

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ  
«ПОБУДОВА ЕЩОР, РОЗРАХУНОК НА ЗГИН»  
(для студентів 3 курсу заочної форми навчання  
спец. ТОРiРБ, МБГ, ВВ, ОВ, ТГП)**

**Харків - ХНАМГ - 2005**

Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів. Побудова епюр, розрахунок на згин (для студентів 3 курсу заочної форми навчання спец. ТОРіРБ, МБГ, ВВ, ОВ, ТГП). Серeda Н.В. - Харків: ХНАМГ, 2005 - 19 с.

Укладач: Н.В.Серeda

Рецензент: Л.С.Андрієвська

Рекомендовано кафедрою теоретичної та будівельної механіки,  
протокол № 3 від 8.11.2005 р.

## ВСТУП

Опір матеріалів - одна з найважливіших дисциплін, що вивчаються студентами у вищих закладах освіти. Поряд із законами теоретичної механіки та відповідним математичним апаратом в цьому курсі розглядаються питання міцності, жорсткості й стійкості споруд і машин.

При вивченні курсу опору матеріалів найбільш ефективним методом є самостійне виконання студентами вправ та контрольних завдань. Ці вказівки особливо корисні для студентів заочного навчання.

Кожен студент виконує індивідуальне завдання. Конкретні, числові завдання до кожної контрольної роботи він вибирає сам із таблиць відповідно до його особистого шифру за трьома останніми цифрами номеру залікової книжки. Наприклад, для залікової книжки № 81135 навчальний шифр – 135, де 1 – перша, 3 – друга, 5 – третя цифри шифру.

Одержавши рецензію на контрольну роботу, студент повинен виправити вказані викладачем помилки, зробити потрібні доповнення, навіть якщо робота має залік.

Якщо робота не залікована, необхідно внести виправлення на тому ж або на окремому кресленні і знову подати роботу на повторний розгляд. Забороняється заклеювати або витирати гумкою помилки, позначені викладачем.

### Завдання 1

#### ПОБУДОВА ЕПЮР ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ І ЗГИНАЮЧИХ МОМЕНТІВ ДЛЯ БАЛКИ З ОДНИМ ЗАПРАВЛЕНИЕМ І ДРУГИМ ВІЛЬНИМ КІНЦЯМИ

Для заданої сталюї балки необхідно:

- 1) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів;
- 2) визначити її переріз, прийнявши  $[\sigma] = 160$  МПа.

#### *Методичні вказівки до завдання 1 і порядок його виконання*

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис. 1 та вихідні дані до неї з табл. 1.

2. Накреслити розрахункову схему балки в певному масштабі, вказати всі розміри й зусилля, що діють на неї.

3. Побудувати епюру поперечних сил і згинаючих моментів. Епюри балок з одним заправлением і другим вільним кінцями можна побудувати без попереднього визначення опорних реакцій, незалежно від виду навантаження та розміщення опор.

