**Фрактальна розмірність**



11.5 x 200 = 2300 км



28 x 100 = 2800 км



70 x 50 = 3500 км

Рисунок 1. Загальна довжина берегової лінії Великобританії зростає, коли довжина вимірювальної палиці (жердини) зменшується [1].

Фрактальна розмірність (англ. fractal dimension) - один із способів визначення розмірності множини в метричному просторі. Фрактальну розмірність n-вимірної множини можна визначити за допомогою формули:

D = − lim ε → 0 ln ⁡ ( N ε ) ln ⁡ ( ε ) {\displaystyle D=-\lim \limits \_{\varepsilon \to 0}{\frac {\ln(N\_{\varepsilon })} {\ln(\varepsilon )}}} , де N ε {\displaystyle N\_{\varepsilon }} — мінімальна кількість n-вимірних «куль» радіусу ε {\displaystyle \varepsilon } , необхідних покриття множини.

Фрактальна розмірність може набувати ціле числове значение[2].

Основна ідея «дрібної» (англ. fractured) розмірності має довгу історію в галузі математики, але саме сам термін введений в обіг Бенуа Мандельбротом у 1967 році в його статті [en] про самоподібність, в якій він описав «дрібну» (англ. fractional) ) розмірність [3]. У цій статті Мандельброт посилався на попередню роботу Льюїса Фрайя Річардсона, що описує ідею, що суперечить здоровому глузду, що виміряна довжина берегової лінії залежить від довжини мірної палиці (шеста) (див. Рис. 1). Наслідуючи це уявлення, фрактальная розмірність берегової лінії відповідає відношенню числа жердин (у певному масштабі), необхідних для вимірювання довжини берегової лінії, до обраного масштабу жерди [4]. Існує кілька формальних математичних визначень [⇨] фрактальної розмірності, що будуються на цій базовій концепції, про зміну в елементі зі зміною в масштабі.

Одним із елементарних прикладів є фрактальна розмірність сніжинки Коха. Її топологічна розмірність дорівнює 1, але це в жодному разі не спрямовується крива, оскільки довжина кривої між будь-якими двома точками сніжинки Коха - нескінченність. Ніяка скільки завгодно мала частина кривої не є відрізком прямої. Швидше за все, сніжинка Коха складається з нескінченного числа сегментів, з'єднаних під різними кутами. Фрактальну розмірність кривої можна пояснити інтуїтивно, припускаючи, що фрактальна лінія — це об'єкт надто детальний (докладний), щоб бути одномірним, але недостатньо складним, щоб бути двомірним [5]. Тому її розмірність краще описувати не звичайною топологічною розмірністю 1, але її фрактальної розмірністю, що дорівнює цьому випадку числу, що лежить в інтервалі між 1 і 2.



Рисунок 2. 32 квадратні сегменти утворюють фрактал і проглядаються через прямокутну лупу різних розмірів. Візерунок ілюструє самоподібність. Теоретична фрактальна розмірність для цього фракталу дорівнює T log32⁄log8 = 1.67. Його емпірична фрактальна розмірність від ємнісного аналізу дорівнює ±1% [6].

Фрактальна розмірність - коефіцієнт, що описує фрактальні структури або множини на основі кількісної оцінки ix складності [en], як коефіцієнт зміни в деталі зі зміною масштабу [4] :1. Деякі типи фрактальної розмірності можна виміряти теоретично та емпірично[en](див. рис. 2)[7][8]. Фрактальні розмірності використовуються для характеристики широкого спектра об'єктів від абстрактних[9][7] до практичних явищ, наприклад: турбулентність,[4]:97–104 річкові мережі,:246–247 зростання міст,[10] фізіологія людини,[11] [12] медицина [8] та ринкові тренди [13]. Основна ідея дробової чи фрактальної розмірності має довгу історію математики, яку можна простежити з 1600 года,[4]:19[14] але самі терміни фрактал і фрактальная розмірність було запроваджено математиком Бенуа Мандельбротом в 1975[9][4][8] [13] [15].

