Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Вектори та дії над ними

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначення: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називають *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

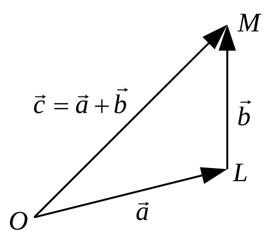
Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Нульовий вектор вважається колінеарним довільному вектору.

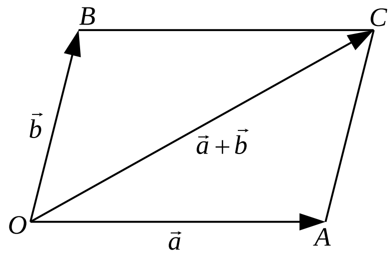
Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *рівні*, якщо вони мають однаковий напрям і рівні модулі. Звідси випливає, що всі вектори, які отримуємо із заданого вектора шляхом паралельного перенесення, рівні.

1°. *Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ* називають такий вектор $\vec{b}$, що: 1) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) вектори $\vec{b}$ та $\vec{a}$ мають однаковий напрям, якщо $\lambda > 0$ і протилежний, якщо $\lambda < 0$.

2°. *Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$* називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника):



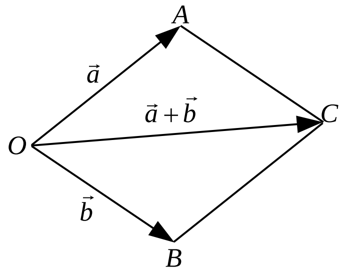
Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a} + \vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:



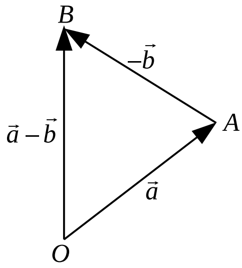
3°. *Різницею* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$. Вектор $-\vec{b}=(-1)\cdot\vec{b}$ називають *протилежним* до вектора $\vec{b}$.

1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$.

Г а) Зведемо вектори до спільного початку і застосуємо правило паралелограма:

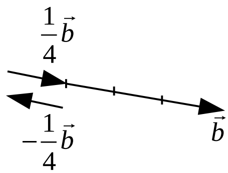


б) Запишемо вектор $\vec{a}-\vec{b}$ як $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ і застосуємо правило трикутника:

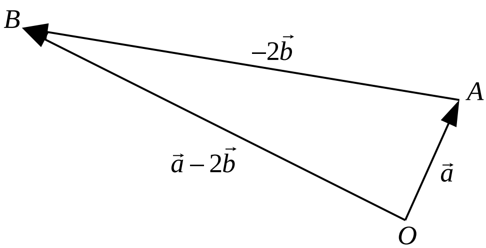


2. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $-\frac{1}{4}\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$.

а) Напрям вектора $-\frac{1}{4}\vec{b}$ протилежний напряму вектора $\vec{b}$, а модуль – у 4 рази менший за модуль вектора $\vec{b}$:

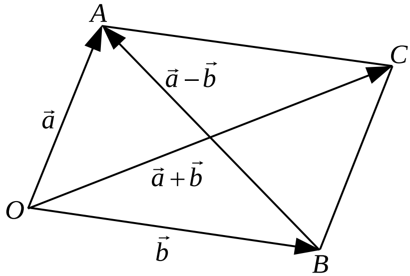


б) Вектор $\vec{a}-2\vec{b}$ запишемо як $\vec{a}+\left(-2\vec{b}\right)$. За правилом трикутника:



3. Дано $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Зобразимо на рисунку $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:



Вектори $\vec a + \vec b$ і $\vec a - \vec b$ є діагоналями паралелограма. Для знаходження довжини діагоналі скористаємося наступною властивістю паралелограма:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 2\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2\right).$$

Звідси

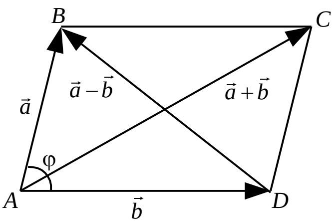
$$\left|\vec a + \vec b\right|^2 + \left|\vec a - \vec b\right|^2 = 2\left(\left|\vec a\right|^2 + \left|\vec b\right|^2\right),$$

$$\left|\vec a - \vec b\right|^2 = 2\left|\vec a\right|^2 + 2\left|\vec b\right|^2 - \left|\vec a + \vec b\right|^2;$$

$$\left|\vec a - \vec b\right| = \sqrt{2\cdot 13^2 + 2\cdot 19^2 - 24^2} = \sqrt{484} = 22. \quad \lrcorner$$

4. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $\left|\vec a\right| = 7$ і $\left|\vec b\right| = 10$. Знайти $\left|\vec a + \vec b\right|$ і $\left|\vec a - \vec b\right|$.

