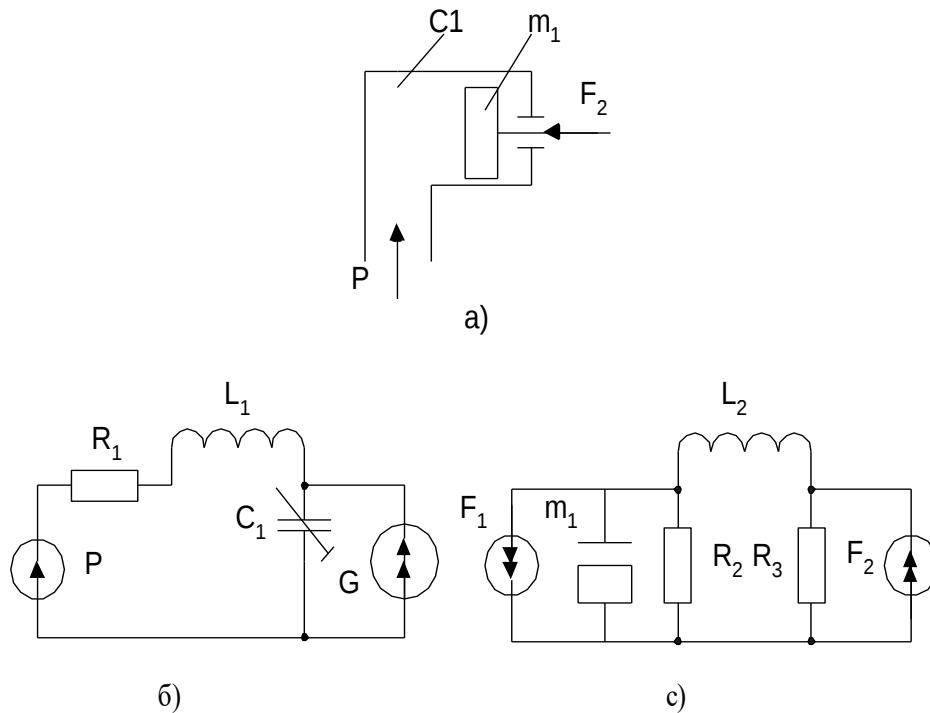


Рис. 2.24. Гіраторний тип зв'язку систем різної фізичної природи:
а) гідропрес; б) схема заміщення гідравлічної частини;
с) схема заміщення механічної частини

2.7. Топологічний опис електричних схем

Найбільш зручною моделлю топологічної (структурної) схеми є граф, вершини якого відповідають точкам з'єднання (вузлам) компонентів, а дуги відповідають компонентам схеми. Тип компонента при цьому не має значення [12,20, 24, 25].

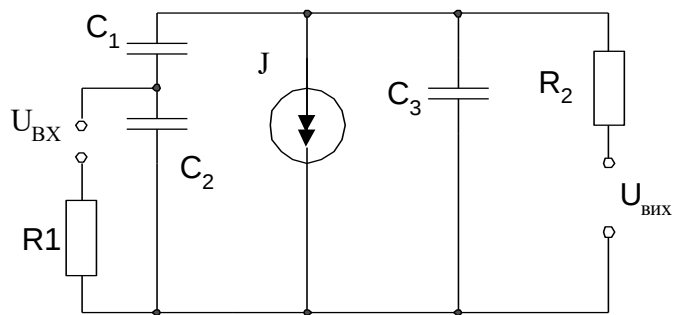
Для побудови графа схеми досить замінити компоненти відрізками лінії будь-якої форми, напрямком яких співпадає з напрямком струму компонента. Цей напрямок може бути встановлений довільно. Перед цим необхідно пронумерувати компоненти та вузли схеми. Складні компоненти (наприклад, транзистори) замінюються схемами заміщення, так що схема перетворюється в множину простих компонентів, які пов'язані між собою певним чином.

Нехай маємо схему, зображену на рис. 2.25.

