

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від серпня 202_ р.
№ __

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення лабораторних занять з навчальної дисципліни «Математичні методи аналізу економіки»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 051 «Економіка»
освітньо-професійна програма «Цифрова економіка»
факультет бізнесу та сфери обслуговування
кафедра фінансів та цифрової економіки

Рекомендовано на засіданні
кафедри фінансів та цифрової
економіки
26 серпня 2024 р.,
протокол № 08

Розробник: к.е.н., доцент кафедри фінансів та цифрової економіки,
ОВАНДЕР Наталія

Житомир
2024

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 2

ЗМІСТ

1. Математична постановка задач лінійного програмування.....	3
2. Симплекс-метод.....	5
3. Домашнє завдання.....	13
4. Метод штучного базису.....	14
5. Домашнє завдання.....	17
6. Двоїста задача лінійного програмування.....	18
7. Розв'язування задачі симплекс-методом за допомогою програми MS Excel.....	20
8. Контрольні запитання по темі симплекс метод.....	23
9. Транспортна задача.....	24
10. Домашнє завдання.....	32
11. Контрольна робота.....	35
12. Незбалансована транспортна задача.....	39
13. Розв'язування транспортної задачі за допомогою програми MS Excel.....	43
14. Контрольні запитання.....	45

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 3

1. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача 1. Підприємство планує випуск x_1 штук виробів 1 виду та x_2 штук виробів 2 виду. На виробництво використовується сировина А, якої є в наявності 150 кг, та сировина Б, якої є 100 кг. Скласти план виробництва товарів, при якому прибуток буде максимальним.

	Виріб 1	Виріб 2	Запаси, кг
Витрати сировини А на 1 виріб, кг	3	1	150
Витрати сировини Б на 1 виріб, кг	1	2	100
Прибуток з 1 виробу, грн.	2	3	-

Складаємо систему обмежень

$$3x_1 + x_2 \leq 150$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

Цільова функція буде мати вигляд:

$$\max(f) = 2x_1 + 3x_2$$

Задача 2. Гуртівні продуктів, враховуючи попит населення, необхідно продати майонезу не менше, ніж на 140 тис. грн. і кетчупу не менше, ніж на 40 тис грн. Скласти план продаж з мінімальною сумою витрат, якщо товарооборот має бути не меншим, ніж 200 тис грн., а сума прибутку – не менше 25 тис грн.

	Майонез, уп	Кетчуп, уп	Товарооборот, тис грн.
План	x_1	x_2	200
Прибуток з уп., %	10	20	25
Витрати на уп., %	6	5	-

$$x_1 \geq 140, x_2 \geq 40$$

$$x_1 + x_2 \geq 200$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 25$$

$$\min(f) = 0,06x_1 + 0,05x_2$$

Задача 3. Магазин планує продати товару 1 на x_1 тис грн., товару 2 на x_2 тис грн., причому планується закуповувати товару 1 не менше, ніж на 30 тис грн., товару 2 – не менше, ніж на 20 тис грн.. Враховуючи витрати на перевезення і зберігання, скласти план товарообороту, при якому буде отримано максимальний прибуток.

	Товар 1	Товар 2	Макс. допустимі витрати, тис. Грн.
Транспортні витрати, %	3	1	1,5
Витрати на зберігання, %	1	2	1
Прибуток з одиниці, %	20	30	-

$$0,03x_1 + 0,01x_2 \leq 1,5$$

$$0,01x_1 + 0,02x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 30, x_2 \geq 20$$

$$\max(f) = 0,2x_1 + 0,3x_2$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 4

Переведення задачі до канонічного вигляду

Задача 4. Перевести задачу із стандартного до канонічного вигляду.

$$3x_1 + x_2 \leq 150$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$\max (f) = 2x_1 + 3x_2$$

Вводимо додаткові змінні x_3 та x_4 у рівняння і в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 150$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

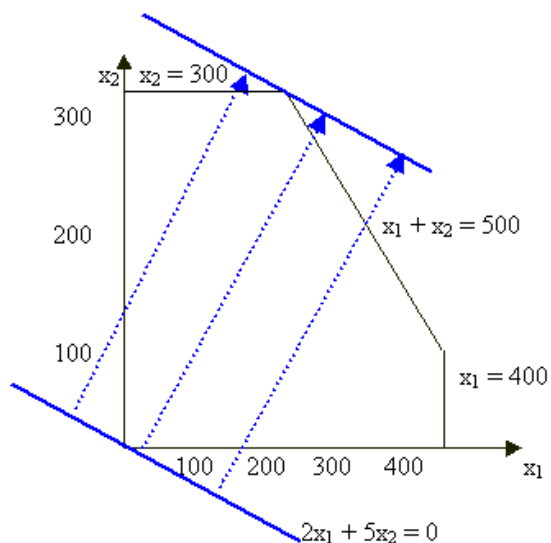
$$\max (f) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Геометрична постановка задачі лінійного програмування

Задача 5. Прибуток від виробництва і реалізації одиниці товару 1 становить $e_1 = 2$ грн., товару 2 відповідно $e_2 = 5$ грн. Підприємство володіє трьома видами ресурсів:

- А = 400 кг і використовується на виробництво товару 1;
- Б = 300 кг і використовується на виробництво товару 2;
- В = 500 кг і використовується на виробництво товарів 1 та 2 (в однакових кількостях).