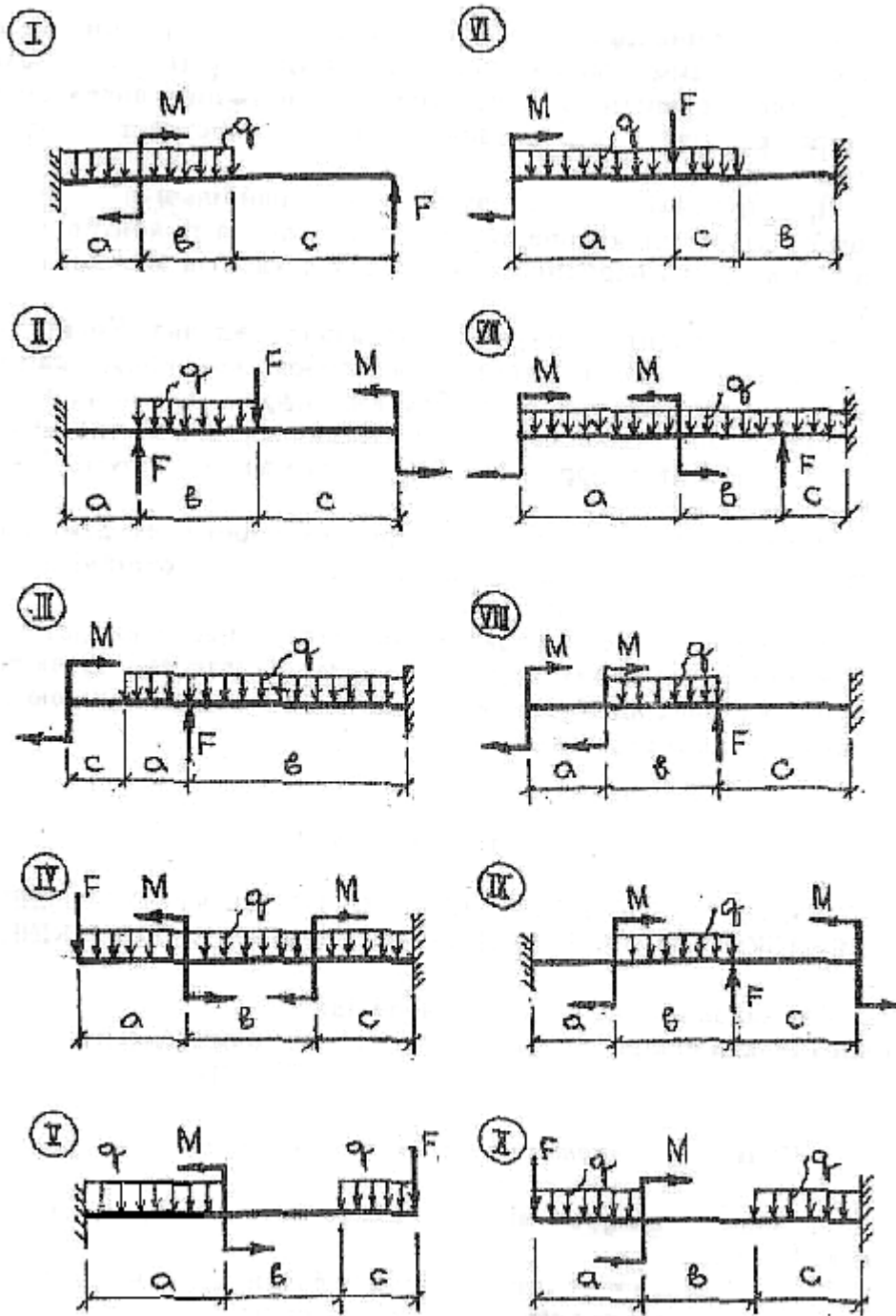


Рис.1 - Схеми балок до завдання 1.

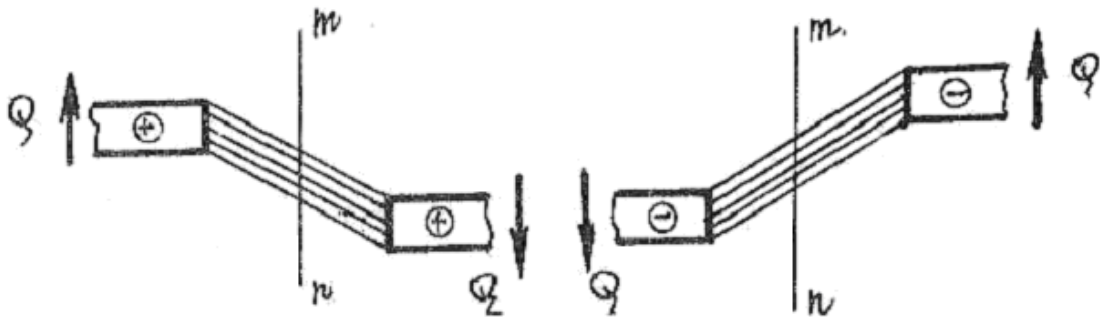
Таблиця 1 - Вихідні дані до завдання 1

Перша цифра шифру	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	Друга цифра шифру	$F$ , кН	$M$ , кН·м	Третя цифра шифру	Номер схеми	$q$ кН/м
1	2,5	3,0	1,0	1	10	40	1	1	10
2	3,0	2,0	1,5	2	30	20	2	2	20
3	2,0	2,5	1,0	3	20	30	3	3	30
4	1,0	3,0	0,5	4	15	50	4	4	5
5	0,5	2,0	1,5	5	35	40	5	5	15
6	3,0	3,0	0,5	6	25	30	6	6	25
7	2,5	2,5	1,0	7	10	20	7	7	10
8	1,5	3,0	0,5	8	40	10	8	8	20
9	1,0	2,5	1,0	9	30	40	9	9	30
0	2,0	2,0	0,5	0	20	30	0	10	10

Побудову епюр таких балок починають від вільного кінця балки. В основу побудови епюр покладено метод перерізів.

При побудові епюри  $Q$  і  $M$  необхідно дотримуватись правила знаків.

Якщо зовнішні сили мають повернути балку навколо перерізу за годинниковою стрілкою, то їх слід приймати зі знаком плюс, а якщо проти – із знаком мінус (рис. 2).

Рис.2 – Правило знаків для зовнішніх сил при визначенні  $Q$ .

Правило знаків для моментів: згинаючий момент вважається додатним, якщо в розглянутому перерізі балка згинається опуклістю вниз (нижні волокна розтягнуті), і від'ємним - якщо балка згинається опуклістю догори (верхні волокна розтягнуті) (рис.3).

Епюру згинаючих моментів  $M$  будують на стороні розтягнутих волокон (додатні значення відкладають від осі епюри вниз, від'ємні –

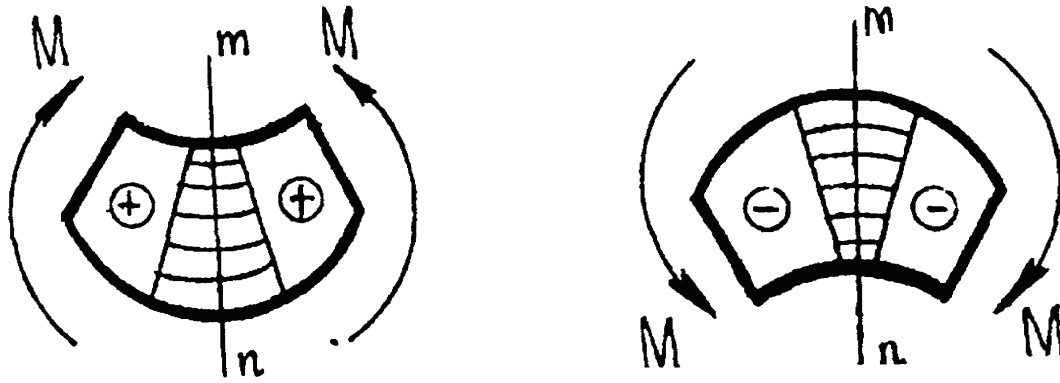


Рис.3 – Правило знаків для моментів зовнішніх сил при визначенні згинаючих моментів  $M$

вверх).

Ординати епюр  $Q$  і  $M$  відкладають під прямим кутом до базисної лінії.

Згинаючі моменти на шарнірних опорах дорівнюють нулю, максимальні й мінімальні значення на епюрі  $M$  відповідають зміні знаків на епюрі  $Q$ .