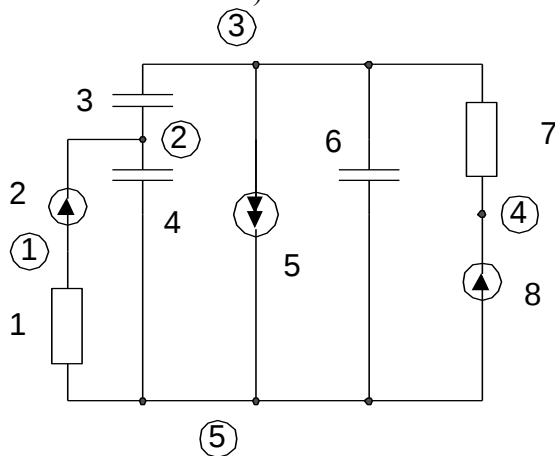
В схемі заміщення номери в кружечках є номери вузлів, решта – номери компонентів.

Граф, побудований по схемі заміщення, зображений на рис. 2.26.

Будь-яка сукупність вершин та гілок називається підграфом (частина графа). Будь-який замкнутий шлях, який дозволяє вийти з вершини і повернутися до неї, не проходячи двічі по одній і тій же гілці і не перетинаючи двічі одну і ту ж вершину, називається контуром. Підграф, який має всі вершини і не має контурів, називається фундаментальним деревом або просто деревом. Гілки, які входять до дерева, називаються ребрами. Решта гілок називаються хордами.



a)



б)

Рис. 2.25. Початкова схема для моделювання:
а) електрична схема; б) схема заміщення

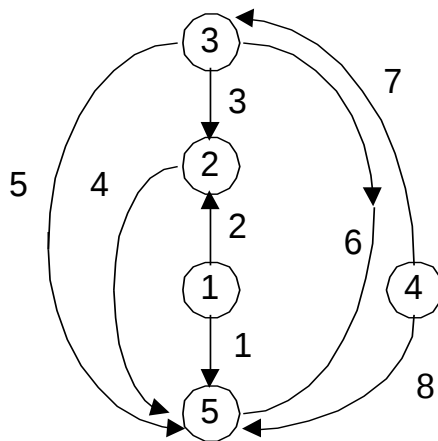


Рис. 2.26

Дерево графа по рис. 2.26 наведено на рис. 2.27.

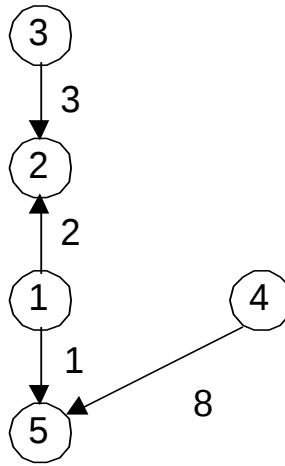


Рис. 2.27

Кількість різних дерев графа дорівнює:

$$\varepsilon = N^{N-2}, \quad (2.4)$$

де N – кількість вершин графа (кількість вузлів схеми).

Граф не є інформацією для комп'ютера, але його можна зобразити у вигляді різних матриць, які називаються топологічними матрицями.

Матриця інциденцій – це матриця, рядки якої відповідають вузлам схеми, а стовпці – гілкам графа. Елемент матриці дорівнює “-1”, якщо гілка входить в i -й вузол, і дорівнює “+1” – якщо гілка виходить з нього. Решта елементів матриці дорівнює нулю, що говорить про відсутність зв'язку гілки з даним вузлом. Для графа по рис. 2.26 матриця інциденцій представлена табл. 2.4.

Таблиця 2.4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1						
2		-1	-1	1				
3			1		1	1	-1	
4							1	1
5	-1			-1	-1	-1		-1

Кожна гілка з'єднана з двома вузлами, в один з яких вона входить, а з іншого виходить. Тому в кожному стовпчику є тільки два ненульових елемента, сума яких дорівнює нулю. Така матриця, як відомо, називається виродженою, а система рівнянь, отриманих на її основі не має рішення. Для усунення цієї виродженості необхідно викреслити рядок, який відповідає в схемі базовому вузлу.

