

## Практична робота №7

### РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ РЕЗЕРВОВАНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ЗАГАЛЬНОМУ РЕЗЕРВУВАННІ В РЕЖИМІ НАВАНТАЖЕНОГО ТА НЕНАВАНТАЖЕНОГО РЕЗЕРВУ З ОБМЕЖЕНИМ ТА НЕОБМЕЖЕНИМ ВІДНОВЛЕННЯМ ЕЛЕМЕНТІВ

#### Теоретичні відомості

Показники надійності резервованих не відновлюваних та відновлюваних технічних систем (пристроїв), як правило, визначаються при умові, що в момент включення всі елементи системи працездатні.

Найбільш часто використовують два методи розрахунку надійності: метод інтегральних рівнянь та метод диференціальних рівнянь.

Метод інтегральних рівнянь базується на припущенні, що значення часу (напрацювання) між послідовними відмовами та часу відновлення системи є подіями випадковими і незалежними. При цьому методі складаються та розв'язуються інтегральні, або інтегро-диференціальні рівняння, які зв'язують ймовірність перебування технічної системи в різних станах.

В методі диференціальних рівнянь використовується припущення про показниковий розподіл часу (напрацювання) до відмов, або між відмовами і часом відновлення системи.

Спочатку перераховуються можливі стани системи, потім складається її математична модель у вигляді схеми станів, на якій кружками, або прямокутниками зображають можливі стани схеми, а стрілками - можливі напрямки переходів із одного стану в інший.

По схемі станів потім складають систему диференціальних рівнянь для ймовірності станів. Для цього використовують такі правила:

- 1) ліві частини рівнянь містять похідну по часу ймовірностей відповідних станів  $P'_j(i)$ , а кожний член правої частини рівнянь отримується шляхом помноження інтенсивності переходу, що стоїть над стрілкою, яка зв'язана з даним станом, на відповідну ймовірність стану;
- 2) знак залежить від напрямку стрілки (плюс, якщо стрілка направлена вістрям до стану і мінус – у протилежному випадку);
- 3) число рівнянь дорівнює числу станів;
- 4) система диференціальних рівнянь повинна бути доповнена умовою, що сума ймовірностей усіх станів дорівнює одиниці.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою перетворень Лапласа або яким-небудь іншим методом дозволяє визначити необхідний показник надійності технічної системи.

Коли перерви в роботі системи допустимі, то в якості показника надійності, як правило, використовують коефіцієнт готовності  $K_2$ .

Якщо перерви в роботі системи неприпустимі, то в якості показника надійності використовують ймовірність  $P(t)$  безперервної безвідмовної роботи на протязі часу  $t$  при умові, що в початковий момент часу всі елементи системи були працездатними.

Як приклад розглянемо технічну систему, логічна схема надійності якої показана на рис.7.1,а.

Технічна система складається з робочого та резервного блоків. Резервний блок знаходиться в навантаженому резерві. Є дві чергові ремонтні бригади, які обслуговують систему. Схема станів системи з відповідними інтенсивностями переходів показана на рис. 7.1,б.