Скласти план виробництва для досягнення максимальної прибутковості.



$$x_1 \leq 400, x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 300, x_2 \geq 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 5

$$x_1 + x_2 \leq 500$$

$$\max f = 2x_1 + 5x_2$$

Максимальний прибуток досягається при $x_1=200$ та $x_2 = 300$, а саме $2 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 1900$

2. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Задача 6. Для виготовлення виробів А, В, С підприємство використовує 3 види сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду продукції, ціна одного виробу та загальна кількість сировини подані у таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 виріб			Кількість сировини
	Виріб А	Виріб В	Виріб С	
Сировина І	18	15	12	360
Сировина ІІ	6	4	8	192
Сировина ІІІ	5	3	3	180
Ціна 1 виробу	9	10	16	-

Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виготовленої продукції буде максимальною.

Загальна виручка: $9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$

Обмеження: $18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180$$

Запишемо рівняння у векторній формі:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 = P_0$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Складаємо симплекс-таблицю (ТАБЛИЦЯ №1):

i	Базис	Сб	P ₀	9	10	16	0	0	0
---	-------	----	----------------	---	----	----	---	---	---

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1		Арк 41 / 6

				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₄	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P ₅	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P ₆	0	180	5	3	3	0	0	1
Δ	-	-	0	- 9	- 10	- 16	0	0	0

Вибираємо найменше значення з 4 рядка (-16) – індекс при P_i буде номером розв’язального стовпчика (s = 3).

Шукаємо розв’язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$.

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{13}} = \frac{360}{12} = 30, K_2 = \frac{a_{20}}{a_{23}} = \frac{192}{8} = 24, K_3 = \frac{a_{30}}{a_{33}} = \frac{180}{3} = 60$$

Вибираємо найменше значення – індекс при K_i буде номером розв’язального рядка (k = 2). Розв’язальний елемент буде на перетині розв’язальних рядка та стовпчика – a_{ks} = a₂₃ = 8.

Заповнюємо нову таблицю. В ній розв’язальний стовпчик замінюється на такий базисний, де a_{kj} = 1. В нашому випадку елемент a_{2j} присутній в стовпчику P₅. В рядку „Базис” вписуємо P₅ у рядку k, тобто P₃ вписується в 2-й рядок. Значення параметра Сб при цьому замінюється на відповідну базисному стовпчику ціну.

ТАБЛИЦЯ №2.

i	Базис	Сб	P ₀	9	10	16	0	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₄	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P ₃	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P ₆	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
Δ	-	-	384	3	-2	0	0	2	0

Проводимо розрахунки елементів таблиці по формулах:

- для елементів, які належать розв’язальному рядку: $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{ks}}$,
- для всіх інших елементів: $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot a_{is}$.

Спочатку заповнюються стовпчики P₁, P₂, P₅.

$$a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{23}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, a_{22} = \frac{a_{22}}{a_{23}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, a_{25} = \frac{a_{25}}{a_{23}} = \frac{1}{8}.$$

$$a_{11} = a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{23}} \cdot a_{13} = 18 - \frac{3}{4} \cdot 12 = 9, \quad a_{31} = a_{31} - \frac{a_{21}}{a_{23}} \cdot a_{33} = 5 - \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{11}{4},$$

$$a_{12} = a_{12} - \frac{a_{22}}{a_{23}} \cdot a_{13} = 15 - \frac{1}{2} \cdot 12 = 9, \quad a_{32} = a_{32} - \frac{a_{22}}{a_{23}} \cdot a_{33} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2},$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 7

$$a_{15} = a_{15} - \frac{a_{25}}{a_{23}} \cdot a_{13} = 0 - \frac{1}{8} \cdot 12 = -\frac{3}{2}. \quad a_{35} = a_{35} - \frac{a_{25}}{a_{23}} \cdot a_{33} = 0 - \frac{1}{8} \cdot 3 = -\frac{3}{8}.$$

Аналогічно розраховуємо дані зі стовпчика P_0 :

$$a_{k0} = \frac{a_{k0}}{a_{ks}}, \quad a_{i0} = a_{i0} - \frac{a_{k0}}{a_{ks}} \cdot a_{is}.$$

$$a_{20} = \frac{a_{20}}{a_{23}} = \frac{192}{8} = 24,$$

$$a_{10} = a_{10} - \frac{a_{20}}{a_{23}} \cdot a_{13} = 360 - \frac{192}{8} \cdot 12 = 72, \quad a_{30} = a_{30} - \frac{a_{20}}{a_{23}} \cdot a_{33} = 180 - \frac{192}{8} \cdot 3 = 108.$$

Наступним кроком є заповнення 4-го рядка: $\Delta_i = \Delta_i - \frac{a_{ki}}{a_{ks}} \cdot \Delta_s$.