Отримана таким чином матриця представлена табл. 2.5.

Таблиця 2.5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1						
2		-1	-1	1				

3			1		1	1	-1	
4							1	1

Матрицю з табл. 2.5 називають ще матрицею А [12].

Опис графа можна проводити за допомогою матриці розтинів. Розтином називається мінімальна сукупність гілок, яка при видаленні з неї одного елемента розпадається на дві частини. Головним розтином називається розтин, одна з гілок якого є ребро, а решта – хорди. Розтин зображується замкнутою лінією, яка перетинає один раз гілки, що входять до нього. В розтин попадають хорди, які з'єднують дві частини графа. Матриця головних розтинів має кількість рядків, яка дорівнює кількості ребер. Кількість стовпців дорівнює кількості гілок графа. Елемент матриці дорівнює “+1”, якщо гілка входить в розтин, і дорівнює “-1”, якщо гілка виходить з розтину. Можна встановити і інші правила, які повинні бути єдиними при визначенні знаків ненульових елементів матриці.

Для графа по рис. 2.26 матриця розтинів зображена табл. 2.6.

Таблиця 2.6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1			1	1	1	-1	
2		1		1	1	1	-1	
3			1		1	1	-1	
8							-1	1

Переставимо місцями 4-й та 8-й стовпці. Отримаємо матрицю, представлену табл. 2.7.

Таблиця 2.7

	1	2	3	8	4	5	6	7
1	1				1	1	1	-1
2		1			1	1	1	-1
3			1			1	1	-1
8				1				-1

Цю матрицю, яку часто називають матрицею П, можна представити у вигляді двох матриць [12]:

$$П = [1] \pi, \quad (2.5)$$

де [1] – одинична матриця.

Ще однією формою представлення графа є матриця контурів. Головним контуром називається контур, утворений однією хордою і деякою кількістю ребер. Тому кількість рядків такої матриці дорівнює кількості хорд, а кількість стовпців, як і раніше, кількості гілок. Знак елемента матриці можна визначити по співпадінні напрямку хорди та гілки. Для графа по рис. 2.26 матриця контурів представлена табл. 2.8.

Таблиця 2.8

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

4	-1	1		1				
5	-1	1	-1		1			
6	-1	1	-1			1		
7	1	-1	1				1	-1

Якщо поміняти місцями 4-й та 8-й стовпчики, то отримаємо матрицю, представлену табл. 2.9.

Таблиця 2.9

	1	2	3	8	4	5	6	7
4	-1	1			1			
5	-1	1	-1			1		
6	-1	1	-1				1	
7	1	-1	1	-1				1

Цю матрицю, яку часто називають матрицею Р, можна представити у вигляді двох матриць:

$$P = \rho[1]. \quad (2.6)$$

Кожний рядок вузлової матриці А вказує, яка гілка пов'язана з даним вузлом. Тому згідно першого закону Кірхгофа:

$$A \cdot I = 0, \quad (2.7)$$

де I – вектор струмів гілок.

Розтин в теорії кіл розглядається як узагальнений вузол, а тому

$$P \cdot I = 0, \quad (2.8)$$

Якщо узагальнені вузли співпадають з простими вузлами схеми, то $A = P$. Це дерево, в якому кожне ребро пов'язане з базовим вузлом.

Матрицю контурів можна розглядати як матрицю коефіцієнтів контурних рівнянь. Згідно другого закону Кірхгофа:

$$P \cdot U = 0, \quad (2.9)$$

де U – вектор напруг гілок схеми.

Розглянуте введення в теорію САПР топологічних матриць має дві мети. З одного боку їх процес складання можна автоматизувати, що дозволяє автоматизувати процес складання математичної моделі схеми. Для цього необхідно підставити в топологічні рівняння відповідних компонентів. З іншого боку, якщо рівняння Кірхгофа складені на основі топологічних матриць, то вони завжди мають рішення.