$\ulcorner$ Побудуємо вектори $\vec a + \vec b$ і $\vec a - \vec b$:



довжини векторів $\left|\vec a + \vec b\right|$ і $\left|\vec a - \vec b\right|$ відповідають довжинам векторів $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ і $\left|\overrightarrow{BD}\right|$. З трикутника ABD за теоремою косинусів знаходимо

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\varphi,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\vec a\right|^2 + \left|\vec b\right|^2 - 2\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|\cos\varphi,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = 7^2 + 10^2 - 2\cdot 7\cdot 10\cdot\cos 60^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = 79, \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{79}.$$

Звідси $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{79}$.

Розглянемо трикутник ACD: $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\vec{b}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\vec{a}\right|$, $\angle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. За теоремою косинусів знаходимо

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos\angle ADC,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 120^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=10^2+7^2-2\cdot 10\cdot 7\cos 120^\circ,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=219,\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{219}.$$

Звідси $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{219}$. ⌟

Вправи для самостійного розв’язання

5. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $-\vec{a}-\vec{b}$.

6. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

7. Дано $\left|\vec{a}\right|=11$, $\left|\vec{b}\right|=17$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=12$. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $\left|\vec{a}\right|=12$ і $\left|\vec{b}\right|=5$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Відповіді:

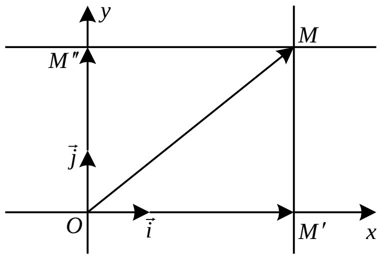
7. 26. **8.** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=13$.

2. Системи координат. Координати вектора

Розглянемо на площині взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) з початком у точці O. Вважатимемо їх напрямленими так, що менший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ (у просторі – це менший поворот від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$) здійснюється проти руху годинникової стрілки. У цьому випадку кажуть, що в площині визначено *прямокутну декартову систему координат* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (у просторі –

(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)), а вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) утворюють *ортонормований базис*. Прямі, що проходять через точку O паралельно до векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називаються *осями координат* і позначаються Ox, Oy, Oz (відповідно *вісь абсцис, вісь ординат, вісь аплікат*).

Розглянемо довільну точку M на площині. Через неї проведемо дві прямі, які паралельні осям координат. Точки перетину M' і M'' цих прямих відповідно з осями Ox і Oy називають *проекціями* точки M на осі координат. Очевидно, що $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM''} = y\vec{j}$. Числа x, y називаються *декартовими координатами точки* $M(x;y)$ і має місце рівність $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(M)$ називають *радіус-вектором* точки M, а точки x, y – *координатами вектора* $\vec{r}(M)$. При цьому пишуть $\vec{r}(M) = (x;y)$.

Аналогічно у просторі:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad M(x;y;z), \quad \vec{r}(M) = (x;y;z).$$

Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z).$$

Якщо точка $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – початок вектора, а точка $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \tag{1}$$

Довжину вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ визначають через його координати за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2}$$

Два вектори $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ і $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\,. \tag{3}$$

Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними*. Вектори $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ і $\vec{c} = \left(c_x;\, c_y;\, c_z\right)$ компланарні тоді і лише тоді, коли визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Звідси, якщо умова (4) не виконується, то вектори некомпланарні.

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z\right). \tag{5.1}$$

При відніманні векторів їх відповідні координати віднімаються:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x;\, a_y - b_y;\, a_z - b_z\right). \tag{5.2}$$

При множенні вектора на число всі координати множаться на те ж число:

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x;\, \lambda a_y;\, \lambda a_z\right). \tag{6}$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,;$$

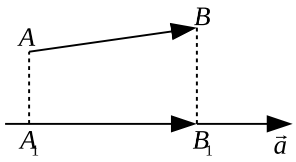
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,. \tag{7}$$

З формул (7) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{8}$$

Ортом $\vec{a}_0$ *вектора* $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\vec{a}_0 = \left(\cos\alpha;\, \cos\beta;\, \cos\gamma\right)$. На практиці для знаходження орта часто використовують формулу

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\,. \tag{9}$$



Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$ (див. рисунок). *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) називають число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо напрями векторів $\vec{a}$ та $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадають, і число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо їх напрями протилежні.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{a}$ можна обчислити за формулою

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{10}$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$, $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \vec{a}}\right)$ ($0 \le \varphi \le \pi$).

9. Дано точки $A(1;\ -3;\ 4)$ і $B(3;\ 1;\ 5)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його довжину.

$\ulcorner$ За формулою (1) маємо $\overrightarrow{AB} = (3-1;\ 1-(-3);\ 5-4) = (2;\ 4;\ 1)$.