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{21}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = -9 - \frac{6}{8} \cdot (-16) = 3, \quad \Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{24}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{0}{8} \cdot (-16) = 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_2 - \frac{a_{22}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = -10 - \frac{4}{8} \cdot (-16) = -2, \quad \Delta_5 = \Delta_5 - \frac{a_{25}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{1}{8} \cdot (-16) = 2,$$

$$\Delta_3 = \Delta_3 - \frac{a_{23}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = -16 - \frac{8}{8} \cdot (-16) = 0, \quad \Delta_6 = \Delta_6 - \frac{a_{26}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{0}{8} \cdot (-16) = 0.$$

$$\Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{20}}{a_{23}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{192}{8} \cdot (-16) = 384.$$

По аналогії заповнюємо 3-тю таблицю. Розрахунки проводяться до тих пір, поки в 4-му рядку всі елементи стануть невід'ємними. Розв'язками будуть значення зі стовпчика P_0 при цінах зі стовпчика Сб. Якщо у стовпчику Сб є нульові значення, то такий виріб взагалі недоцільно виробляти.

Шукаємо в 2-ій таблиці розв'язальний стовпчик. Найменше значення -2 у стовпчику P_2 , тому він буде розв'язальним, $s=2$.

Шукаємо розв'язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$.

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{12}} = \frac{72}{9} = 8, \quad K_2 = \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{24}{0,5} = 48, \quad K_3 = \frac{a_{30}}{a_{32}} = \frac{108}{1,5} = 72.$$

Найменше значення при K_1 , тому розв'язальний рядок $k=1$. Розв'язальний елемент таким чином $a_{12} = 9$.

ТАБЛИЦЯ №3.

і	Базис	Сб	P ₀	9	10	16	0	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 8

1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	11/9	0	0	-1/6	-1/8	1
Δ	-	-	400	5	0	0	2/9	5/3	0

Розв'язальний стовпчик замінюється на такий базисний, де $a_{kj} = 1$. В нашому випадку елемент a_{1j} присутній в стовпчику P_4 . В рядку „Базис” вписуємо P_s у рядку k , тобто P_2 вписується в 1-й рядок. Значення параметра C_b при цьому замінюється на відповідну базисному стовпчику ціну.

Проводимо розрахунки елементів таблиці по формулах: $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{ks}}$ (для елементів, які

належать розв'язальному рядку), $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot a_{is}$ (для всіх інших елементів).

$$a_{11} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{9}{9} = 1, \quad a_{14} = \frac{a_{14}}{a_{12}} = \frac{1}{9}, \quad a_{15} = \frac{a_{15}}{a_{12}} = \frac{-1,5}{9} = -\frac{1}{6}.$$

$$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot a_{22} = \frac{3}{4} - \frac{9}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad a_{31} = a_{31} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot a_{32} = \frac{11}{4} - \frac{9}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{9},$$

$$a_{24} = a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{12}} \cdot a_{22} = 0 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{18}, \quad a_{34} = a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{12}} \cdot a_{32} = 0 - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_{25} = a_{25} - \frac{a_{15}}{a_{12}} \cdot a_{22} = \frac{1}{8} - \frac{-1,5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}, \quad a_{35} = a_{35} - \frac{a_{15}}{a_{12}} \cdot a_{32} = -\frac{3}{8} - \frac{-1,5}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}.$$

розраховуємо дані зі стовпчика P_0 :

$$a_{k0} = \frac{a_{k0}}{a_{ks}}, \quad a_{i0} = a_{i0} - \frac{a_{k0}}{a_{ks}} \cdot a_{is}.$$

$$a_{10} = \frac{a_{10}}{a_{12}} = \frac{72}{9} = 8,$$

$$a_{20} = a_{20} - \frac{a_{10}}{a_{12}} \cdot a_{22} = 24 - \frac{72}{9} \cdot \frac{1}{2} = 20, \quad a_{30} = a_{30} - \frac{a_{10}}{a_{12}} \cdot a_{32} = 108 - \frac{72}{2} \cdot \frac{3}{2} = 96.$$

$$\Delta_i = \Delta_i - \frac{a_{ki}}{a_{ks}} \cdot \Delta_s.$$

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 3 - \frac{9}{9} \cdot (-2) = 5,$$

$$\Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{14}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{1}{9} \cdot (-2) = \frac{2}{9},$$

$$\Delta_2 = \Delta_2 - \frac{a_{12}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 0,$$

$$\Delta_5 = \Delta_5 - \frac{a_{15}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 2 - \frac{-1,5}{9} \cdot (-2) = \frac{5}{3},$$

$$\Delta_3 = \Delta_3 - \frac{a_{13}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 0,$$

$$\Delta_6 = \Delta_6 - \frac{a_{16}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{0}{9} \cdot (-2) = 0.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 9

$$\Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{10}}{a_{12}} \cdot \Delta_2 = 384 - \frac{72}{9} \cdot (-2) = 400.$$

Оскільки усі елементи 4-го рядка невід'ємні, то можна зробити висновок, що $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$. Сума доходу складає 400. Виробництво 1-го виробу є неефективним, тому що вимагає багато ресурсів, а ціна його є відносно низькою.