При побудові епюр слід пам'ятати, що розриви на епюрах  $Q$  мають місце там, де прикладені зосереджені сили (в тому числі реакції), а на епюрах  $M$  – в місцях прикладання зосереджених зовнішніх моментів.

4. Добір поперечного перерізу двотаврової балки проводять за умови міцності при згинанні:

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

5. При великих згинаючих моментах бувають випадки, коли неможливо підібрати стандартний прокатний профіль, бо потрібний момент опору більший, ніж є в ГОСТІ. Тоді треба прийняти балку з двох стандартних профілів, поставлених поряд, а номер профілю визначити з умови  $0,5 \cdot W_z$  (де  $W_z$  знайдено розрахунком).

## Завдання 2

### РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА ЗГИН ТА ПІДБІР ЇЇ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Для заданої балки необхідно:

- 1) визначити опорні реакції;
- 2) побудувати епюри поперечних сил  $Q$  і згинаючих моментів  $M$ ;
- 3) підібрати поперечний переріз балки, вважаючи, що вона виготовлена з деревини і має  $[\sigma] = 10$  МПа.

### Методичні вказівки до завдання 2 і порядок його виконання

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис.4 та вихідні дані до неї з табл.2.

2. Накреслити в масштабі розрахункову схему балки.

3. За допомогою рівнянь статки визначити вертикальні реакції на опорах. Якщо в результаті розрахунку реакція виявиться зі знаком мінус, то напрям вибраної реакції слід змінити на протилежний.

Для контролю правильності визначення реакції скласти рівняння рівноваги, що не було використане при визначенні реакцій.

4. Побудувати епюри поперечних сил  $Q$  і згинаючих моментів  $M$ .

Встановити границі ділянок завантаження з урахуванням розміщення силових факторів. Для кожної ділянки записати рівняння  $Q_i = f(z_i)$  та  $M_i = f(z_i)$ , за допомогою яких визначити величини поперечних сил і згинаючих моментів на границях ділянок.

Для визначення максимального значення  $M_i^{max}$  на ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням використати диференційну залежність

$$\frac{dM}{dz} = Q.$$

Епюри  $Q$  і  $M$  викреслити під розрахунковою схемою балки, вказати на числові значення ординати на границях ділянок.

5. Виходячи з умови міцності

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]},$$

підібрати переріз балки прямокутного ( $h = 2b$ ) і круглого профілю.

### Завдання 3

#### ПОБУДОВА ЕПЮР ЗГИНАЮЧИХ МОМЕНТІВ, ПОПЕРЕЧНИХ І ПОЗДОВЖНІХ СИЛ У РАМАХ

Для заданої рами потрібно:

- 1) визначити опорні реакції;
- 2) побудувати епюри згинаючих моментів  $M$ , поперечних  $Q$  і поздовжніх  $N$  сил.