Фрактальна розмірність була вперше введена як коефіцієнт, що описує геометрично складні форми, для яких деталі є важливішими, ніж повний рисунок[15]. Для множин, що описують звичайні геометричні форми, теоретична фрактальна розмірність дорівнює звичайній Евклідовій або топологічній розмірності. Таким чином, для множин, що описують точки, теоретична фрактальна розмірність дорівнює 0; 1 для множин, що описують пряму (множини, що мають лише довжину); 2 для множин, що описують поверхню (що мають довжину та ширину); 3 для множин, що описують обсяг (множини, що мають довжину, ширину та висоту). Але це змінюється для фрактальних множин. Якщо теоретична фрактальна розмірність множини перевищує топологічну розмірність, то вважають, що множина має фрактальну геометрію [16].

На відміну від топологічної розмірності, фрактальний коефіцієнт може приймати не ціле значення [17], показуючи те, що фрактальне безліч заповнює простір не так як його заповнює звичайне геометричне безліч [9] [18] [7]. Наприклад, крива з фрактальною розмірністю дуже близькою до 1, скажімо 1.10, поводиться цілком як звичайна лінія, але крива з фрактальною розмірністю 1.9 намотана у просторі, майже як поверхня. Подібним чином, поводиться поверхня з фрактальною розмірністю 2.1. Вона заповнює простір майже як звичайна поверхня, але поверхня з фрактальною розмірністю 2.9 згортається і прагне заповнити простір майже як об'єм[16]:48[notes 1]. Цей загальний зв'язок можна побачити на 2 зображенні фрактальної кривої на див. 2 і див. 3 - 32 сегменти, контур на Рис.2, заплутаний і заповнює простір. Ця фрактальна крива має розмірність 1.67 порівняно з менш складною кривою Коха на Рис.3 яка має фрактальну розмірність 1.26.

Рисунок 3. Крива Коха – класична ітерована фрактальна крива. Беремо одиничний відрізок, розділяємо на три рівні частини та замінюємо середній інтервал рівностороннім трикутником без цього сегмента. В результаті утворюється ламана, що складається з чотирьох ланок довжини 1⁄3. На наступному кроці повторюємо операцію для кожного з чотирьох ланок, що вийшли. Гранична крива і є крива Коха

Відношення між зростаючою фрактальною розмірністю та заповнювальним простором може бути прийнято за фрактальну розмірність виміряної щільності, але це не так. Ці два параметри суворо корелируют[6]. Натомість, фрактальна розмірність вимірює складність. Це поняття пов'язане з певними особливостями фракталів: самоподібність, шаблон та нерівномірність [Notes 2]. Ці властивості зустрічаються в прикладах фрактальних кривих, описаних вище. Обидві криві з топологічною розмірністю такою, що можна сподіватися, що можна виміряти їх довжину або кутовий коефіцієнт, як зі звичайними лініями. Але ми можемо зробити щось із цих речей, оскільки фрактальные криві мають складність як самоподібності і шаблонів, чого немає у звичайних линий[4]. Самоподібність лежить у нескінченному масштабі, а шаблон у визначальних елементах кожної множини. Довжина між будь-якими двома точками цих кривих не визначена, тому що теоретично дані конструкції ніколи не зупиняються, а повторюють нескінченну кількість разів [19]. Кожна менша частина складається з нескінченного числа масштабних сегментів, які виглядають точно як у першій ітерації. Це не спрямовує криві, тобто ми не можемо розбити їх на окремі сегменти і обчислити приблизно довжину. Ми не можемо описати за допомогою довжини та кутового коефіцієнта. Однак їх фрактальні розмірності можуть бути визначені. Вони показують, як заповнюють простір більше, ніж звичайні лінії, але менше, ніж поверхні, це дозволяє порівнювати їх між собою.