Задача 7. Підприємство планує випуск x_1 штук виробів 1 виду та x_2 штук виробів 2 виду. На виробництво використовується сировина А, якої є в наявності 150 кг, та сировина Б, якої є 100 кг. Скласти план виробництва товарів, при якому прибуток буде максимальним.

	Виріб 1	Виріб 2	Запаси, кг
Витрати сировини А на 1 виріб, кг	3	1	150
Витрати сировини Б на 1 виріб, кг	1	2	100
Прибуток з 1 виробу, грн.	2	3	-

Загальні обмеження:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 150 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 100 \\ \max(f) &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Зводимо рівняння до канонічної форми:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 150 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \\ \max(f) &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Запишемо рівняння у векторній формі: $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = P_0$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

ТАБЛИЦЯ №1:

і	Базис	Сб	P ₀	2	3	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
1	P ₃	0	150	3	1	1	0
2	P ₄	0	100	1	2	0	1
Δ	-	-	0	-2	-3	0	0

Розв'язальний стовпчик – другий, $s = 2$. Шукаємо розв'язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}} \cdot K_1 = \frac{a_{i0}}{a_{i2}} = \frac{150}{1} = 150$, $K_2 = \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{100}{2} = 50$.

Розв'язальний рядок – другий, $k = 2$. Розв'язальний елемент $a_{22} = 2$.

Заповнюємо нову таблицю. В ній розв'язальний стовпчик замінюється на такий базисний, де $a_{kj} = 1$.

ТАБЛИЦЯ №2.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 10

і	Базис	Сб	Р ₀	2	3	0	0
				Р ₁	Р ₂	Р ₃	Р ₄
1	Р ₃	0	100	5/2	0	1	- 1/2
2	Р ₂	3	50	1/2	1	0	1/2
Δ	-	-	150	- 1/2	0	0	3/2

Проводимо розрахунки елементів таблиці по формулах: $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{ks}}$, $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot a_{is}$.

$$a_{11} = a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}, \quad a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{1}{2},$$

$$a_{14} = a_{14} - \frac{a_{24}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}, \quad a_{24} = \frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{1}{2},$$

$$a_{10} = a_{10} - \frac{a_{20}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 150 - \frac{100}{2} \cdot 1 = 100, \quad a_{20} = \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{100}{2} = 50.$$

Заповнюємо останній рядок по формулі: $\Delta_j = \Delta_j - \frac{a_{ki}}{a_{ks}} \cdot \Delta_s$.

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = -2 - \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{1}{2}, \quad \Delta_2 = \Delta_2 - \frac{a_{22}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = \Delta_3 - \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{24}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-3) = \frac{3}{2}, \quad \Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{20}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{100}{2} \cdot (-3) = 150.$$

В таблиці №2 розв'язальний стовпчик – перший, s = 1.

Шукаємо розв'язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $Ki = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$:

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{100}{5/2} = 40, \quad K_2 = \frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{50}{1/2} = 100.$$

Розв'язальний рядок – перший, k=1. Розв'язальний елемент $a_{11} = 5/2$.

ТАБЛИЦЯ №3.

і	Базис	Сб	Р ₀	2	3	0	0
				Р ₁	Р ₂	Р ₃	Р ₄
1	Р ₁	2	40	1	0	2/5	-1/5
2	Р ₂	3	30	0	1	-1/5	2/5
Δ	-	-	170	0	0	1/5	7/5

$$a_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{2}{5}, \quad a_{23} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 0 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{5},$$

$$a_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}, \quad a_{24} = a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot a_{21} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5},$$

$$a_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{100}{5/2} = 40, \quad a_{20} = a_{20} - \frac{a_{10}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 50 - \frac{100}{5/2} \cdot \frac{1}{2} = 30.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 11

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{11}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \Delta_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 0, \quad \Delta_3 = \Delta_3 - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 0 - \frac{1}{5/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = \frac{3}{2} - \frac{-1/2}{5/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}, \quad \Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{10}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 150 - \frac{100}{5/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 170.$$

В останньому рядку таблиці №3 усі елементи невід'ємні, тому $x_1 = 40, x_2 = 30$.

Задача 8. Магазин планує продати товару 1 на x_1 тис грн., товару 2 на x_2 тис грн., причому планується закуповувати товару 1 не менше, ніж на 30 тис грн., товару 2 – не менше, ніж на 20 тис грн.. Враховуючи витрати на перевезення і зберігання, скласти план товарообороту, при якому буде отримано максимальний прибуток.