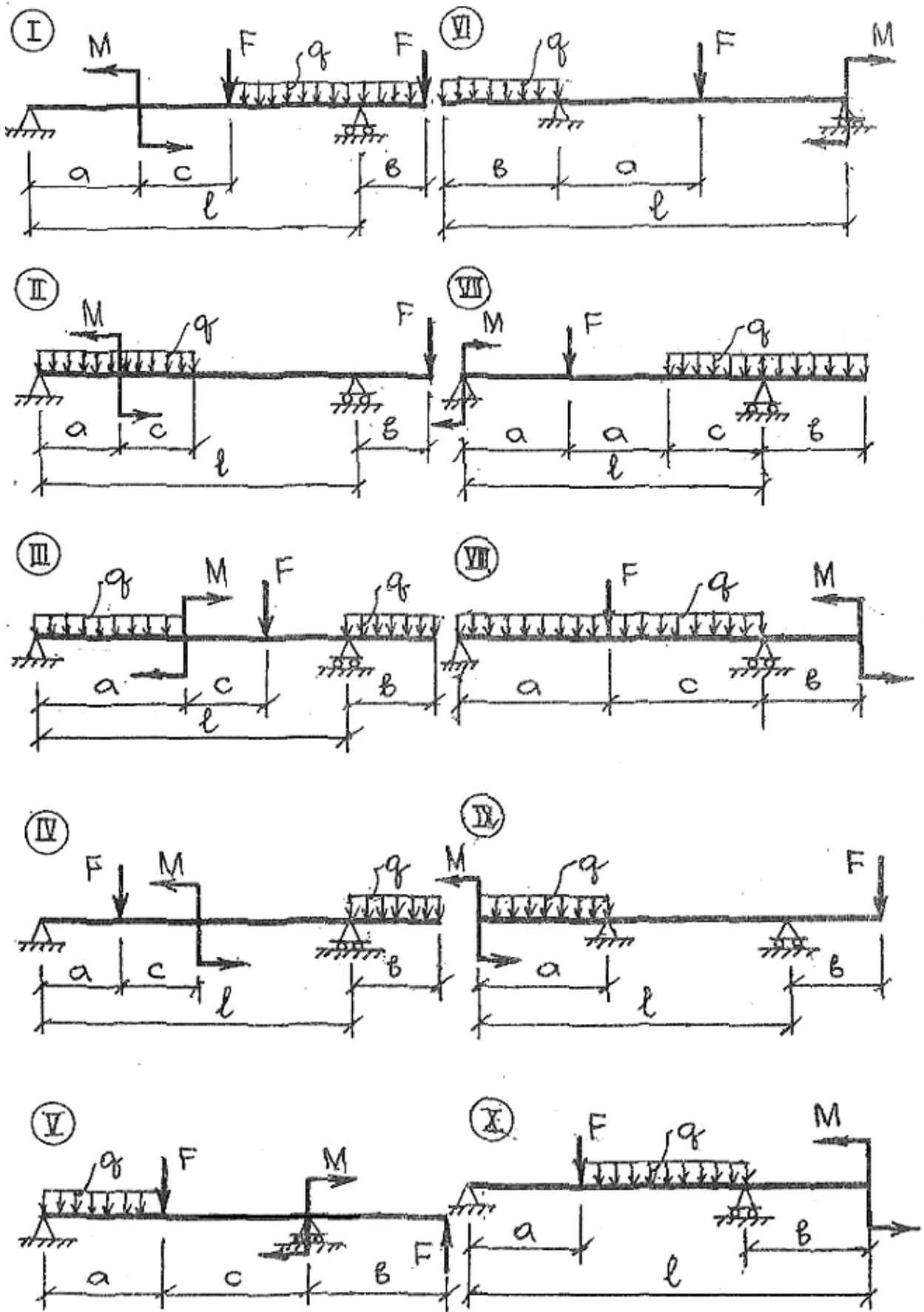


Рис.4 – Схеми балок до завдання 2.



Таблиця 2 – Вихідні дані до завдання 2

Перша цифра шифру	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	Друга цифра шифру	$d$ , м	$F$ , кН	Третя цифра шифру	Номер схеми	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м
1	2,5	3,0	1,0	1	1,0	10	1	1	50	10
2	3,0	2,0	1,5	2	2,0	30	2	2	60	20
3	2,0	2,5	1,0	3	3,0	20	3	3	40	30
4	1,0	3,0	0,5	4	1,5	15	4	4	30	5
5	0,5	2,0	1,5	5	0,5	35	5	5	20	15
6	3,0	3,0	0,5	6	2,0	25	6	6	70	25
7	2,5	2,5	1,0	7	2,5	10	7	7	60	10
8	1,5	3,0	0,5	8	1,0	40	8	8	40	20
9	1,0	2,5	1,0	9	1,0	30	9	9	30	30
0	2,0	2,0	0,5	0	1,0	20	0	10	50	10

### **Методичні вказівки до завдання 3 і порядок його виконання**

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис. 5 та вихідні дані до неї з табл.3.

2. Накреслити в масштабі розрахункову схему рами.

3. За допомогою рівнянь статки визначити вертикальні й горизонтальні реакції на опорах.

Контроль правильності визначення реакцій проводити за рівнянням рівноваги, що не було використане при визначенні реакцій.

4. Побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил.

Для цього, користуючись методом перерізів, розподілити раму на ділянки, встановити границі їх завантаження. Для кожної ділянки записати рівняння  $M_i = f(z_i)$ ,  $Q_i = f(z_i)$ ,  $N_i = f(z_i)$ , що дозволяють визначити величини  $M$ ,  $Q$  і  $N$  на границях ділянок.

Епюри  $M$ ,  $Q$  і  $N$  будують на геометричній схемі рами по осях стояків і ригелів. Умовно вважається, що споглядач знаходиться в середині контуру рами.

На епюрі  $M$ , як правило, знаки не ставлять, а ординати згинаючих моментів відкладають обов'язково з боку розтягнутих волокон. Епюри  $Q$  і  $N$  позначають знаками згідно з правилами.