За формулою (2) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+4^2+1^2} = \sqrt{21}$. $\lrcorner$

10. Визначити початок вектора $\vec{a} = (4;\ -1;\ 2)$, якщо його кінець міститься в точці $B(5;\ 2;\ 1)$.

$\ulcorner$ За формулою (1) маємо $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, тобто

$a_x = x_2 - x_1$; $a_y = y_2 - y_1$; $a_z = z_2 - z_1$.

Тоді $4 = 5 - x_1$; $-1 = 2 - y_1$; $2 = 1 - z_1$. Звідси $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $z_1 = -1$.

Отже, $A(1;\ 3;\ -1)$. $\lrcorner$

11. Дано дві координати $a_y = 4$, $a_z = 12$ вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$. Знайти третю координату, якщо $|\vec{a}| = 13$.

$\ulcorner$ За формулою (2) маємо

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $13 = \sqrt{a_x^2 + 4^2 + 12^2}$, $169 = a_x^2 + 16 + 144$,

$a_x^2 = 9$, $a_x = \pm 3$.

Отже, $\vec{a} = (3;\ 4;\ 12)$ або $\vec{a} = (-3;\ 4;\ 12)$. $\lrcorner$

12. Дано два вектори $\vec{a}=(3;\,1;\,4)$ і $\vec{b}=(-2;\,2;\,-1)$. Визначити координати векторів: а) $2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; б) $4\vec{a}$; в) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

$\ulcorner$ а) Використовуючи формули (5.2), (6), маємо

$$2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=2(3;\,1;\,4)-\frac{1}{2}(-2;\,2;\,-1)=(6;\,2;\,8)-\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(7;\,1;\,\frac{17}{2}\right).$$

б) Використовуючи формулу (6), маємо

$$4\vec{a}=4(3;\,1;\,4)=(12;\,4;\,16).$$

в) Використовуючи формули (5.1), (6), маємо

$$3\vec{a}+2\vec{b}=3(3;\,1;\,4)+2(-2;\,2;\,-1)=(9;\,3;\,12)+(-4;\,4;\,-2)=$$

$$=(5;\,7;\,10).\quad\lrcorner$$

13. Знайти довжину вектора $2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(3;\,-2;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,1;\,-3)$.

$\ulcorner$ Знайдемо координати вектора за формулами (6), (5.2):

$$2\vec{a}-\vec{b}=2(3;\,-2;\,1)-(2;\,1;\,-3)=(6;\,-4;\,2)-(2;\,1;\,-3)=$$

$$=(4;\,-5;\,5).$$

За формулою (2) знайдемо довжину вектора:

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-5)^2+5^2}=\sqrt{66}.\quad\lrcorner$$

14. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=(3;\,2;\,-4)$ і $\vec{b}=(-6;\,-4;\,8)$.

$\ulcorner$ За формулою (3) маємо

$$\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8},\quad -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

Отже, вектори колінеарні. $\lrcorner$

15. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(\alpha;\,3;\,1)$ і $\vec{b}=(2;\,4;\,\beta)$ колінеарні.

$\ulcorner$ За формулою (3) маємо

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}=\frac{1}{\beta},\ \text{звідки}\ \frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}\ \text{і}\ \frac{3}{4}=\frac{1}{\beta}.$$

Отже, $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{4}{3}$. $\lrcorner$

16. Довести, що чотири точки $A(-1;\,5;\,-10)$, $B(5;\,-7;\,8)$, $C(2;\,2;\,-7)$ і $D(5;\,-4;\,2)$ є вершинами трапеції.

$\ulcorner$ У трапеції основи паралельні. Визначимо, які з двох пар протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ будуть паралельні.

$$\overrightarrow{AB} = \left(5-(-1);\ -7-5;\ 8-(-10)\right) = (6;\,-12;\,18),$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(2-5;\ 2-(-7);\ -7-8\right) = (-3;\,9;\,-15),$$

$$\overrightarrow{CD} = \left(5-2;\ -4-2;\ 2-(-7)\right) = (3;\,-6;\,9),$$

$$\overrightarrow{DA} = \left(-1-5;\ 5-(-4);\ -10-2\right) = (-6;\,9;\,-12).$$

Звідси маємо, що $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Отже, $ABCD$ – трапеція. $\lrcorner$

17. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (2;\,1;\,0)$, $\vec{b} = (1;\,-1;\,2)$ та $\vec{c} = (2;\,2;\,-1)$ некомпланарні.

$\ulcorner$ Обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(1-4) - 1\cdot(-1-4) + 0 = -1.$$

Оскільки умова (4) не виконується, то дані вектори некомпланарні. $\lrcorner$

18. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (3;\,4;\,-12)$.

