

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Аналітичне визначення кількісних характеристик надійності виробу

Теоретичні відомості

Випишемо формули, по яких визначатися кількісні характеристики надійності виробу

$$p(t) = \exp\left(-\int_0^t \gamma(t)dt\right) = 1 - \int_0^t f(t)dt \quad (3.1)$$

$$q(t) = 1 - p(t) \quad (3.2)$$

$$f(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dp(t)}{dt} \quad (3.3)$$

$$\gamma(t) = \frac{f(t)}{p(t)} \quad (3.4)$$

$$m_t = \int_0^{\infty} p(t)dt \quad (3.5)$$

де $p(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи виробу на інтервалі часу від 0 до t ;

$q(t)$ – вірогідність відмови виробу на інтервалі часу від 0 до t ;

$f(t)$ – частота відмов виробу або щільність вірогідності часу безвідмовної роботи виробу T ;

$\gamma(t)$ – інтенсивність відмов виробу;

m_t – середній час безвідмовної роботи виробу.

Формули (3.1) - (3.5) для експоненціального закону розподілу часу безвідмовної роботи виробу наберуть вигляду

$$p(t) = e^{-\gamma t} \quad (3.6)$$

$$q(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (3.7)$$

$$f(t) = y \cdot e^{-\gamma t} \quad (3.8)$$

$$y(t) = \frac{y \cdot e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t}} = \gamma \quad (3.9)$$

Формули (3.1) - (3.5) для експоненціального закону розподілу часу безвідмовної роботи виробу наберуть вигляду

$$p(t) = 0.5 - \Phi(U) \quad U = \frac{t - m}{\sigma} \quad (3.10)$$

$$q(t) = 0.5 + \Phi(U) \quad \Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-\frac{U^2}{2}} dU \quad (3.11)$$

$$f(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma_t} \quad \Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2}} dU \quad (3.12)$$

$$\gamma(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma_t} \cdot \frac{1}{0.5 - \Phi(U)} \quad (3.13)$$

де $\varphi(U)$ – функція Лапласа, що має властивості

$$\Phi(U) = 0 \quad (3.15)$$

$$\Phi(-U) = -\Phi(U) \quad (3.16)$$

$$\Phi(\infty) = 0,5 \quad (3.17)$$

Значення функції $\varphi(U)$ Лапласа приведені в додатку П. 7.13 [1].

Значення функції приведені в додатку П. 7.17 [1].

Тут m_t – середнє значення випадкової величини T ;

σ_t^2 – дисперсія випадкової величини T ;

T – час безвідмовної роботи;

Формули (3.1) – (3.5) для закону розподілу Вейбулла часу безвідмовної роботи виробу має вигляд

$$p(t) = e^{-at^k} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

$$q(t) = 1 - e^{-at^k}$$

$$f(t) = akt^{k-1} \cdot p(t) \quad (3.20)$$

$$m(t) = \frac{\frac{1}{k} \Gamma \cdot \left(\frac{1}{k}\right)}{a^{\frac{1}{k}}}$$

де a, k – параметри закону розподілу Вейбулла.

$\Gamma(x)$ – гамма-функція, значення якої приведені в додатку П. 7.18 [1].

Формули (3.1) – (3.5) для закону розподілу Релея часу безвідмовної роботи виробу має вигляд

$$f(t) = \frac{t^2}{2\sigma_t^2} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (3.25)$$

$$\gamma(t) = \frac{t^2}{2\sigma_t^2} \quad (3.26)$$

$$m(t) = \sigma_t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.27)$$

де σ_t – міра розподілу випадкової величини T ;

T – час безвідмовної роботи виробу.

Завдання

1. Час роботи елемента повністю підпорядкований експериментальному закону розподілу з параметром γ (табл.3.1).

Необхідно вичислити кількісні характеристики надійності елемента $p(t)$, $q(t)$, $f(m)$, m_t , $t=1000$ час.

Табл.3.1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
γ	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9

2. Час роботи елемента повністю підпорядкований нормальному закону з параметрами m_t , σ_t (табл.3.2). Необхідно вичислити кількісні характеристики

надійності $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(m)$, m_t , для $t = 1000$ годин.

Табл.3.2

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_t	4000	5000	6000	7000	8000	9000	6000	7000	8000	9000
σ_t	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m_t	5000	6000	7000	8000	9000	5000	6000	7000	8000	9000
σ_t	3000	3000	3000	3000	3000	4000	4000	4000	4000	4000

3. Час роботи виробу повністю підкоряється закону розподілу Релея. Потрібно вичислити кількісні характеристики надійності виробу $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, m_t , $t = 1000$ година, якщо параметр розподілу σ_t (табл.3.2).

Табл.3.3

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_t	3000	3000	3000	3000	3000	4000	4000	4000	4000	4000
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ_t	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000	2000

4. Час безвідмовної роботи виробу підкоряється закону Вейбулла з параметрами k , a (1/годин), а час роботи виробу t (годин) (табл.3.4). Потрібно вичислити кількісні характеристики виробу $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, m_t .

Табл.3.4

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
a	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
t	100	100	100	100	100	200	200	200	200	200
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
a	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
t	150	150	150	150	150	250	250	250	250	250

Приклади рішення

Завдання 1. Час роботи елементу повністю підпорядкований експериментальному закону розподілу з параметром $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-5} 1/\text{година}$.