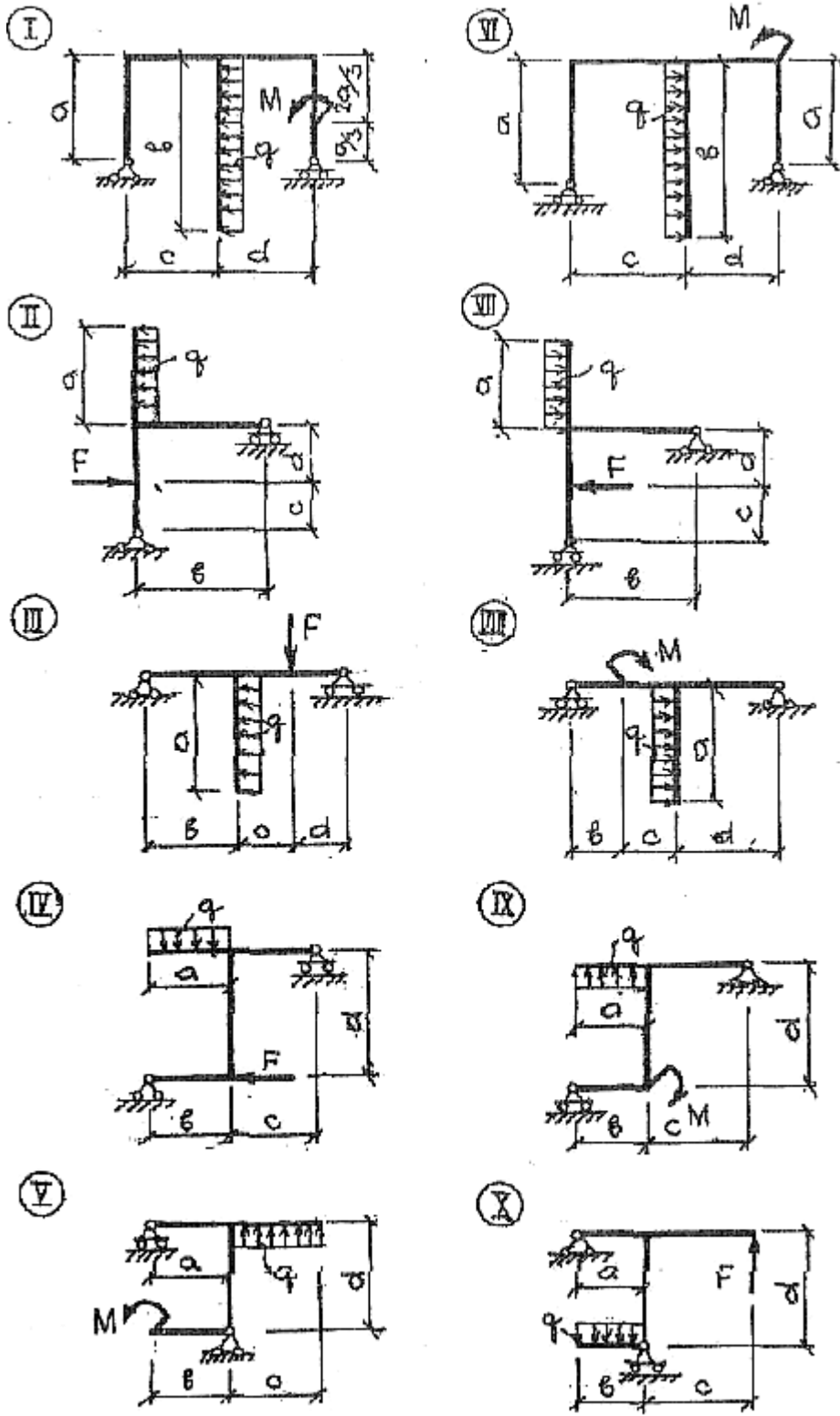


Рис.3 – Схеми рам до завдання 3.

Таблиця 3 – Вихідні дані до завдання 3

Перша цифра шифру	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	Друга цифра шифру	$d$ , м	$F$ , кН	Третя цифра шифру	Номер схеми	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м
1	2,5	3,0	1,0	1	1,0	40	1	1	50	10
2	3,0	2,0	1,5	2	2,0	30	2	2	60	20
3	2,0	2,5	1,0	3	3,0	20	3	3	40	30
4	1,0	3,0	0,5	4	1,5	50	4	4	30	5
5	0,5	2,0	1,5	5	0,5	30	5	5	20	15
6	3,0	3,0	0,5	6	2,0	40	6	6	70	25
7	2,5	2,5	1,0	7	2,5	50	7	7	60	10
8	1,5	3,0	0,5	8	1,0	40	8	8	40	20
9	1,0	2,5	1,0	9	1,0	30	9	9	30	30
0	2,0	2,0	0,5	0	1,0	20	0	10	50	10

5. Для визначення знаків  $Q$  і  $M$  слід користуватись правилами, наведеними для балок (див. завдання 1). Для поздовжньої сили  $N$ , існує правило: *поздовжня сила вважається додатною при розтягненні стержня і від'ємною - при стиску.*

6. Перевірити правильність побудови епюр  $M$ ,  $Q$  і  $N$  виходячи з умови рівноваги всіх вузлів рами.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів. - К.: Вища школа, 1993.
2. Тимошенко С.П. Курс опору матеріалів. - К.: Держ. вид-во України, 1929.
3. Дарков А.В., Шпарко Г.С. Сопротивление материалов. - М., 1975.
4. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М., 1976.
5. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. - М., 1979.
6. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М., 1979.
7. Лівшиць Я.Д., Семенов П.Ш. Збірник вправ з будівельної механіки. - К.: Держбудвидав УРСР, 1960.

## ДОДАТОК

*Приклад 1.* Для балки, наведеної на рис. 1 Д. необхідно: визначити опорні реакції, побудувати епюри  $Q$  і  $M$ ; підібрати поперечний переріз.

*Вирішення. 1.* Для визначення опорних реакцій запишемо рівняння статичної рівноваги:

$$\begin{aligned}\Sigma z = 0 &\Rightarrow H_A = 0. \\ \Sigma M_A = F \cdot 3,0 - q \cdot 5,0 \cdot 2,5 - M + R_B \cdot 5,0 = 0 &\Rightarrow \\ R_B = \frac{-20 \cdot 3,0 + 20 \cdot 5,0 \cdot 2,5 + 30}{5,0} &= 44 \text{ кН.} \\ \Sigma M_B = F \cdot 8,0 - R_A \cdot 5,0 + q \cdot 5,0 \cdot 2,5 - M &\Rightarrow \\ R_A = \frac{20 \cdot 8,0 + 20 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 30}{5,0} &= 76 \text{ кН.}\end{aligned}$$

При негативному значенні реакції варто змінити її напрямок на протилежний та далі вважати позитивним.

Перевіряємо, чи виконується рівняння  $\Sigma y = 0$ :

$$-F + R_A - q \cdot 5,0 + R_B = -20 + 76 - 20 \cdot 5,0 + 44 = 0,$$

тобто опорні реакції знайдені правильно.

2. Для визначення внутрішніх силових факторів  $Q$  і  $M$  розбиваємо балку на три ділянки і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3 на них. Відкидаємо праві частини балки для перерізів 1-1 і 2-2 (ліву - для переріза 3-3) і розглядаємо рівновагу лівої (правої) частини цих балок.

*Переріз 1-1 (ділянка 1)  $0 < z_1 < 3,0$  м.*

З умови рівноваги  $\Sigma y = 0$  для лівої частини балки одержимо

$$Q_1 = -F = -20 \text{ кН.}$$

Із одержаного рішення можна зробити висновок, що поперечна сила на цій ділянці є постійною, тому її графічне зображення буде прямою лінією, паралельною осі  $z$ .

