

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТІЕ №4

Послідовне з'єднання елементів в систему

Теоретичні відомості

З'єднання елементів називається послідовним, якщо відмова хоча б одного елемента призводить до відмови всієї системи. Система послідовно з'єднаних елементів працездатна тоді, коли працездатні всі її елементи.

Час безвідмовної роботи системи за час t визначається формулою

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \dots P_n(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t) \quad (1)$$

де $P_1(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i -го елемента за час t .

Якщо то, $P_1(t) = P^n(t)$

$$P_c(t) = P^n(t) \quad (2)$$

Висловимо $P_c(t)$ через інтенсивність відмов $\lambda_i(t)$ елементів системи.

Маємо:

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^1 \lambda_i(t) dt\right) \quad (3)$$

або

$$P_c(t) = \exp\left(-\int_0^1 \lambda_c(t) dt\right) \quad (4)$$

де

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \quad (5)$$

Тут $\lambda_i(t)$ – інтенсивність відмов i -го елемента; $\lambda_c(t)$ – інтенсивність відмов системи. Імовірність відмови системи на інтервалі часу $(0, t)$ дорівнює

$$q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \lambda_i(t) \quad (6)$$

Частота відмов системи визначається співвідношенням $f_c(t)$

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} \quad (7)$$

Інтенсивність відмов системи

$$f_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} \quad (8)$$

Середній час безвідмовної роботи системи:

$$m_{tc} = \int_0 P_c(t) dt \quad (9)$$

У разі експоненціального закону надійності всіх елементів системи маємо

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}; \quad (10)$$

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_c; \quad (11)$$

$$P_i(t) = \exp(-\lambda t); \quad (12)$$

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}; \quad (13)$$

$$f_c(t) = \lambda_c \cdot e^{-\lambda_c t} \quad (14)$$

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c t}; \quad (15)$$

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} ; \quad (16)$$

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_i}, \quad (17)$$

де m_{ti} – середній час безвідмовної роботи i -го елемента.

При розрахунку надійності систем часто доводиться перемножити ймовірності безвідмовної роботи окремих елементів розрахунку, зводити їх до рівня і витягувати коріння. При значеннях $P(t)$, близьких до одиниці, ці обчислення можна з достатньою для практики точністю виконувати за наступними наближеними формулами:

$$\begin{aligned} P_1(t)P_2(t) \dots P_n(t) &\sim 1 - \sum_{i=1}^n q_i(t) \\ P_1^n(t) &= 1 - N_{qi}(t), \\ \sqrt[n]{P_1(t)} &= 1 - q_i(t)/n, \end{aligned} \quad (18)$$

де $q_i(t)$ – ймовірність відмови i -го елемента.

Рішення типових задач

Завдання 1. Система складається з трьох пристроїв. Інтенсивність відмов електронного пристрою дорівнює $\lambda_1 = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ 1 / год} = \text{const}$. Інтенсивності відмов двох електромеханічних пристроїв лінійно залежать від часу і визначаються наступними формулами

$$\lambda_2 = 0,23 \cdot 10^{-4} t \text{ 1/час}, \lambda_3 = 0,06 \cdot 10^{-6} t^{2,6} \text{ 1 / час}$$

Необхідно розрахувати ймовірність безвідмовної роботи виробу протягом t годин (табл.4.1).

Рішення. Хай $t=100$. На підставі формули (3) маємо

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^1 \lambda_i(t) dt\right) = \exp\left\{-\left[\int_0^1 \lambda_1 dt + \int_0^1 \lambda_2 dt + \int_0^1 \lambda_3 dt\right]\right\} = \\ == \exp\left[-\left(\lambda_1 t + 0,23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{t^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t^{3,6}}{3,6}\right)\right].$$

Для $t = 100$ год.

$$P_c(100) = \exp\left[-\left(0,16 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + 0,23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100^{3,6}}{3,6}\right)\right] \sim 0,33$$

Завдання 2. Система складається з трьох блоків, середній час безвідмовної роботи яких дорівнює: $m_{t1} = 160$, $m_{t2} = 320$, $m_{t3} = (600+N)$. Для блоків справедливий експоненціальний закон надійності. Потрібно визначити середнє безвідмовної роботи системи.

Рішення. Хай $mt3 = 600$. Скориставшись формулою (17) отримаємо

$$\lambda_1 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{160}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{m_2} = \frac{1}{320}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{m_3} = \frac{1}{600}$$

Тут λ_i — інтенсивність відмов i -го блоку. На підставі формули (11) маємо

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{600} = 0,011 \text{ 1/час.}$$

Тут λ_c — інтенсивність відмов всієї системи.