Зауважимо, що дві фрактальні криві, описані вище, показують тип самоподібності, який точно повторює початковий шаблон, що легко візуалізувати. Структури такого роду можуть траплятися й у інших просторах (наприклад, фрактали[en]). Якщо Криву Коха розширити в 3-мірний простір, то її теоретична фрактальна розмірність дорівнюватиме 2.5849. Однак, існує складність при підрахунку фрактальної розмірності для наступного приклада[7][13]: узбережжя Великобританії є наближеною модель з наближеним масштабом[4]:26. Загалом фрактали можуть бути різних типів, ступенів самоподібності та шаблонів, які складно візуалізувати. Вони включають, як приклади, дивні аттракторы: гладкі ділянки нагромадження[16]:49, безліч Жюліа і частота серцебиття[20]. Фрактальну складність який завжди просто обчислити, не спираючись на складні аналітичні методи, які ведуть до відповіді через фрактальные размерности[4]:197; 262.

Терміни фрактальна розмірність і фрактал були введені Мандельбротом в 1975 [15], приблизно через 10 років після того, як він опублікував свою статтю про самоподібність узбережжя Великобританії. Мандельброт об'єднав та застосував складну теоретичну математику та інженерну роботу у новому варіанті вивчення складної геометрії. Це викликало звичайним лінійним термінам[14][21][22]. Найбільш раннє коріння, яке Мандельброт узагальнив у понятті «фрактальна геометрія», було чітко простежено у творах про недиференційованість, нескінченність самоподібних функцій, які є важливими в математичному визначенні фракталів. Приблизно тоді, аналіз був опублікований (у середині 1600-х років)[4]:405. Була перерва у публікації робіт про такі функції. Починаючи з кінця 1800-х зі створення математичних функцій та множин, які сьогодні називають канонічними фракталами (такі як однойменні роботи фон Коха, [19] Серпінського, Жюліа), почалося оновлення у цій сфері. Саме тоді їх формулювання часто розглядалася, як сильно суперечить математичним «монстрам»[14][22]. Ці роботи супроводжувалися, очевидно, припущеннями, що є найбільш ключовим моментом у розвитку концепції фрактальної геометрії, через роботи Хаусдорфа на початку 1900-х. Хаусдорф визначив «дрібну розмірність», яка зараз називається його ім'ям і часто залучається до визначення сучасних фракталів[3][4]:44[16][21].

Роль масштабу



Рисунок 4. Традиційне уявлення геометрії про визначення масштабу та розмірності.

Ідея фрактальної розмірності лежить у нетрадиційному поданні масштабу та розмірності [23]. Це видно на Мал. 4, що ілюструє традиційні поняття геометрії, які формують масштаб передбачувано та відповідно до зрозумілих та знайомих уявлень про простір, в якому вони містяться. Наприклад, візьмемо лінію, поділимо її на три рівні частини, то кожна частина буде довжиною в 3 рази меншою, довжини початкової лінії. Також це має місце у площині. Якщо виміряти площу квадрата, а потім виміряти площу квадрата зі стороною довжиною 1⁄3 від довжини сторони початкового квадрата, то вона виявиться у 9 разів меншою за площу початкового квадрата. Цей масштаб може бути визначений математично за допомогою правила масштабу за рівнянням 1, де N {\displaystyle N} число деталей, ϵ {\displaystyle \epsilon } - коефіцієнт масштабу, D {\displaystyle D} - фрактальна розмірність:

N ∝ ϵ − D {\displaystyle {N\propto \epsilon ^{-D}}}

(1)

Символ ∝ {\displaystyle \propto} означає пропорційність. Це правило масштабу підтверджує традиційні правила геометрії масштабу, оскільки для лінії — N {\displaystyle N} =3, коли ϵ {\displaystyle \epsilon } =1⁄3, то D {\displaystyle D} =1, і для квадратів, тому що N {\displaystyle N} =9, коли ϵ {\displaystyle \epsilon} =1⁄3, D {\displaystyle D} =2.



Рисунок 5. Перші 4 ітерації Сніжинки Коха, яка має приблизну розмірність Хаусдорфа 1.2619.