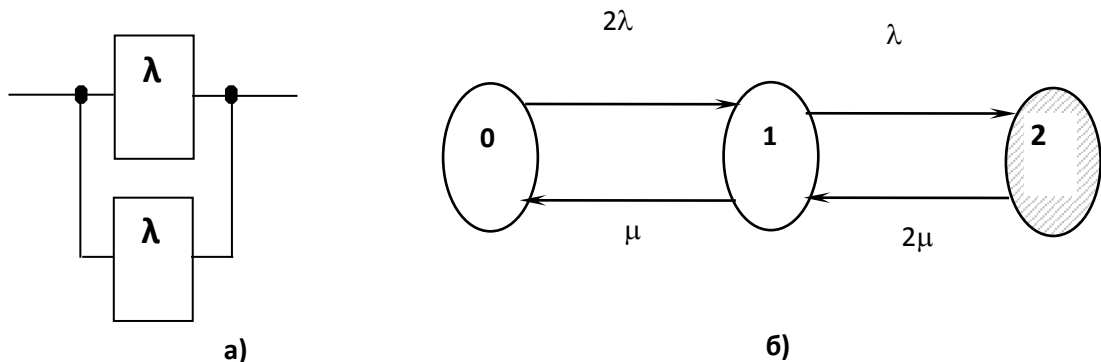


Рис. 7.1

Інтенсивність відмов та відновлення кожного блоку:  
 $\lambda = 8 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}$ ;  $\mu = 0,2 \text{ год}^{-1}$ . Визначити ймовірність застати систему в неробочому стані через 2 години після включення та значення коефіцієнта простою.

### Завдання

Технічна система, яка має робочий та резервний блоки, розрахована на безперервну цілодобову роботу. Через  $t$  годин після включення дана система може одержати команду на переналад-ку режиму роботи. Інтенсивність відмов та відновлення робочого (основного) та резервного блоків дорівнює відповідно  $\lambda$  та  $\mu$ . Для відновлення блоків системи задіяні  $n$  чергових ремонтних бригад.

Визначити ймовірність застати систему в непрацездатному стані через  $t$  годин після її включення, значення коефіцієнта готовності  $K_2$  та коефіцієнта простою  $K_n$ .

Таблиця 7.1

| Параметр                          | Варіант      |     |     |     |     |                |     |     |     |     |
|-----------------------------------|--------------|-----|-----|-----|-----|----------------|-----|-----|-----|-----|
|                                   | 1            | 2   | 3   | 4   | 5   | 6              | 7   | 8   | 9   | 10  |
| $\lambda_1 \cdot 10^{-4}$ , 1/год | 8            | 12  | 15  | 5   | 8   | 10             | 12  | 14  | 10  | 24  |
| $\mu$ , 1/год                     | 0,2          | 0,3 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 0,2            | 0,4 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |
| $t$ , год                         | 36           | 54  | 84  | 120 | 150 | 72             | 54  | 112 | 300 | 96  |
| Режим роботи резервного елемента  | Навантажений |     |     |     |     | Ненавантажений |     |     |     |     |
| Кількість ремонтних бригад, $n$   | 2            | 2   | 2   | 1   | 1   | 1              | 1   | 1   | 2   | 2   |
| Параметр                          | Варіант      |     |     |     |     |                |     |     |     |     |
|                                   | 11           | 12  | 13  | 14  | 15  | 16             | 17  | 18  | 19  | 20  |
| $\lambda_1 \cdot 10^{-4}$ , 1/год | 7            | 12  | 18  | 15  | 15  | 20             | 25  | 20  | 18  | 10  |
| $\mu$ , 1/год                     | 0,3          | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 0,8 | 0,8            | 0,9 | 0,5 | 0,4 | 0,5 |
| $t$ , год                         | 36           | 54  | 72  | 78  | 120 | 48             | 42  | 150 | 120 | 180 |
| Режим, роботи резервного елемента | Навантажений |     |     |     |     | Ненавантажений |     |     |     |     |
| Кількість ремонтних бригад, $n$   | 1            | 2   | 2   | 2   | 1   | 1              | 1   | 2   | 2   | 1   |
| Параметр                          | Варіант      |     |     |     |     |                |     |     |     |     |
|                                   | 21           | 22  | 23  | 24  | 25  | 26             | 27  | 28  | 29  | 30  |
| $\lambda_1 \cdot 10^{-5}$ , 1/год | 3            | 2   | 5   | 4   | 5   | 2              | 2   | 1,2 | 0,8 | 1,0 |
| $\mu$ , 1/год                     | 0,3          | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 0,8 | 0,8            | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,5 |
| $t$ , год                         | 240          | 120 | 36  | 48  | 48  | 72             | 120 | 144 | 240 | 216 |
| Режим, роботи резервного елемента | Навантажений |     |     |     |     | Ненавантажений |     |     |     |     |
| Кількість ремонтних бригад, $n$   | 2            | 1   | 2   | 2   | 1   | 2              | 1   | 2   | 1   | 1   |

### Розв'язання

Технічна система в будь-який момент часу може знаходитись в одному з наступних станів:

- 0 – обидва блоки працездатні;
- 1 – один блок непрацездатний;
- 2 – обидва блоки непрацездатні.