	Товар 1	Товар 2	Макс. допустимі витрати, тис. грн.
Транспортні витрати, %	3	1	1,5
Витрати на зберігання, %	1	2	1
Прибуток з одиниці, %	20	30	-

Загальні обмеження: $0,03x_1 + 0,01x_2 \leq 1,5$

$$0,01x_1 + 0,02x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 30, x_2 \geq 20$$

$$\max(f) = 0,2x_1 + 0,3x_2$$

Зводимо рівняння

$$\text{до канонічної форми} \begin{cases} 0,03x_1 + 0,01x_2 + x_3 = 1,5 \\ 0,01x_1 + 0,02x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 \geq 30, x_2 \geq 20, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(f) = 0,2x_1 + 0,3x_2$$

Запишемо рівняння у векторній формі: $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = P_0$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,01 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ТАБЛИЦЯ №1:

i	Базис	Сб	P ₀	0,2	0,3	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
1	P ₃	0	1,5	0,03	0,01	1	0
2	P ₄	0	1	0,01	0,02	0	1
Δ	-	-	0	-0,2	-0,3	0	0

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 12

Розв'язальний стовпчик – другий, $s = 2$. Шукаємо розв'язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$. $K_1 = \frac{a_{10}}{a_{12}} = \frac{1,5}{0,01} = 150$, $K_2 = \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{1}{0,02} = 50$.

Розв'язальний рядок – другий, $k = 2$.
Розв'язальний елемент a_{ks} : $a_{22} = 0,02$.

Заповнюємо нову таблицю. В ній розв'язальний стовпчик замінюється на такий базисний, де $a_{kj} = 1$ (див. схематичне зображення на таблиці №1).

ТАБЛИЦЯ №2.

i	Базис	Сб	P ₀	0,2	0,3	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
1	P ₃	0	1	0,025	0	1	-0,5
2	P ₂	0,3	50	0,5	1	0	50
Δ	-	-	15	- 0,05	0	0	15

Проводимо розрахунки елементів таблиці по формулах: $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{ks}}$, $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot a_{is}$.

$$a_{11} = a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 0,03 - \frac{0,01}{0,02} \cdot 0,01 = 0,025, \quad a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{0,01}{0,02} = 0,5,$$

$$a_{14} = a_{14} - \frac{a_{24}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 0 - \frac{1}{0,02} \cdot 0,01 = -0,5, \quad a_{24} = \frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{1}{0,02} = 50,$$

$$a_{10} = a_{10} - \frac{a_{20}}{a_{22}} \cdot a_{12} = 1,5 - \frac{1}{0,02} \cdot 0,01 = 1, \quad a_{20} = \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{1}{0,02} = 50.$$

Заповнюємо останній рядок по формулі: $\Delta_j = \Delta_j - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot \Delta_s$.

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = -0,2 - \frac{0,01}{0,02} \cdot (-0,3) = -0,05,$$

$$\Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{24}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{1}{0,02} \cdot (-0,3) = 15,$$

$$\Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{20}}{a_{22}} \cdot \Delta_2 = 0 - \frac{1}{0,02} \cdot (-0,3) = 15.$$

В таблиці №2 розв'язальний стовпчик – перший, $s = 1$.

Шукаємо розв'язальний рядок. Обчислюємо співвідношення $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$:

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{1}{0,025} = 40, \quad K_2 = \frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{50}{0,5} = 100.$$

Розв'язальний рядок – перший, $k=1$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 13

Розв'язальний елемент $a_{11} = 0,025$.

ТАБЛИЦЯ №3.

і	Базис	Сб	Р ₀	0,2	0,3	0	0
				Р ₁	Р ₂	Р ₃	Р ₄
1	P_1	0,2	40	1	0	40	-20
2	P_2	0,3	30	0	1	-20	60
Δ	-	-	17	0	0	2	14

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{1}{0,025} = 40, & a_{23} &= a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 0 - \frac{1}{0,025} \cdot 0,5 = -20, \\
 a_{14} &= \frac{a_{14}}{a_{11}} = \frac{-0,5}{0,025} = -20, & a_{24} &= a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 50 - \frac{-0,5}{0,025} \cdot 0,5 = 60, \\
 a_{10} &= \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{1}{0,025} = 40, & a_{20} &= a_{20} - \frac{a_{10}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 50 - \frac{1}{0,025} \cdot 0,5 = 30.
 \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \Delta_3 - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 0 - \frac{1}{0,025} \cdot (-0,05) = 2,$$

$$\Delta_4 = \Delta_4 - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 15 - \frac{-0,5}{0,025} \cdot (-0,05) = 14,$$

$$\Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{10}}{a_{11}} \cdot \Delta_1 = 15 - \frac{1}{0,025} \cdot (-0,05) = 17.$$

В останньому рядку таблиці №3 усі елементи невід'ємні, тому шукаємо невідомі у стовпчику Р₀: $x_1 = 40$, $x_2 = 30$. $\Delta_0 = 17$ – це значення максимуму цільової функції.