$\ulcorner$ За формулами (7) маємо

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}} = \frac{3}{\sqrt{169}} = \frac{3}{13};$$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}} = \frac{4}{13};$$

$$\cos\gamma = \frac{-12}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}} = -\frac{12}{13}. \quad \lrcorner$$

19. Знайти орт вектора $\vec{a} = (15;\,0;\,8)$.

$\ulcorner$ За формулою (9) знаходимо

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{15}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{0}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{8}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{15}{17};\ 0;\ \frac{8}{17} \right). \quad \lrcorner$$

20. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}} \overrightarrow{AB}$, якщо $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$ і $\varphi = \left(\overrightarrow{AB};\ \vec{a}\right) = 120^\circ$.

$\ulcorner$ За формулою (10) маємо

$$\text{пр}_{\vec{a}} \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -2\ . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

21. Дано точки $M(2;\ 4;\ -1)$ і $K(3;\ 1;\ 2)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{KM}$.

22. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = (3;\ -12;\ 4)$.

23. Знайти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ 6;\ 2)$.

24. Визначити кінець вектора $\vec{a} = (4;\ -2;\ 1)$, якщо його початок міститься в точці $A(2;\ -1;\ 3)$.

25. Знайти напрямні косинуси вектора $\left(\frac{3}{5};\ 0;\ \frac{4}{5} \right)$.

26. Дано дві координати $a_x = 3$, $a_y = -6$ вектора $\vec{a} = (a_x; a_y;\ a_z)$. Знайти третю координату, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{94}$.

27. Дано два вектори $\vec{a} = (-2;\ 1;\ -3)$ і $\vec{b} = (3;\ 2;\ -1)$. Визначити координати векторів: 1) $-2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $2\vec{b}$.

28. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{b} = (4;\ 1;\ -2)$ та $\vec{c} = (2;\ 1;\ -1)$ некомпланарні.

29. Знайти орт вектора $\vec{a} = (-3;\ 4;\ -12)$.

30. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = (2;\ 4;\ \beta)$ і $\vec{b} = (\alpha;\ 2;\ 1)$ колінеарні?

31. Знайти модулі суми і різниці векторів $\vec{a}=(-2;1;3)$ і $\vec{b}=(1;-2;4)$.

32. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$, якщо $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \vec{a}}\right)=60^\circ$.

Відповіді:

21. $\overrightarrow{MK}=(1;-3;3)$, $\overrightarrow{KM}=(-1;3;-3)$. **22.** $|\vec{a}|=13$.

23. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5\sqrt{2}$. **24.** $B(6;-3;4)$.

25. $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=\dfrac{4}{5}$. **26.** $a_z=\pm7$.

27. 1) $(7;0;5)$; 2) $(0;7;-11)$; 3) $\left(-\dfrac{13}{6};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $(6;4;-2)$.

29. $\vec{a}_0=\left(\dfrac{-3}{13};\dfrac{4}{13};\dfrac{-12}{13}\right)$. **30.** $\alpha=1$; $\beta=2$.

31. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{51}$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{19}$. **32.** 3.

3. Лінійна залежність векторів.
Розклад вектора за довільним базисом

Система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо знайдуться числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n=0$. В іншому випадку, система називається *лінійно незалежною*.

Геометричні критерії лінійної залежності:

1°. система $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ колінеарні;

2°. система $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ компланарні;

3°. будь-яка система з $n\ge4$ векторів лінійно залежна.

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\vec{a}=X_1\vec{e}_1+X_2\vec{e}_2+X_3\vec{e}_3,$$

де числа $X_1,\ X_2,\ X_3$ називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3\}$.

Аналогічно, впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається базисом $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2\}$ у множині геометричних векторів, компланарних деякій площині.

33. На площині дано неколінеарні вектори $\vec{p} = (2;\ -3)$ і $\vec{q} = (1;\ 2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = (9;\ 4)$ за базисом $\{\vec{p},\ \vec{q}\}$.

$\ulcorner$ Потрібно знайти такі числа X_1 та X_2, що $\vec{a} = X_1\vec{p} + X_2\vec{q}$. Дана рівність рівносильна наступній:

$$(9;\ 4) = X_1(2;\ -3) + X_2(1;\ 2) = (2X_1 + X_2;\ -3X_1 + 2X_2).$$

Прирівнюючи відповідні координати векторів, дістаємо

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 9 \\ -3X_1 + 2X_2 = 4. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему методом Гаусса. Для цього додамо до другого рівняння перше, помножене на $\frac{3}{2}$. Дістанемо

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 9 \\ \frac{7}{2}X_2 = \frac{35}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = 5. \end{cases}.$$

Отже, $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. $\lrcorner$

34. Дано чотири вектори $\vec{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c} = (2;\ 2;\ -1)$ і $\vec{d} = (3;\ 7;\ -7)$. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$.