Згинаючі моменти на першій ділянці одержимо, взявши суму моментів лівих сил відносно перерізу 1-1:

$$M_1 = -F \cdot z_1.$$

З наведеної рівності випливає, що моменти змінюються за лінійним законом. Відповідну епюру одержимо за значеннями моментів:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$z_1 = 3,0 \text{ м} \quad M_1 = -20 \cdot 3,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

*Переріз 2-2 (ділянка 2)  $3,0 \text{ м} < z_2 < 8,0 \text{ м}$ .*

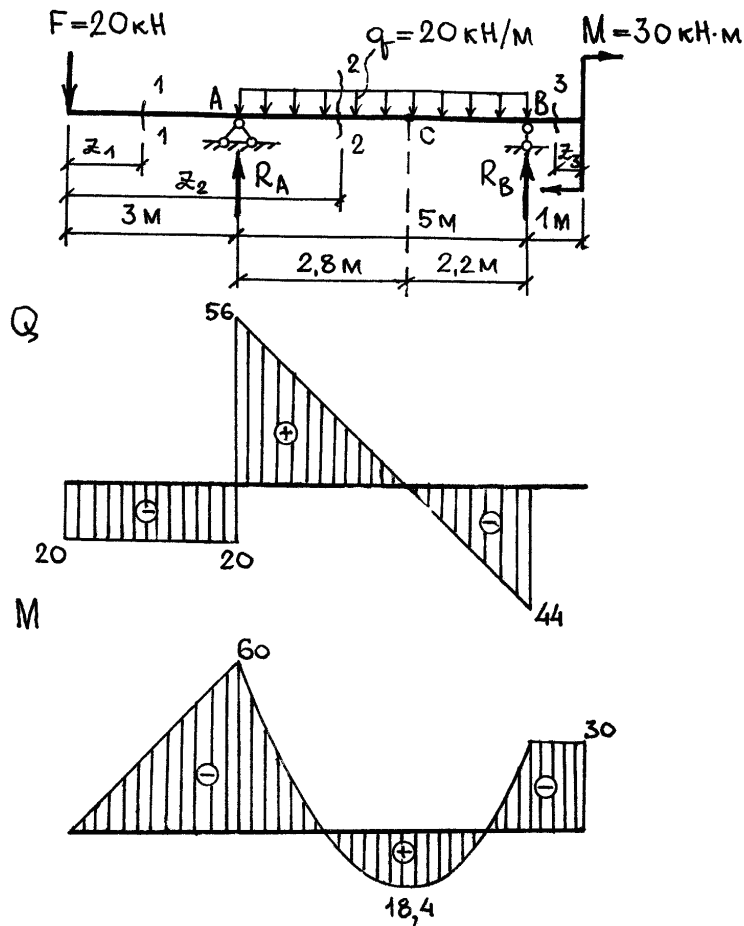


Рис. 1Д - Епюри  $Q$  і  $M$  для балки, наведеної в прикладі 1.

Поперечна сила на цій ділянці описується рівнянням

$$Q_2 = -F + R_A - q(z_2 - 3,0)$$

і змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_2 = 3,0 \quad Q_2 = -F + R_A = -20 + 76 = 56 \text{ кН};$$

$$z_2 = 8,0 \text{ м} \quad Q_2 = -F + R_A - q \cdot 5,0 = -20 + 76 - 20 \cdot 5,0 = -44 \text{ кН}.$$

Згинаючий момент відносно перерізу 2-2 визначається рівнянням

$$M_2 = -F \cdot z_2 + R_A(z_2 - 3,0) - q \frac{(z_2 - 3,0)^2}{2}$$

і змінюється за законом квадратної параболи:

при

$$z_2 = 3,0 \quad M_2 = -F \cdot 3,0 = -20 \cdot 3,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$z_2 = 8,0 \text{ м}$

$$M_2 = -F \cdot 8 + R_A \cdot 5,0 - q \frac{5,0^2}{2} = -20 \cdot 8,0 + 76 \cdot 5,0 - \frac{5,0^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі, де поперечна сила  $Q_2 = 0$ . Виходячи з цього, одержуємо

$$Q_2 = -F + R_A - q \cdot (z_2 - 3,0) = -20 + 76 - 20(z_2 - 3,0) = 0 \Rightarrow z_2 = 5,8 \text{ м.}$$

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі на відстані 5,8 м від лівого кінця балки і дорівнює

$$\begin{aligned} M_2^{max} &= -F \cdot 5,8 + R_A \cdot (5,8 - 3,0) - q \cdot \frac{(5,8 - 3,0)^2}{2} = \\ &= -20 \cdot 5,8 + 76 \cdot 2,8 - 20 \cdot \frac{2,8^2}{2} = 18,4 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Переріз 3-3 (ділянка 3)  $0 < z_3 < 1,0 \text{ м.}$

$$Q_3 = 0.$$

$$M_3 = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Згинаючий момент на цій ділянці постійний і має від'ємне значення (викликає розтягнення верхніх волокон балки).

За одержаними значеннями  $Q$  і  $M$  на границях ділянок будуюмо епюри.

3. Поперечний переріз балки підбираємо за максимальним по модулю значенням згинаючого моменту, яке дорівнює 60 кН · м.

Стальна балка двотаврового профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,

$$\text{Знайдемо } W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{160 \cdot 10^3} = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 375 \text{ см}^3$$

За таблицю ГОСТ 8239-72 вибираємо двотавр № 27а, для якого  $W_z = 407 \text{ см}^3$ .