Те саме правило відноситься і до фрактальної геометрії, але менш інтуїтивно. Щоб порахувати для фрактальної лінії одиничної довжини, на перший погляд, зменшуємо масштаб у 3 рази, у цьому випадку N {\displaystyle N} =4 , коли {{displaystyle \epsilon} =1⁄3 і значення D {\displaystyle D} можна знайти перетворивши рівняння 1:

log ϵ ⁡ N = − D = log ⁡ N log ⁡ ϵ {\displaystyle {\log \_{\epsilon }{N}={-D}={\frac {\log {N}}{\log {\epsilon }}}}}

(2)

Таким чином, для фракталу, описаного через N {\displaystyle N} =4, коли {{displaystyle \epsilon} =1⁄3, D {\displaystyle D} =1.2619. В цьому випадку розмірність набуває не цілого значення, отже, можна припускати, що фрактал має розмірність не рівну розмірності простору, в який він вбудований [7]. Цей же масштаб використовується для Кривої Коха та сніжинки Коха. Слід зазначити, що самі ці зображення не є істинними фракталами, оскільки масштабування описане значенням D {\displaystyle D} не може продовжувати нескінченно з тієї простої причини, що зображення існує тільки в найменшій точці пікселя. Теоретична структура, яка представляє цифрове зображення, не має дискретних пікселів, як шматки, а складається з нескінченного числа сегментів під різними кутами з фрактальною розмірністю, що дорівнює 1.2619[4][23].

Розмірність - не єдиний параметр



Малюнок 6. Дві L-системи, які на кожній ітерації одержують 4 деталі масштабу в 1⁄3 разів менше попередньої ітерації. Мають таку ж фрактальну розмірність, як для кривої Коха[6].

Як у випадку з розмірністю, визначеною для лінії, квадрата та куба, фрактальні розмірності — загальні характеристики, що не дозволяє однозначно визначити структуру [23] [24]. Значення D {\displaystyle D} для фрактала Коха наводилося вище, наприклад, кількісної структури властивий масштаб, але цього не достатньо, щоб побудувати його. Багато фрактальних структур і візерунків можна побудувати з таким самим масштабом, як у кривої Коха, але все одно вони відрізнятимуться від кривої Коха (див. Рисунок 6).



Малюнок 7. Береться відрізок прямої одиничної довжини. Потім він ділиться на три рівні частини і виймається середній відрізок. На другому кроці аналогічної процедури піддаються відрізки, що залишилися. Так процес продовжується до нескінченності.

Поняття фрактальної розмірності, описане у статті, є класичний вид складної структури. Приклади, описані тут, вибрано для наочності. Масштаб та коефіцієнт відомі вже давно. Насправді, однак, фрактальні розмірності можна визначити за допомогою методів, які беруть приблизний масштаб. Як визначення фрактальної розмірності у книзі Божокіна С. В. та Паршина Д. А. «Фрактали та мультифрактали»[2] використовують таку формулу:

D = − lim ε → 0 ln ⁡ ( N ε ) ln ⁡ ( ε ) {\displaystyle D=-\lim \limits \_{\varepsilon \to 0}{\frac {\ln(N\_{\varepsilon })} {\ln(\varepsilon )}}} , де N ε {\displaystyle N\_{\varepsilon }} — мінімальна кількість n-вимірних «куль» радіусу ε {\displaystyle \varepsilon } , необхідних покриття множини.

Відповідно до цієї формули, для ізольованої точки, відрізка довжиною L {\displaystyle L} , поверхні площі S {\displaystyle S} , простору об'єму V {\displaystyle V} фрактальна розмірність співпадає зі звичайною розміром Евкліди.

Використовуючи цю формулу, можна обчислити фрактальну розмірність, наприклад, множини Кантора (див. Рисунок 7). Вочевидь, що у n {\displaystyle n} -ом кроці отримаємо 2 n {\displaystyle 2^{n}} відрізків довжиною 1 3 n {\displaystyle {\frac {1}{3^{n}}}} , з чого слід, що фрактальная розмірність для множини Кантора дорівнює 0, 6309 [2].

Декілька формальних визначень різних типів фрактальної розмірності наведено нижче. Незважаючи на те, що для деяких класичних фракталів всі ці розмірності збігаються, вони не еквівалентні.