Необхідно вичислити кількісні характеристики надійності елементу $p(t)$, $q(t)$, $f(m)$, m_t , $t=1000$ час.

Рішення:

Використовуємо формули (3.6), (3.7), (3.8), (3.10), для $p(t)$, $q(t)$, $f(m)$, m_t .

1. Вичислимо вірогідність безвідмовної роботи $p(t) = e^{-\gamma t} = e^{-0.0025} = 0,9753$

Використовуючи ці таблиці П. 7.14 отримаємо

$$p(1000) = e^{-2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1000} = e^{-0.0025} = 0,9753$$

2. Вичислимо вірогідність відмови $q(1000)$. Маємо

$$q(1000) = 1 - p(1000) = 0,0247$$

3. Вичислимо частоту відмов

$$f(t) = \gamma p(t) \quad p(t) = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-2,5 \cdot 10^{-5} \cdot t}$$
$$f(1000) = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1000}$$

4. Вичислимо середній час безвідмовної роботи

$$m_t = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-5}} = 40000 \text{ годин}$$

Завдання 2. Час роботи елементу повністю підпорядкований нормальному закону з параметрами $m_t = 8000$ годин, $\sigma_t = 2000$ годин. Необхідно вичислити кількісні характеристики надійності $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(m)$, m_t , для $t = 1000$ годин.

Рішення:

Скористаємося формулами (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) для $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(m)$, m_t .

1. Вичислимо вірогідність безвідмовної роботи

$$p(t) = 0.5 - \Phi(U) \qquad U = \frac{t - m_t}{\sigma_t}$$

$$U = \frac{10000 - 8000}{2000} = 1 \Phi(1) = 0,3413$$

$$P(10000) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

2. Визначимо частоту відмови $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t} \cdot \exp \cdot \left[\frac{(t - m_t)^2}{2\sigma_t^2} \right]$$

Введемо позначення

$$\varphi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2}} \quad \varphi(-U) = \varphi(U)$$

Тоді

$$f(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma_t}; \quad U = \frac{(t - m_t)}{\sigma_t}$$

$$f(1000) = \frac{\varphi(1)}{2000} = \frac{0.242}{2000} = 12,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/годин}$$

3. Розрахуємо інтенсивність безвідмовної роботи елементу

$$\gamma(t) = \frac{f(t)}{p(t)}$$

$$\gamma(10000) = \frac{f(10000)}{p(10000)} = 12,1 \cdot \frac{10^{-5}}{0.1587} = 76,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/годин}$$

4. Середній час безвідмовної роботи елементу $m_t = 8000$ годин

Завдання 3. Час роботи виробу повністю підкоряється закону розподілу Релея. Потрібно вичислити кількісні характеристики надійності виробу $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, m_t , $t=1000$ година, якщо параметр розподілу $\sigma_t = 1000$ години

Рішення:

Скористаємося формулами (3.23), (3.25), (3.27), (3.26) для $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, m_t

1. Вчислимо вірогідність безвідмовної роботи $p(t)$

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$
$$p(1000) = \exp\left(-\frac{1000^2}{2 \cdot 1000^2}\right) = e^{-0.5} = 0,606$$

2. Визначимо частоту відмови $f(t)$

$$f(t) = \frac{t \cdot p(t)}{\sigma_t^2}$$
$$f(1000) = \frac{1000 \cdot 0.606}{1000^2} = 0,606 \cdot 10^{-3} \text{ 1/годин}$$

σ

3. Розрахуємо інтенсивність відмов

$$\gamma(t) = \frac{t}{\sigma_t^2}$$
$$\gamma(t) = \frac{1000}{1000^2} = 10^{-3} \text{ 1/годин}$$

4. Визначити середній час безвідмовної роботи виробу

$$m_t = \sigma_t \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1000 \cdot 1,253 = 1253 \text{ годин}$$

Завдання 4. Час безвідмовної роботи виробу підкоряється закону Вейбулла з параметрами $k = 1,5$, $a = 10^{-4}$ 1/годин, а час роботи виробу $t = 100$ годин. Вимагається вичислити кількісні характеристики виробу $p(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, m_t

Рішення

1. Визначимо вірогідність безвідмовної роботи $p(t)$ по формулі (3.18)

2. Маємо

$$p(t) = \exp(-at^k) \quad p(100) = \exp(10^{-4} \cdot 100^{1,5}); \quad x = 100^{15}$$

$$\lg x = 1,5 \lg 100 = 3; \quad x = 100; \quad p(100) = e^{-0,1} = 0,9048$$

3. Визначимо частоту відмов

$$\gamma(100) = \frac{f(100)}{p(100)} = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

4. Визначимо середній час безвідмовної роботи виробу $m(t)$

$$m(t) = \frac{\frac{1}{k} \Gamma \cdot \left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{ak^k}} = \frac{\frac{1}{1,5} \Gamma \cdot \left(\frac{1}{1,5}\right)}{10^{-4} \frac{1}{1,5}} = \frac{0,666 \cdot \Gamma(0,666)}{10^{-2,666}}$$

Оскільки $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, то

$$m(t) = \frac{\Gamma(1,666)}{10^{-2,666}}$$

$$x = 10^{-2,666}; \quad \lg x = -2,666 \cdot \lg 10 = -2,666 = 3,333; \quad x = 0.00215$$

Використовуючи додатки П. 7.18 [1], отримаємо

$$m(t) = \frac{0,90167}{0,00215} = 426 \text{ годин}$$