Множину гілок графа можна розбити на дві підмножини: гілки дерева (ребра) та хорди. Кожна хорда утворює з ребрами замкнутий контур, тому напругу на них можна виразити через вузлові потенціали.

Якщо хорда входить в один розтин, то вона знаходиться під тією ж напругою, що й ребро. Якщо хорда входить в декілька розтинів, то напруга на ній дорівнює сумі напруг відповідних ребер. Тому:

$$U_x = \pi^T \cdot U_p; \quad I_p = \rho^T \cdot I_x, \quad (2.10)$$

де U_x, I_x – напруга та струм хорд;

U_p, I_p – напруга та струм ребер.

Топологічні матриці при будь-якому способі вибору розтинів, але при однаковій нумерації гілок, пов'язані співвідношенням:

$$\Pi \cdot P^T = 0; \quad P \cdot \Pi^T = 0. \quad (2.11)$$

Звідси випливає, що:

$$\pi = -\rho^T; \quad \rho = -\pi^T. \quad (2.12)$$

По першому закону Кірхгофа складаються струми, тому ребрами дерева можуть бути тільки i -компоненти. Аналогічно, хордами можуть бути тільки U -компоненти.

Незалежні джерела напруги E та струму I не можна виразити через інші змінні. Тому E повинно бути ребром, а I – хордою. В цьому разі E та I будуть входити в рівняння як незалежні змінні.

Ємності, які на кожному кроку розрахунків розглядаються як джерела напруги, повинні входити в ребра. Аналогічно, індуктивності, які на кожному кроку розглядаються як джерела струму, повинні входити до хорд. В цьому разі всі струми ребер, в тому числі і струми ємностей, а також напругу індуктивностей, можна виразити через E та I , що й потрібно.

Дерево, побудоване таким чином, називається нормальним деревом.

Виключення можуть бути тоді, коли E та C , або I та L , утворюють контури. Такі схеми називаються виродженими і потребують особливих методів розрахунку або особливих способів усунення цієї виродженості. Наприклад, послідовно з індуктивністю можна включити невеликий опір, а паралельно ємності – великий.

Гілки зі зворотними вольт-амперними характеристиками можуть бути як ребрами, так і хордами.

Вхідна інформація про схему задається у вигляді трьох списків:

$A(J)$ – номери вузлів, з яких гілка виходить;

$B(J)$ – номери вузлів, в які гілка входить;

$C(J)$ - параметри компонента.

Останній список використовують при розв'язанні рівнянь моделі.

Вигляд дерева залежить від нумерації гілок. Для отримання нормального дерева ієрархія нумерації повинна бути такою:

E, E_3, C, R, L, I_3, I ,

де E_3, I_3 – залежні джерела напруги та струму.

Нумерація вузлів схеми може бути довільною, за винятком базового вузла, номер якого повинен бути найбільшим.

Вузлова матриця A по цих списках може бути побудована за алгоритмом, в якому N – кількість вузлів, а L – кількість гілок:

1. $K = 1$;
2. $J = 1$;
3. Якщо $A(J) = K$, інакше перейти до п. 8;
4. $M(K, J) = 1$;
5. $J = J + 1$;
6. Якщо $J \leq L$, інакше перейти до п. 12;
7. Перейти до п. 3;
8. Якщо $B(J) = K$, інакше перейти до п. 11;
9. $M(K, J) = -1$;

10. Перейти до п. 5;
11. $M(K, J) = 0$;
12. $K = K + 1$;
13. Якщо $K \leq N-1$, інакше перейти до п. 15;
14. Перейти до п. 3;
15. Закінчення.

По вузловій матриці можна побудувати матрицю P , використовуючи метод Гауса. Матрицю P простіше побудувати по спискам. Але для цього необхідно розбити гілки на ребра та хорди, що також можна виконати автоматично.