$\ulcorner$ Зауважимо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис згідно з прикладом 17. Потрібно знайти такі числа X_1, X_2, X_3, що

$$\vec{d} = X_1\vec{a} + X_2\vec{b} + X_3\vec{c}.$$

Дана рівність рівносильна наступній:

$$(3;\ 7;\ -7) = X_1(2;\ 1;\ 0) + X_2(1;\ -1;\ 2) + X_3(2;\ 2;\ -1) =$$
$$= (2X_1 + X_2 + 2X_3;\ X_1 - X_2 + 2X_3;\ 2X_2 - X_3).$$

Звідси отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 = 3 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 = 7 \\ \quad 2X_2 - X_3 = -7. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right)(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 7 \\ 3X_2 - 2X_3 = -11 \\ \quad \frac{1}{3}X_3 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язок даної системи: $X_1 = 2$, $X_2 = -3$, $X_3 = 1$.

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. ┘

35. Розкласти вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

┌ Шукатимемо числа X_1, X_2, X_3 такі, що $\vec{s} = X_1\vec{p} + X_2\vec{q} + X_3\vec{r}$. Звідси маємо

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = X_1\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right) + X_2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + X_3\left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right) =$$

$$= \left(X_1 + X_2\right)\vec{a} + \left(X_1 - X_2 + 2X_3\right)\vec{b} + \left(-2X_1 + 3X_3\right)\vec{c}.$$

Далі одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ -2X_1 + 3X_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}(-1)\ \ 2\\ \hookleftarrow\\ \longleftarrow\end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 3\end{array}\right):(-2)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ (-2)\\ \hookleftarrow\end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{array}\right).$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} X_1+X_2=1\\ X_2-X_3=0\\ 5X_3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X_1=\dfrac{2}{5}\\ X_2=\dfrac{3}{5}\\ X_3=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$$

Отже, $\vec{s}=\dfrac{2}{5}\vec{p}+\dfrac{3}{5}\vec{q}+\dfrac{3}{5}\vec{r}$. ┘

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

36. Дано три вектори $\vec{a}=(3;\,-1)$, $\vec{b}=(1;-2)$, $\vec{c}=(-1;\,7)$. Знайти розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ за базисом $\{\vec{a},\,\vec{b}\}$.

37. Дано чотири вектори $\vec{a}=(-1;\,3;\,2)$, $\vec{b}=(4;\,1;\,-2)$, $\vec{c}=(2;\,1;\,-1)$ і $\vec{d}=(3;\,0;\,1)$. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\{\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\}$.

38. Встановити вигляд лінійної залежності між даними чотирма векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Відповіді:

36. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

37. $\vec{d}=\dfrac{5}{3}\vec{a}+\dfrac{22}{3}\vec{b}-\dfrac{37}{3}\vec{c}$.

38. $3\vec{p}-4\vec{q}-3\vec{r}-2\vec{s}=0$.

4. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що обчислюється за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{11}$$

де кут φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)$ ($0\le\varphi\le\pi$).

Якщо $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\ b_y,\ b_z\right)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \tag{12}$$

Властивості скалярного добутку:

1) якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

5) якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то кут φ – гострий, а якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то кут φ – тупий;

6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi=90^\circ$ ($\vec{a}\ne 0,\ \vec{b}\ne 0$);

7) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

8) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

39. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

⌐ За формулою (11) маємо

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3.$ ⌋

40. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;\,-2;\,3)$, $\vec{b}=(3;\,2;\,1)$.

⌐ За формулою (12) маємо

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot3+(-2)\cdot2+3\cdot1=2.$ ⌋

41. Показати, що вектори $\vec{a}=(1;\,-3;\,0)$ і $\vec{b}=(6;\,2;\,1)$ взаємно перпендикулярні.

⌈ Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 6+(-3)\cdot 2+0\cdot 1=0$, то за властивістю 6 кут $\varphi=90^\circ$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. ⌋

42. Визначити, гострий чи тупий кут між векторами $\vec{a}=(-1;\ 2;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 2;\ 1)$.

⌈ Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot 3+2\cdot 2+(-2)\cdot 1=-1<0$, то за властивістю 5 кут φ між векторами тупий. ⌋

43. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=4$.

⌈ За властивістю 8 маємо $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=3\cdot 4=12$. ⌋

44. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}=(\alpha;\ 3;\ 2)$ і $\vec{b}=(1;\ -2;-\alpha)$ взаємно перпендикулярні.

⌈ Знаходимо $\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha\cdot 1+3\cdot(-2)+2\cdot(-\alpha)=-\alpha-6$. Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, а звідси $-\alpha-6=0$ або $\alpha=-6$. ⌋

45. Знайти косинус кута φ між векторами $\vec{a}=(2;\ -2;\ 1)$ і $\vec{b}=(4;\ 0;\ -3)$.