Розмірність Мінковського: D оцінюється як експоненти статечного закону.

D 0 = lim ϵ → 0 log ⁡ N (ϵ) log ⁡ 1 ϵ. {\displaystyle D\_{0}=\lim \_{\epsilon \rightarrow 0}{\frac {\log N(\epsilon )}{\log {\frac {1}{\epsilon }}}}.}

Інформаційна розмірність: D розглядається як середня інформація, необхідна для виявлення зайнятої ємності з розміром цієї ємності; {{displaystyle p} — ймовірність.

D 1 = lim ϵ → 0 − ⟨ log ⁡ p ϵ ⟩ log ⁡ 1 ϵ {\displaystyle D\_{1}=\lim \_{\epsilon \rightarrow 0}{\frac {-\langle \log p\_{\epsilon } \rangle }{\log {\frac {1}{\epsilon }}}}}

Кореляційна розмірність [en] D заснована на M {\displaystyle M} і gε, де M {\displaystyle M} - число точок, використаних, щоб представити фрактал, gε - число пар точок ближче, ніж ε один з одним.

D 2 = lim ϵ → 0 , M → ∞ log ⁡ ( g ϵ / M 2 ) log ⁡ ϵ {\displaystyle D\_{2}=\lim \_{\epsilon \rightarrow 0,M\rightarrow \infty }{\frac {\log(g\_{\epsilon }/M^{2})}{\log \epsilon }}}

Узагальнені розмірності Реньї:

Розмірність Мінковського, інформаційну та кореляційну розмірності можна розглядати як окремий випадок безперервного спектру узагальнених розмірностей порядку α, визначених таким чином:

D α = lim ϵ → 0 1 1 − α log ⁡ ( ∑ i p i α ) log ⁡ 1 ϵ {\displaystyle D\_{\alpha }=\lim \_{\epsilon \rightarrow 0}{\frac {{\frac {1 }{1-\alpha }}\log(\sum \_{i}p\_{i}^{\alpha })}{\log {\frac {1}{\epsilon }}}}}

Розмірність Хігуті[25]

D = d log ⁡ ( L ( k ) ) d log ⁡ ( k ) {\displaystyle D={\frac {d\ \log(L(k))}{d\ \log(k)}}}

Розмірність Ляпунова

Мультифрактальні розмірності: особливий випадок розмірностей Реньї, коли поведінка масштабу змінюється у різних частинах малюнка.

Невизначеність показника

Розмірність Хаусдорфа

Пакувальна розмірність

Розмірність Ассойда[en]

Локально пов'язана розмірність[26]

Оцінка реальних даних[ред. редагувати код]

Багато реальних явищ показують обмежені чи статистичні фрактальні властивості та фрактальні розмірності, які можна оцінити з вибірки даних, використовуючи комп'ютер з урахуванням методів фрактального аналізу[en]. Практично вимірювання фрактальної розмірності залежить від різних методологічних питань, і чутливі до чисельного або експериментального шуму і обмежені в обсязі даних. Тим не менш, область швидко розвивається в оцінці фрактальної розмірності для статистично самоподібних явищ. Фрактальна розмірність має багато практичних додатків у різних галузях, що включають діагностичну візуалізацію,[27][28] фізіологію,[11] нейробіологію,[12] медицину,[29][30][31] фізику,[32][33] аналіз зображень,[34][35][36][37] акустику,[38] нулі дзета-функції Рімана[39] та електрохімічні процеси[40].

Альтернативою безпосередньому виміру є математична модель, яка нагадує формування реального фрактального об'єкта. У цьому випадку перевірка також може бути зроблена шляхом порівняння інших фрактальних властивостей, що випливають з моделі, з даними вимірювань. У колоїдній фізиці системи складаються з частинок з різними фрактальними розмірностями. Щоб описати ці системи, використовують ймовірнісний розподіл фрактальної розмірності. І, зрештою, час еволюція останніх: це процес, який обумовлений складною взаємодією між агрегацією[en] та коалесценцією[41].