В початковому стані всі гілки графа утворюють N класів еквівалентності (N – кількість вершин). Включення гілки в дерево призводить до об'єднання двох вершин в один клас еквівалентності. Подальше об'єднання вершин призводить до створення декількох еквівалентних під множин вершин. Наступна гілка включається в дерево, якщо її вершини належать до різних класів еквівалентності (гілка має різні номери вершин). В протилежному випадку гілку відносять до хорд.

Перша гілка завжди відноситься до дерева, а її вершини позначаються одним номером. Всім гілкам, для яких $A_i = A_1$ присвоюється номер B_1 . Якщо $A_2 \neq B_1$, то цю гілку теж відносять до дерева, а всім $A_i = A_2$ приписується номер B_2 .

Нехай маємо схему, яка задається таким списком:

$A(J) = 2, 6, 3, 5, 6, 3, 1, 4, 6$;

$B(J) = 1, 1, 2, 6, 4, 4, 5, 5, 3$.

Першу гілку відносимо до ребер, а всі номери, які мають значення 2, поміняємо на номер 1 (перша гілка зі списку виключається). Новий список має вигляд:

6, 3, 5, 6, 3, 1, 4, 6;

1, 1, 6, 4, 4, 5, 5, 3.

Номери вершин другої гілки різні, а тому віднесемо її до дерева, в всі номери 6 поміняємо на номер 1 (другу гілку виключаємо з розгляду). Новий список має вигляд:

3, 5, 1, 3, 1, 4, 1;

1, 1, 4, 4, 5, 5, 3.

Третю гілку відносимо до дерева, а всі номери 3 поміняємо на 1.

5, 1, 1, 1, 4, 1;

1, 4, 4, 5, 5, 1.

Четверту гілку віднесемо до дерева, а всі номери 5 поміняємо на 1.

1, 1, 1, 4, 1;

4, 4, 1, 1, 1.

П'яту гілку віднесемо до дерева, а всі номери 1 поміняємо на 4.

4, 4, 4, 4;

4, 4, 4, 4.

Решта гілок відносимо до хорд. Таким чином, маємо:

ребра – 1, 2, 3, 4, 5;

хорди – 6, 7, 8, 9.

Побудоване дерево зображене на рис. 2.28.

Після поділу гілок на ребра та хорди можна приступати до побудови матриці розтинів. Нагадаємо, що розтин розбиває дерево графа на дві частини, на дві підмножини. Одну з них назвемо нижньою частиною, другу – верхньою. Вершинам нижньої частини припишемо умовний номер нуль, верхньої – одиниця (можна і навпаки). Якщо хорда попадає в розтин, то її вершини будуть мати різні номери.

Процедура складання матриці розтинів виглядає таким чином:

1. Розглянемо k -те ребро. Його вершині A припишемо номер нуль, а вершині B – одиницю.

2. Розглянемо наступне ребро. Якщо його вершини мають різні номери, то поміняємо одиницю на нуль.

3. Після декількох ітерацій (ребро, по якому здійснюється розтин, пропускається) номери всіх вершин будуть розподілені на нульові та одиничні.

4. Підставимо значення цих вершин в список хорд. Якщо вершини хорди мають різні номери, то вона входить в розтин, причому, якщо її номер змінюється з 0 на 1, то вона входить в розтин зі знаком “мінус”, в протилежному випадку – зі знаком “плюс”.

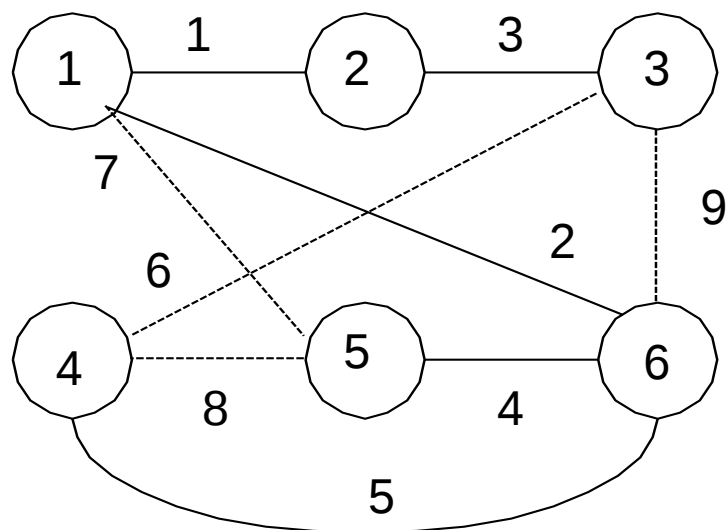


Рис. 2.28

Для попередньої задачі маємо список ребер:

2, 6, 3, 5, 6;

1, 1, 2, 6, 4.