Відповідь: магазин продасть 1-го товару на 40 тис грн., 2-го товару – на 30 тис грн. При цьому прибуток магазину становитиме 17 тис грн.

3. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Задача 9. Для виготовлення виробів А, В, С підприємство використовує 3 види сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду продукції, ціна одного виробу та загальна кількість сировини подані у таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 виріб			Кількість сировини
	Виріб А	Виріб В	Виріб С	
Сировина І	34	15	12	376
Сировина ІІ	6	20	8	192
Сировина ІІІ	5	3	35	180
Ціна 1 виробу	9	10	16	-

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 14

Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виготовленої продукції буде максимальною. № - порядковий номер студента у журналі.

ВІДПОВІДЬ.

і	Базис	Сб	P ₀	9	10	16	0	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₁	10	7,13	1	0	0	0,035	-0,025	-0,006
2	P ₂	16	6,02	0	1	0	-0,009	0,058	-0,01
3	P ₃	0	3,61	0	0	1	-0,004	-0,001	0,02\
Δ	-	-	182,08	0	0	0	0,158	0,333	0,531

4. МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Задача 10.

Знайти максимум функції: $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$

Обмеження:
 $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24$
 $9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 24 \\ 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 &= 40 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 &= 10 \end{aligned}$$

Запишемо рівняння у векторній формі:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 = P_0$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} & P_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & P_3 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & P_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & P_0 &= \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Серед векторів P₁-P₆ тільки 2 одиничних, тому вводимо одиничний вектор P₇, якому відповідає коефіцієнт M у цільовій функції:

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$$

Складаємо ТАБЛИЦЮ №1:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 15

і	Базис	Сб	P ₀	2	-3	6	1	0	0	-M
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
1	P ₄	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P ₅	0	40	9	2	4	0	1	0	0
3	P ₇	-M	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4	-	-	24	0	4	-8	0	0	0	0
5	-	-	-10	-1	1	-2	0	0	1	0

У стовпчику Сб вказуються відповідні до номера базису коефіцієнти при змінних у цільовій функції. Проводимо розрахунки $\Delta_j = \sum_{i=1}^m Cb_i a_{ij} - c_j$.

$$\Delta_1 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 9 - M \cdot 1 - 2 = -M$$

$$\Delta_5 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - M \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - M \cdot (-1) + 3 = 4 + M$$

$$\Delta_6 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot (-1) - 0 = M$$

$$\Delta_3 = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 - M \cdot 2 - 6 = -8 - 2M$$

$$\Delta_7 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 1 + M = 0$$

$$\Delta_4 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - M \cdot 0 - 1 = 0$$

$$\Delta_0 = 1 \cdot 24 + 0 \cdot 40 - M \cdot 10 = 24 - M$$

На основі розрахунків заповнюється 4 та 5-й рядки: у 4-й рядок вписується вільний член, а у 5-й – коефіцієнт при М. Наприклад, у випадку $\Delta_0 = 24 - M$ у четвертий рядок вписується 24, а у п'ятий 1.

Шукаємо розв'язальний стовпчик: серед значень 4 та 5-го рядка стовпчиків P₁-P₇ вибираємо найменше і відповідний найменшому значенню стовпчик буде розв'язальним. Найменше значення -8 у третьому стовпчику, тому s=3.

Розв'язальний рядок шукається за допомогою формули: $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$ – серед значень K_i вибирається найменше по модулю і відповідний рядок буде розв'язальним.

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{13}} = \frac{24}{-2} = -12, K_2 = \frac{a_{20}}{a_{23}} = \frac{40}{4} = 10, K_3 = \frac{a_{30}}{a_{33}} = \frac{10}{2} = 5$$

Розв'язальний рядок – третій, k=3.

Заповнюємо таблицю №2. В ній розв'язальний стовпчик замінюється на такий базисний, де a_{kj} = 1. В нашому випадку елемент a_{3j} = 1 присутній в стовпчику P₇. В рядку „Базис” вписуємо P_s у рядку k, тобто P₃ вписується в 3-й рядок. Значення параметра Сб при цьому замінюється на відповідний коефіцієнт при x у цільовій функції (ці коефіцієнти вказані у верхній частині таблиці на сірому фоні).

ТАБЛИЦЯ №2:

і	Базис	Сб	P ₀	2	-3	6	1	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₄	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	P ₅	0	20	7	4	0	0	1	2
3	P ₃	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2
Δ	-	-	64	4	0	0	0	0	-4

Проводимо розрахунки елементів таблиці по формулах:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 16

- для елементів, які належать розв'язальному рядку: $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{ks}}$,

- для всіх інших елементів: $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \cdot a_{is}$.