На підставі формули (16) отримаємо

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0,011} \sim 91 \text{ час.}$$

Завдання 3. Система складається з $12600+N$ елементів, середня інтенсивність відмов яких $X_{cp} = 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ 1 / год.}$ Потрібно визначити $P_c(t)$, $q_c(t)$, $f_c(t)$, m_{tc} , для $t = 50 \text{ год.}$

Тут $P_c(t)$ — ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t ;

$q_c(t)$ — ймовірність відмови системи протягом часу t ;

$f_c(t)$ — частота відмов або щільність ймовірності часу t безвідмовної роботи системи;

m_{tc} — середній час безвідмовної роботи системи.

Рішення. Хай кількість елементів 12600. Інтенсивність відмов системи за формулою (11) буде

$$\lambda_c = \lambda_{cp} \cdot n = 0,32 \cdot 10^{-6} \cdot 12600 = 4,032 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$$

З (13) маємо

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$$

$$P_c(50) = e^{-4,032 \cdot 0,001 \cdot 50} \sim 0,82.$$

З (15) отримаємо

$$q_c(t) = e^{-\lambda_c t} = \lambda_c P_c(t), q_c(50) = 1 - P_c(50) \sim 0,18.$$

З (14) маємо

$$f_c(t) = e^{-\lambda_c t} = \lambda_c P_c(t), f_c(50) = 4,032 \cdot 10^{-3} \cdot 0,82 = 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ 1 / час.}$$

З (16) отримаємо

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{4,032 \cdot 10^{-3}} \sim 250 \text{ час}$$

Завдання 4. Система складається з двох пристроїв. Ймовірності безвідмовної роботи кожного з них протягом $t = 100$ год рівні: $P_1(100)$; $P_2(100)$ (табл.4.2). Справедливий експонентний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи системи. Рішення. Нехай $P_1(100) = 0,95$; $P_2(100) = 0,97$.

Знайдемо ймовірність безвідмовної роботи виробу.

$$P_c(100) = P_1(100) \cdot P_2(100) = 0,95 \cdot 0,97 = 0,92.$$

Знайдемо інтенсивність відмов виробу, скориставшись формулою

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$$

або

$$P_c(100) = 0,92 = e^{-\lambda_c \cdot 100}$$

По таблиці П.7.14 (див. Додатки ПрЗ) маємо

$$\lambda_c \cdot 100 = 0,083 \text{ или } \lambda_c = 0,83 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$$

тоді

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/(0,83 \cdot 10^{-3}) = 1200 \text{ час.}$$

Завдання 5. Ймовірність безвідмовної роботи одного елемента протягом часу t дорівнює $P(t) = 0,9997$. Потрібно визначити ймовірність безвідмовної роботи системи, що складається з $n = 100 + N$ таких елементів. Хай $n=100$.

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює $P_c(t) = P^n(t) = (0,9997)^{100}$. Ймовірність $P_c(t)$ близька до одиниці, тому для її обчислення скористаємося формулою (18). В нашому випадку $q(t) = 1 - P(t) = 1 - 0,9997 = 0,0003$. Тоді $P_c(t) \sim 1 - q(t) = 1 - 100 \cdot 0,0003 = 0,97$.

Завдання 6. Ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t дорівнює $P_c(t) = 0,95$. Система складається з $n = 120 + N$ рівнонадійних елементів. Необхідно знайти ймовірність безвідмовної роботи елемента.

Рішення. Хай $n=120$. Ймовірність безвідмовної роботи елемента буде

$$P_i(t) = \sqrt[n]{P_c(t)} \sim 1 - \frac{q_c(t)}{n} = 1 - \frac{0,05}{120} = 0,9996$$

Завдання 7. Система складається з $12600 + N$ елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{cp} = 0,32 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{час}}$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи протягом $t = 50$ год. Рішення. Хай $n = 120$.

$$\lambda_{cp}(t) = \lambda_{cp} \cdot n = 0,32 \cdot 10^{-6} \cdot 12600 = 4,032 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{час}}$$

Тоді на підставі (13)

$$P_c(t) = e^{-\lambda_{cp} t}$$

$$P_c(50) = e^{-4,032 \cdot 0,001 \cdot 50} \sim 0,82.$$