та список хорд:

3, 1, 4, 6;

4, 5, 5, 3.

Схема має шість вершин. В початковому стані всім їм припишемо номери 1:

1 2 3 4 5 6 – номери вершин;

1 1 1 1 1 1 – умовні початкові номери вершин.

Перше ребро включене між вершинами 2 та 1, тому вершині 2 припишемо номер 0, а вершині 1 - 1.

1 2 3 4 5 6;

1 0 1 1 1 1.

Друге ребро включене між вершинами 1 та 6, причому обидві вони мають умовний номер 1. Тому розподіл вершин не змінюється.

Третє ребро включене між вершинами 3 та 2 і мають різні умовні номери. Тому вершині 3 припишемо номер 0:

1 2 3 4 5 6;

1 0 0 1 1 1.

Розгляд наступних ребер не змінює цього розподілу. Проглянемо список ребер ще раз, пропускаючи перше ребро. Розподіл вершин не змінюється і є остаточним (це можна перевірити по дереву на рис. 2.28). Підставимо цей розподіл в список хорд:

6 7 8 9;

0 1 1 1;

1 1 1 0.

В розтин входить хорда 6 зі знаком “мінус” та хорда 9 зі знаком “плюс”.

Аналогічно визначимо розтини для решти ребер. Отримана матриця π зображена у табл. 2.10.

Таблиця 2.10

	6	7	8	9
1	-1			1
2	1	1		-1
3	-1			1
4		1	1	
5	-1		1	

Для отримання матриці Π додамо до матриці π одиничну матрицю. Отримана матриця зображена у табл. 2.11.

Таблиця 2.11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1					-1			1
2		1				1	1		-1
3			1			-1			1
4				1			1	1	
5					1	-1		1	

По цій матриці можна скласти систему топологічних рівнянь, які визначають струми гілок схеми. Для цього необхідно матрицю Π помножити на вектор невідомих струмів (табл. 2.12).

Таблиця 2.12

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & & & & & -1 & & & 1 \\ 2 & & 1 & & & & 1 & 1 & & -1 \\ 3 & & & 1 & & & -1 & & & 1 \\ 4 & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ 5 & & & & & 1 & -1 & & 1 & \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{vmatrix} = 0$$

З цієї таблиці отримуємо систему рівнянь, яка пов'язує струми гілок

$$\begin{aligned} i_1 - i_6 + i_9 &= 0; \\ i_2 + i_6 + i_7 - i_9 &= 0; \\ i_3 - i_6 + i_9 &= 0; \\ i_4 + i_7 + i_8 &= 0; \\ i_5 - i_6 + i_8 &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

З матриці π можна отримати матрицю ρ , до якої необхідно додати одиничну матрицю, що дає змогу отримати матрицю P (табл. 2.13).

Таблиця 2.13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	1	-1	1		1	1			
7		-1		-1			1		
8				-1	-1			1	
9	-1	1	-1						1

Якщо цю матрицю помножити на вектор напруг, то отримаємо систему топологічних рівнянь для напруг гілок схеми:

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 + U_3 + U_5 + U_6 &= 0; \\ -U_2 - U_4 + U_7 &= 0; \\ -U_4 - U_5 + U_8 &= 0; \\ -U_1 + U_2 - U_3 + U_9 &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Якщо в рівняння (6.9) та (6.10) підставити рівняння відповідних компонентів, то отримаємо повну математичну модель схеми.