$$a_{30} = \frac{a_{30}}{a_{33}} = \frac{10}{2} = 5, \quad a_{31} = \frac{a_{21}}{a_{23}} = \frac{1}{2}, \quad a_{32} = \frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_{36} = \frac{a_{36}}{a_{33}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$a_{10} = a_{10} - \frac{a_{30}}{a_{33}} \cdot a_{13} = 24 - \frac{10}{2} \cdot (-2) = 34, \quad a_{20} = a_{20} - \frac{a_{30}}{a_{33}} \cdot a_{13} = 40 - \frac{10}{2} \cdot 4 = 20.$$

$$a_{11} = a_{11} - \frac{a_{31}}{a_{33}} \cdot a_{13} = 2 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 3, \quad a_{21} = a_{21} - \frac{a_{31}}{a_{33}} \cdot a_{23} = 9 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 7,$$

$$a_{12} = a_{12} - \frac{a_{32}}{a_{33}} \cdot a_{13} = 1 - \frac{-1}{2} \cdot (-2) = 0, \quad a_{22} = a_{22} - \frac{a_{32}}{a_{33}} \cdot a_{23} = 2 - \frac{-1}{2} \cdot 4 = 4,$$

$$a_{16} = a_{16} - \frac{a_{36}}{a_{33}} \cdot a_{13} = 0 - \frac{-1}{2} \cdot (-2) = -1, \quad a_{26} = a_{26} - \frac{a_{36}}{a_{33}} \cdot a_{23} = 0 - \frac{-1}{2} \cdot 4 = 2.$$

$$\Delta_i = \Delta_i - \frac{a_{ki}}{a_{ks}} \cdot \Delta_s.$$

$$\Delta_0 = \Delta_0 - \frac{a_{30}}{a_{33}} \cdot \Delta_3 = 24 - \frac{10}{2} \cdot (-8) = 64, \quad \Delta_2 = \Delta_2 - \frac{a_{32}}{a_{33}} \cdot \Delta_3 = 4 - \frac{-1}{2} \cdot (-8) = 0$$

$$\Delta_1 = \Delta_1 - \frac{a_{31}}{a_{33}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-8) = 4, \quad \Delta_6 = \Delta_6 - \frac{a_{36}}{a_{33}} \cdot \Delta_3 = 0 - \frac{-1}{2} \cdot (-8) = -4$$

Оскільки в четвертому рядку таблиці присутні від'ємні значення, то проводимо розрахунки далі. Шукаємо розв'язальний стовпчик – серед значень 4-го рядка таблиці №2 вибирається найменше – це буде в 6-му рядку, $s=6$.

Розв'язальний рядок шукаємо за допомогою формули: $K_i = \frac{a_{i0}}{a_{is}}$ – серед значень K_i вибираємо найменше по модулю:

$$K_1 = \frac{a_{10}}{a_{16}} = \frac{34}{-1} = -34, \quad K_2 = \frac{a_{20}}{a_{26}} = \frac{20}{2} = 10, \quad K_3 = \frac{a_{30}}{a_{36}} = \frac{5}{-1/2} = -10$$

Оскільки третій рядок уже був розв'язальним, то вибираємо другий, $k=2$. Розв'язальний елемент $a_{26}=2$.

Заповнюємо таблицю №3. Розв'язальний стовпчик, тобто шостий, замінюємо на такий базисний, в якому $a_{kj} = 1$. $a_{2j} = 1$ присутній в стовпчику P_5 , тому переносимо значення з п'ятого стовпчика у шостий. В рядку „Базис” вписуємо P_5 у рядку k , тобто P_6 вписується в 2-й рядок. Значення параметра S_b при цьому замінюється на відповідний коефіцієнт при x у цільовій функції ($S_b = 0$).

ТАБЛИЦЯ №3.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 17

і	Базис	Сб	P ₀	2	-3	6	1	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₄	1	44	13/2	2	0	1	1/2	0
2	P ₆	0	10	7/2	2	0	0	1/2	1
3	P ₃	6	10	9/4	1/2	1	0	1/4	0
Δ	-	-	104	18	8	0	0	2	0

Проводимо розрахунки елементів таблиці №3:

$$\begin{aligned}
 a_{20} &= \frac{a_{20}}{a_{26}} = \frac{20}{2} = 10, & a_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{26}} = \frac{7}{2}, & a_{22} &= \frac{a_{22}}{a_{26}} = \frac{4}{2} = 2, & a_{25} &= \frac{a_{25}}{a_{26}} = \frac{1}{2}, \\
 a_{10} &= a_{10} - \frac{a_{20}}{a_{26}} \cdot a_{16} = 34 - \frac{20}{2} \cdot (-1) = 44, & a_{30} &= a_{30} - \frac{a_{20}}{a_{26}} \cdot a_{36} = 5 - \frac{20}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 20, \\
 a_{11} &= a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{26}} \cdot a_{16} = 3 - \frac{7}{2} \cdot (-1) = \frac{13}{2}, & a_{31} &= a_{31} - \frac{a_{21}}{a_{26}} \cdot a_{36} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}, \\
 a_{12} &= a_{12} - \frac{a_{22}}{a_{26}} \cdot a_{16} = 0 - \frac{4}{2} \cdot (-1) = 2, & a_{32} &= a_{32} - \frac{a_{22}}{a_{26}} \cdot a_{36} = -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\
 a_{15} &= a_{15} - \frac{a_{25}}{a_{26}} \cdot a_{16} = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}, & a_{35} &= a_{35} - \frac{a_{25}}{a_{26}} \cdot a_{36} = 0 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\
 \Delta_0 &= \Delta_0 - \frac{a_{20}}{a_{26}} \cdot \Delta_6 = 64 - \frac{20}{2} \cdot (-4) = 104, & \Delta_2 &= \Delta_2 - \frac{a_{22}}{a_{26}} \cdot \Delta_6 = 0 - \frac{4}{2} \cdot (-4) = 8, \\
 \Delta_1 &= \Delta_1 - \frac{a_{21}}{a_{26}} \cdot \Delta_6 = 4 - \frac{7}{2} \cdot (-4) = 18, & \Delta_5 &= \Delta_5 - \frac{a_{25}}{a_{26}} \cdot \Delta_6 = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 2.
 \end{aligned}$$