Дерев'яна балка прямокутного профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ , і  $h = 2b$ , знайдемо

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{10 \cdot 10^3} \geq 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу

$$\frac{h}{b} = k = 2 \quad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{h}{k} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{6k}$$

Отже одержимо

$$\frac{h^3}{6k} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow h \geq \sqrt[3]{\frac{6k \cdot M_{max}}{[\sigma]}} \quad h = 41,6 \text{ см.}$$

Дерев'яна балка круглого профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ ,

$$\text{знайдемо } W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{10 \cdot 10^3} \geq 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

Момент опору для круглого перерізу:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \text{ отже } \frac{\pi d^3}{32} \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{3,14}} = 39,4 \text{ см.}$$

*Приклад 2.* Для рами, показаної на рис. 2 Д, визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил, згинаючих моментів.

*Вирішення.* 1. Визначаємо опорні реакції, користуючись рівняннями статичної рівноваги:

$$\Sigma z; \quad q \cdot 2,0 - F - H_B = 20 \cdot 2,0 - 10 - H_B = 0 \Rightarrow$$

$$H_B = 30 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 - M + R_B \cdot 3,0 - H_B \cdot 2,0 =$$

$$= -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 50 + R_B \cdot 3,0 - 30 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 + 30 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad -q \cdot 2,0 \cdot 3,0 - M + F \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 =$$

$$= -20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 - 50 + 10 \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 + 50 - 10 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН.}$$

Одержані величини опорних реакцій мають додатні значення, тобто їх напрями співпадають з прийнятими.

*Перевірка.*

$$\Sigma y = 0; \quad -R_A + R_B = -50 + 50 = 0.$$

Опорні реакції знайдені правильно.

2. Для визначення  $Q$ ,  $N$  і  $M$  користуємось методом перерізів. Розбиваємо раму на чотири ділянки і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 на них. Якщо на кожній з ділянок відкинути одну із частин рами, то рівновага частини, що залишиться, буде забезпечуватись відповідними поперечними і поздовжніми силами, згинаючими моментами.

Для усіх перерізів поперечну силу  $Q$  знаходимо з рівняння проєкцій сил на осі, перпендикулярні до відповідних стояків і ригелей, поздовжню силу  $N$  – з рівняння проєкцій сил на осі, паралельні відповідним стоякам і ригелям; згинаючий момент  $M$  – з рівняння суми моментів від усіх сил, що діють на залишену частину, відносно центру ваги відповідних перерізів.

*Переріз 1-1 (ділянка I)  $0 < z_1 < 2,0$  м.*

$$Q_1 = -q \cdot z_1; \quad N = R_A; \quad M_1 = -\frac{q \cdot z_1^2}{2}$$

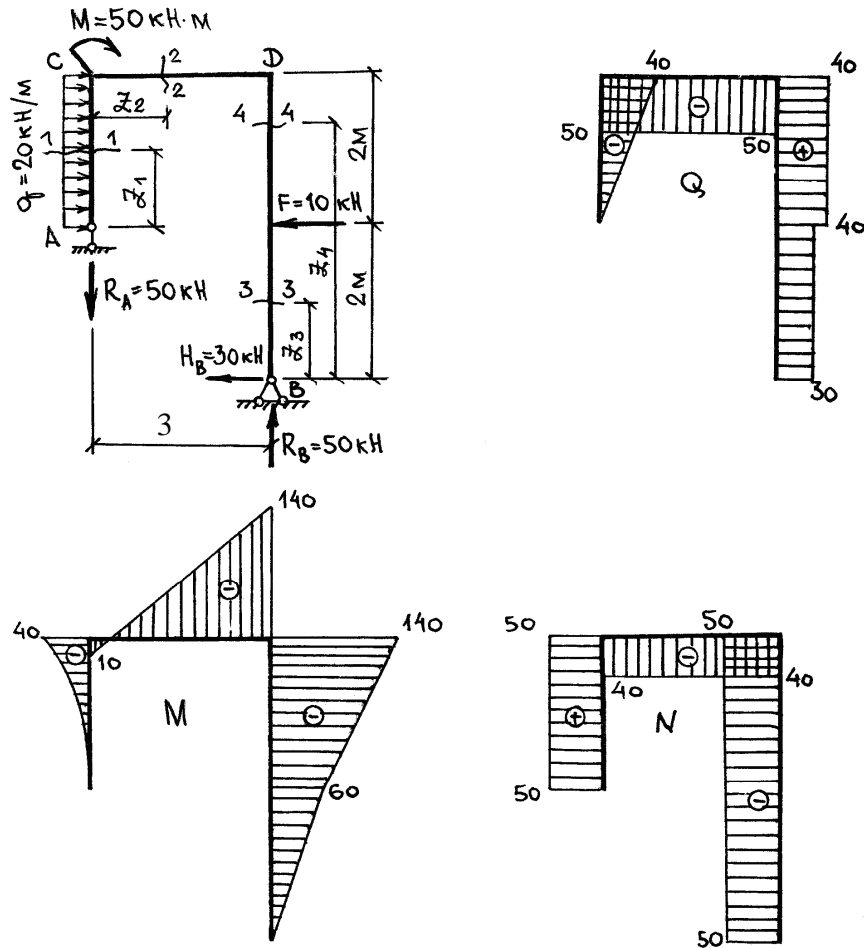


Рис.2 Д - Епюри  $Q$ ,  $N$  і  $M$  для рами, наведеної в прикладі 2

На цій ділянці поперечна сила змінюється за лінійним законом, поздовжня сила має постійне значення і розтягує стержень, а згинаючий момент змінюється за законом квадратної параболи:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_1 = 0; \quad N_1 = R_A = 50 \text{ кН};$$

$$M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2,0 \text{ м} \quad Q_1 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН}; \quad N_1 = R_A = 50 \text{ кН};$$

$$M_1 = -\frac{q \cdot 2,0^2}{2} = -\frac{20 \cdot 2,0^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 2-2 (ділянки 2)  $0 < z_2 < 3,0 \text{ м}$ .