⌈ З формули (11) маємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot 4+(-2)\cdot 0+1\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}}=\frac{1}{3}.$$ ⌋

46. Трикутник заданий вершинами $A(0;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ -2;\ 7)$, $C(1;\ -2;\ 6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.

⌈ Знаходимо: $\overrightarrow{AB}=(-1;\ -1;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\ -1;\ 4)$. Тоді

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=$$

$$=\frac{20}{9\sqrt{6}}\approx 0{,}91,\ \text{звідки}\ \ \angle A\approx 25^\circ.$$ ⌋

47. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

⌈ Використовуючи властивості 4, 7, маємо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4\vec{a}^{\,2} - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 1^2 - 12\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4^2} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}.\quad ⌋$$

48. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (3;\,-2;\,-5)$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення $M(2;\,-3;\,5)$ у положення $N(3;\,-2;\,-1)$.

⌈ Шукана робота A знаходиться за формулою $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$, де $\vec{S} = \overrightarrow{MN}$ – вектор переміщення.

Далі знаходимо $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (1;\,1;\,-6)$.

Тоді шукана робота $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-5)\cdot(-6) = 31$. ⌋

49. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;\,-2;\,3)$, $B(4;\,1;\,5)$, $C(3;\,1;\,2)$.

⌈ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(4-1;\ 1-(-2);\ 5-3\right) = (3;\,3;\,2);$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(3-1;\,1-(-2);\ 2-3\right) = (2;\,3;\,-1).$$

Звідси маємо

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 13.\quad ⌋$$

50. Обчислити роботу при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення $M(2;\,2;\,4)$ у положення $N(6;\,2;\,1)$, яку виконує сила величиною $|\vec{F}| = 3$, що діє під кутом 30° до напряму переміщення.

$\ulcorner$ Шукана робота A знаходиться за формулою $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\varphi$, де $\vec{S} = \overrightarrow{MN}$ – вектор переміщення, φ – кут між напрямом сили та переміщенням.

Далі знаходимо $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (6-2;\ 2-2;\ 1-4) = (4;\ 0;\ -3)$,

$|\vec{S}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Тоді шукана робота

$$A = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi = 3\cdot 5\cdot\cos 30^\circ = 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}. \quad \lrcorner$$

51. Знайти проекцію вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\, \vec{b}}\right) = 60^\circ$.

$\ulcorner$ З властивості 8 маємо, що $\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)}{|\vec{a}|}$. Далі знаходимо

$$\text{пр}_{\vec{a}}\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \frac{3\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi}{|\vec{a}|} =$$

$$= \frac{3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ}{3} = \frac{27 + 12\cdot\frac{1}{2}}{3} = 11. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

52. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

53. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;\ 4;\ 1)$, $\vec{b} = (-2;\ 1;\ 5)$.

54. Перевірити, чи є задані вектори взаємно перпендикулярними

а) $\vec{a} = (2;\ -2;\ 3)$, $\vec{b} = (1;\ 0;\ -1)$; б) $\vec{a} = (3;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (0;\ 2;\ 1)$.

55. Визначити, гострий чи тупий кут між векторами:

а) $\vec{a} = (3; -1;\ 2)$, $\vec{b} = (-1;\ 1;\ 1)$; б) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -5)$, $\vec{b} = (-2;\ 1;\ -1)$.

56. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = (1;\ \alpha;\ 3)$ і $\vec{b} = (-2;\ 1;\ \alpha)$ взаємно перпендикулярні.

57. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{b}| = 4$, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 5$.

58. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\vec{a}=(-2;\ 4;\ -4)$ і $\vec{b}=(3;\ -2;\ -6)$.

59. Дано вершини трикутника $A(1;\ 2;\ -4)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(-3;\ 2;\ -1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

60. Знайти $\vec{m}\cdot\vec{n}$, де $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{n}=4\vec{a}+5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

61. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=(2;\ -1;\ 4)$, що прямолінійно переміщує матеріальну точку з положення $M(-1;\ 0;\ 3)$ у положення $N(2;\ -3;\ 5)$.

62. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$, якщо $A(3;\ 2;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 2)$, $C(0;\ 4;\ 2)$.

63. Обчислити роботу при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення $M(3;\ 6;\ 4)$ у положення $N(3;\ 2;\ 7)$ під дією сили величиною $|\vec{F}|=7$, яка діє під кутом 45° до напряму переміщення.

64. Знайти проекцію вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Відповіді:

52. $6\sqrt{2}$; **53.** 7. **54.** а) ні; б) так.

55. а) тупий; б) гострий. **56.** $\alpha=0,5$. **57.** 20.

58. $\dfrac{5}{21}$. **59.** 45°. **60.** -54.

61. 17. **62.** 8. **63.** $\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$.

64. -3.