Позначимо ймовірність цих станів через  $P_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ .

Очевидно, що при знаходженні системи в стані 0 та 1 система працездатна, тобто функція готовності  $K_2(t) = P_0(t) + P_1(t)$ , а в стані 2 – система непрацездатна, тобто функція простою  $K_n(t) = P_2(t)$ .

При тривалій експлуатації системи може бути досягнений сталий режим, коли  $K_2 = P_0 + P_1$ ,  $K_n = P_2$ .

Система диференціальних рівнянь, складених по цій схемі, має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} P_0'(t) &= -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ P_1'(t) &= 2\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t); \\ P_2'(t) &= \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t). \end{aligned} \right\}$$

Для визначення функції готовності системи розв'язок даної системи проводимо з врахуванням початкових умов, що при  $t = 0$

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = 0.$$

Дані рівняння доповнюємо нормувальною умовою:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1.$$

Розв'язок системи рівнянь проводимо з допомогою перетворень Лапласа (див. додаток 1), в результаті одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} (s + 2\lambda)P_0(s) - \mu P_1(s) &= 1; \\ -2\lambda P_0(s) + (s + \lambda + \mu)P_1(s) - 2\mu P_2(s) &= 0; \\ -\lambda P_1(s) + (s + 2\mu)P_2(s) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для одержання величини  $P_i(s)$  використовуємо правило Крамера:

$$P_i(s) = \frac{D_i}{D},$$

де  $D$  – визначник, елементами якого є коефіцієнти при зображеннях  $P_0(s), P_1(s), P_2(s)$ ,  $D_i$  – визначник, який утворюється з  $D$  шляхом заміни  $i$ -го стовпця коефіцієнтами правої частини системи.

Оскільки справному стану дубльованої системи відповідають стани  $0$  і  $1$ , то згідно з теоремою додавання ймовірностей для несумісних подій, функція готовності дорівнює

$$K_z(t) = P_0(t) + P_1(t) = 1 - P_2(t).$$

Несправному стану системи відповідає стан 2 графа станів. Тому функція простою  $K_n(t) = P_2(t)$ . Таким чином, для визначення функцій готовності і простою достатньо знайти  $P_2(t)$ .

Для цього складемо визначники:

$$D = \begin{vmatrix} s + 2\lambda & -\mu & 0 \\ -2\lambda & (s + \lambda + \mu) & -2\mu \\ 0 & -\lambda & (s + 2\mu) \end{vmatrix} = s[s^2 + 3(\lambda + \mu)s + 2(\lambda + \mu)^2],$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} s + 2\lambda & -\mu & 1 \\ -2\lambda & (s + \lambda + \mu) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda^2.$$

Отже,

$$P_2(s) = \frac{2\lambda^2}{s[s^2 + 3(\lambda + \mu)s + 2(\lambda + \mu)^2]}.$$

Переходячи від зображення до оригіналу, одержуємо:

$$K_n(t) = P_2(t) = \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2} [1 + 2e^{-(\lambda + \mu)t} + e^{-2(\lambda + \mu)t}].$$

Коефіцієнт простою  $K_n$  визначається з виразу для  $K_n(t)$  при  $t \rightarrow \infty$

$$K_n = \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}.$$

Підставляючи числові значення для  $\lambda$  і  $\mu$ , одержимо:

$$K_n \approx 1,5 \cdot 10^{-3}; \quad K_n(t)|_{t=2} \approx 2,63 \cdot 10^{-3}$$