$$Q_2 = -R_A; \quad N_2 = -q \cdot 2,0; \quad M_2 = -R_A \cdot z_2 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M.$$

На цій ділянці поперечна сила має постійне значення; поздовжня сила - також; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_2 = -R_A = -50 \text{ кН}; \quad N_2 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН};$$

$$M_2 = -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 3,0 \text{ м} \quad Q_2 = -R_A = -50 \text{ кН}; \quad N_2 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН};$$



$$M_2 = -R_A \cdot 3,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -50 \cdot 3,0 - 20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = \\ = -140 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 3-3 (ділянка 3)  $0 < z_3 < 2,0 \text{ м}$ .

$$Q_3 = H_B; \quad N_3 = -R_B; \quad M_3 = -H_B \cdot z_3.$$

Поперечна і поздовжня сили на цій ділянці мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_3 = H_B = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = -R_B = -50 \text{ кН}; \quad M_3 = 0;$$

$$z_3 = 2,0 \text{ м} \quad Q_3 = H_B = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_3 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 4-4 (ділянка 4)  $2,0 \text{ м} < z_4 < 4,0 \text{ м}$ .

$$Q_4 = H_B + F; \quad N_4 = -R_B; \quad M_4 = -H_B \cdot z_4 - F \cdot (z_4 - 2).$$

На цій ділянці поперечна і поздовжня сили мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_4 = 2,0 \text{ м} \quad Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}; \quad N_4 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_4 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_4 = 4,0 \text{ м} \quad Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}; \quad N_4 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_4 = -H_B \cdot 4,0 - F \cdot 2,0 = -30 \cdot 4,0 - 10 \cdot 2,0 = -140 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

За результатами обчислень будуюмо епюри  $Q$ ,  $N$  і  $M$ . приймаючи до уваги знаки знайдених величин.

При побудові епюр  $Q$ ,  $N$  додатний напрям осі ординат обираємо вверх (тобто назовні контура рами); при побудові епюри  $M$  – вниз, бо ця епюра будується на розтягнутих волокнах.

3. Як видно з прикладу, розрахунок рами пов'язаний з великими обчисленнями, що може привести до хибних результатів. Тому знайдені значення  $Q$ ,  $N$  і  $M$  слід перевірити з використанням рівнянь, які не використовувались вище.

Перевірку правильності знайдених значень  $Q$ ,  $N$  і  $M$  проводять за умови рівноваги усіх вузлів рами. Для цього треба вирізати вузли  $C$  і  $D$ , прикласти в перерізах вузлів зусилля  $Q$ ,  $N$  і  $M$  з напрямками, що відповідають правилу знаків (рис.3 Д).

Вузол  $C$ . Відзнакою цього вузла є наявність у ньому зовнішнього моменту  $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Прикладаємо його до вузла. Складаємо три умови рівноваги (рис. 3Д. а).

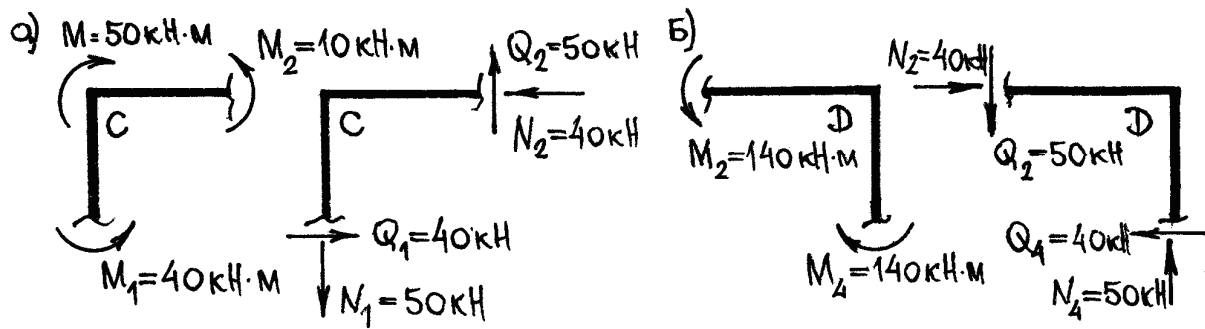


Рис. 3Д – Вузли С і D із зусиллями, що діють в їх перерізах:

$$\Sigma M_C = M_1 + M_2 - M = 40 + 10 - 50 = 0;$$

$$\Sigma z = Q_1 - N_2 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -N_1 + Q_2 = -50 + 50 = 0.$$

Всі рівняння задовольняють вимогам рівноваги, тобто вузол знаходиться в рівновазі.

Вузол D. Рівняння рівноваги для цього вузла (рис. 3Д, б):

$$\Sigma M_D = M_2 - M_4 = 140 - 140 = 0;$$

$$\Sigma z = N_2 - Q_4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -Q_2 + N_4 = -50 + 50 = 0.$$

Вузол D також знаходиться в рівновазі.

Можна зробити висновок, що зусилля  $Q$ ,  $N$  і  $M$  визначені правильно.

## Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів.  
Побудова епюр, розрахунок на згин (для студентів 3 курсу заочної форми  
навчання спец. ТОРіРБ, МБГ, ВВ, ОВ, ТГП).

Укладач: Наталя Василівна Серeda

Відповідальний за випуск: М.А.Засядько

Редактор М.З.Аляб'єв

План 2005, поз. 67

---

Підп. до друку 9.11.05.	Формат 60x84.1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Обл.-вид. арк. 1,5	Ум.-друк. арк. 1,0
Тираж 100 прим.	Зам. №	Ціна договірна

---

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

---

Сектор оперативної поліграфії при ІОЦ ХНАМГ