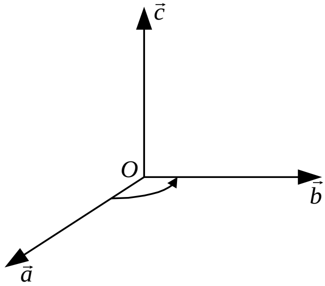
5. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що визначається такими трьома умовами:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$;

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку:



упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ менший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки (див. рисунок); у противному разі трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою*.

Векторний добуток позначають $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Якщо $\vec{a} = \left(a_x,\, a_y,\, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x,\, b_y,\, b_z\right)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;

2) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

5) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку.

65. Знайти $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

⌐ За означенням $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$. ⌟

66. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (3;\ 2;\ 1)$.

⌐ За формулою (13) маємо

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}\ . \quad ⌟$$

67. Знайти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 5$ і $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$.

⌐ За формулою (11) маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{12}{4\cdot 5} = \frac{3}{5},\ \text{де}\ \varphi = \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right).$$

Далі, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi = 4\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5} = 16$. ⌟

68. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3;\ -1;\ -2)$ і $\vec{b} = (1;\ 2;\ -1)$.

⌐ За властивістю 5 шукана площа S паралелограма рівна $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Далі знаходимо

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}\ .$$

Тоді шукана площа

$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{5^2+1^2+7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (кв. од). ⌟

69. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ -2;\ 1)$, $C(-1;\ 0;\ 2)$. Обчислити довжину висоти CD.

⌐ Площа ΔABC рівна половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Знаходимо $\overrightarrow{AB}=(-1;\,-4;\,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;\,-2;\,2)$ і

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k}\,.$$

Тоді $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2+(-6)^2}=3\sqrt{2}$ (кв. од.)

З іншого боку, $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|$. Звідси

$$CD=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2\,.\quad ⌟$$

70. Знайти $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;\,-1;\,2)$, $\vec{b}=(3;\,2;\,1)$, $\vec{c}=(-1;\,1;\,3)$.

⌐ У задачі 66 знайдено, що $\vec{a}\times\vec{b}=(-5;\,5;\,5)$.

Тоді

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}=10\vec{i}+10\vec{j}\,.\quad ⌟$$

71. Знайти момент сили $\vec{F}=(2;\,-4;\,5)$, прикладеної до точки $A(4;\,-2;\,3)$, відносно точки $B(3;\,2;\,-1)$.

⌐ Шуканий момент сили $\vec{M}$ знаходиться за формулою $\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$.

Оскільки $\overrightarrow{BA}=(1;-4;\,4)$, то

$$\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\,.\quad ⌟$$

72. Відомо, що $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Знайти $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)^2$.

$\ulcorner$ $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}-0\right)^2=\left(2\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=$

$=4\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=4\left(|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi\right)^2=4\left(1\cdot3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=4\cdot\dfrac{27}{4}=27$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

73. Знайти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}|=4$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

74. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\left(5;\,-1;\,2\right)$, $\vec{b}=\left(1;\,2;\,-4\right)$.

75. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=26$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$.

76. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\left(2;\,-2;\,-3\right)$ і $\vec{b}=\left(4;\,0;\,6\right)$.

77. Дано вершини трикутника $A\left(1;\,-1;\,2\right)$, $B\left(5;\,-6;\,2\right)$ і $C\left(1;\,3;\,-1\right)$. Обчислити довжину висоти BD.

78. Знайти момент сили $\vec{F}=\left(1;-2;\,4\right)$, прикладеної до точки $A\left(1;\,2;\,3\right)$, відносно точки $B\left(3;\,2;-1\right)$.

79. Дано вектори $\vec{a}=\left(2;\,-3;\,1\right)$, $\vec{b}=\left(-3;\,1;\,2\right)$ і $\vec{c}=\left(1;\,2;\,3\right)$. Обчислити:

а) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$; б) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

80. Знайти $\left(\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)^2$ за умови, що $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\varphi=\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Відповіді:

73. $10\sqrt{2}$. **74.** $\left(0;\,22;\,11\right)$. **75.** 72.

76. 28. **77.** 5. **78.** $\left(-8;\,-12;\,-4\right)$.

79. а) $\left(-7;\,14,\,-7\right)$; б) $\left(10;\,13;\,19\right)$. **80.** 27.

6. Мішаний добуток векторів

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (спочатку знаходиться векторний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, а потім одержаний вектор скалярно множиться на вектор $\vec{c}$).

Позначення: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Якщо $\vec{a}=\left(a_x,\,a_y,\,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\,b_y,\,b_z\right)$ і $\vec{c}=\left(c_x,\,c_y,\,c_z\right)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Властивості мішаного добутку:

1) якщо у мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;

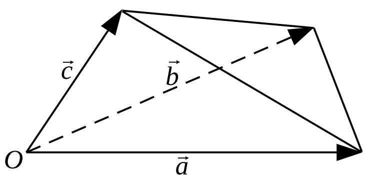
2) при циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

3) у мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутку можна міняти місцями:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

4) якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ утворюють праву трійку; а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$ – то ліву трійку векторів;

5) вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$;



6) об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які віднесені до спільного початку (див. рисунок), рівний $\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

81. Обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ двома способами, якщо $\vec{a}=\left(3;\,6;\,3\right)$, $\vec{b}=\left(1;\,3;\,-2\right)$, $\vec{c}=\left(2;\,2;\,2\right)$.

⌈ а) За формулою (13) знаходимо спочатку векторний добуток:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-21\vec i+9\vec j+3\vec k\ .$$

Далі маємо

$$\vec a\,\vec b\,\vec c=\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=(-21)\cdot 2+9\cdot 2+3\cdot 2=-18\,.$$

б) За формулою (14) знаходимо

$$\vec a\,\vec b\,\vec c=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=3(6+4)-6(2+4)+3(2-6)=-18\ . \quad ⌋$$

82. Яку трійку, праву чи ліву, утворюють вектори $\vec a,\vec b,\vec c$, якщо $\vec a=(1;\,2;\,3)$, $\vec b=(-1;\,0;\,2)$, $\vec c=(1;\,-2;\,5)$?

⌈ Оскільки за формулою (14)

$$\vec a\,\vec b\,\vec c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=24>0\,,$$

то згідно з властивістю 4 дані вектори утворюють праву трійку. ⌋

83. Довести, що точки $A(0;\,1;\,2)$, $B(-2;\,0;\,-1)$, $C(-1;\,5;\,8)$, $D(1;\,6;\,11)$ лежать в одній площині.

⌈ Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні.

Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB}=(-2;\,-1;\,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;\,4;\,6)$, $\overrightarrow{AD}=(1;\,5;\,9)$. Оскільки за формулою (14)

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=0\,,$$

то згідно з властивістю 5 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Тому задані точки лежать в одній площині. ⌋

84. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec a=(1;\,4;-3)$, $\vec b=(1;\,0;\,2)$ і $\vec c=(-2;\,2;\,5)$.

⌐ Використаємо той факт, що об'єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, у шість разів більший за об'єм тетраедра, побудованого на цих векторах.

Далі за формулою (14)

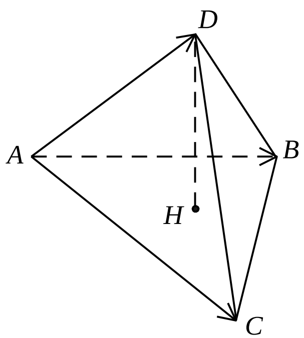
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -46 .$$

Тоді шуканий об'єм

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = |-46| = 46 \text{ (куб. од.).} \quad ⌟$$

85. Дано вершини тетраедра $A(1;\,2;\,3)$, $B(9;\,6;\,4)$, $C(3;\,0;\,4)$, $D(5;\,2;\,6)$. Обчислити довжину висоти DH тетраедра.

⌐ Скористаємося формулою $V = \dfrac{1}{3} S \left|\overrightarrow{DH}\right|$, де V – об'єм тетраедра, а S – площа ΔABC.



Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB} = (8;\,4;\,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;\,-2;\,1)$, $\overrightarrow{AD} = (4;\,0;\,3)$.

За формулою (13) маємо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 24\vec{k} .$$

Далі, $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-24)^2} = 9\sqrt{2}$ (кв. од.).

Тоді знаходимо

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \cdot 4 + (-6) \cdot 0 + (-24) \cdot 3 = -48 .$$

За властивістю 6 знаходимо об'єм тетраедра

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-48| = 8 \text{ (куб. од.).}$$

Отже,

$$DH = \left|\overrightarrow{DH}\right| = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad \rfloor$$

Вправи для самостійного розв’язання

86. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ двома способами, якщо $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ і $\vec{c} = (3; -2; 5)$.

87. Встановити, праву чи ліву трійку утворюють вектори, якщо:

а) $\vec{a} = (1; 3; -1)$, $\vec{b} = (-3; 8; 2)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = (-1; 4; 1)$, $\vec{b} = (0; 3; -1)$, $\vec{c} = (3; 4; 2)$.

88. Перевірити, чи лежать точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одній площині.

89. Встановити, чи є задані вектори компланарними:

а) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (3; -1; -2)$;

б) $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$.

90. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (3; 6; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$, $\vec{c} = (2; -2; 2)$.

91. Дано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину висоти DH тетраедра.

Відповіді:

86. -7.	**87.** а) праву; б) ліву.	**88.** Так.
89. а) ні; б) так.	**90.** 54.	**91.** 11.