Оскільки усі елементи 4-го рядка невід'ємні, значить максимум знайдено. Значення невідомих – у стовпчику P₀, але якщо Сб_i = 0, то й x_i теж рівне 0. Згідно останньої таблиці x₁ = 0, x₂ = 0, x₃ = 10, x₄ = 44, x₅ = 0, x₆ = 10.

$$F_{\max} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 44 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 = 104.$$

5. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Задача 11.

Знайти мінімум функції:

Обмеження:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24$$

$$\begin{cases}
 F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \\
 (25 - \text{№}) + 2x_2 + 4x_3 \leq 40
 \end{cases}$$

№ - порядковий номер студента у журналі. У занятті розглянута дана задача для № 16.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 20

Сировина І	1,2	1,9	37
Сировина ІІ	2,3	1,8	57,6
Сировина ІІІ	0,1	0,7	7
Ціна 1 виробу	25000	50000	-

Позначимо кількість виробленої продукції 1-го виду через c_1 і 2-го виду через c_2 . Таким чином цільова функція матиме вигляд:

$$F(c_1, c_2) = 25000 \cdot c_1 + 50000 \cdot c_2$$

Вводимо обмеження:

$$\begin{aligned} 1,2 \cdot c_1 + 1,9 \cdot c_2 &\leq 37 \\ 2,3 \cdot c_1 + 1,8 \cdot c_2 &\leq 57,6 \\ 0,1 \cdot c_1 + 0,7 \cdot c_2 &\leq 7 \\ c_1 &\geq 0 \\ c_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Запускаємо програму EXCEL.

Послідовність виконання операцій:

1. В клітинку A1 вводимо цільову функцію $=25000 \cdot c_1 + 50000 \cdot c_2$
2. В клітинку A3 вводимо обмеження $=1,2 \cdot c_1 + 1,9 \cdot c_2$
3. В клітинку A4 вводимо обмеження $=2,3 \cdot c_1 + 1,8 \cdot c_2$
4. В клітинку A5 вводимо обмеження $=0,1 \cdot c_1 + 0,7 \cdot c_2$
5. В клітинку A6 вводимо обмеження $=c_1$
6. В клітинку A7 вводимо обмеження $=c_2$
7. У клітинки C1 і C2 записуємо початкові значення (нульові)
8. Виконуємо команду Сервіс / Розв'язувач.
9. У вікні Розв'язувач у полі Встановити цільову робимо посилання на A1, клацнувши лівою кнопкою миші по клітинці A1.
10. У полі вводу Змінюючи комірки робимо посилання на клітинки C1:C2 ал.3. Вікно Розв'язувач.
11. У поле вводу Обмеження треба ввести обмеження. Для цього натискаємо кнопку ДОДАТИ і з'явиться вікно ДОДАТИ ОБМЕЖЕННЯ. У поле вводу ПОСИЛАННЯ НА КОМІРКУ робимо посилання на A3, а в поле вводу ОБМЕЖЕННЯ число 37.
12. Так само виставляємо усі обмеження. Після вводу значень натискаємо кнопку ВИКОНАТИ. Програма відкриє вікно РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗУВАЧА.
13. В полі ЗВІТИ вибираємо РЕЗУЛЬТАТИ і натискаємо кнопку ОК.
14. На екрані у клітинці A1 з'явиться максимально можливий прибуток (846153,8), а в клітинках C1 та C2 - шукані обсяги виробництва продукції 19,3 та 7,2 (мал.1).

	A	B	C	D
1	846153,8		19,38462	
2			7,230769	
3	37			
4	57,6			
5	7			
6	19,38462			
7	7,230769			
8				

Мал. 1. Результати розв'язку.

8. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ПО ТЕМІ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Проводиться опитування по наступних запитаннях:

1. Як перейти від стандартної до канонічної задачі лінійного програмування?
2. Для чого використовується симплексний метод?
3. Доки проводяться розрахунки симплексних таблиць?
4. У яких випадках застосовується метод штучного базису?
5. Правила переходу від прямої до двоїстої задачі лінійного програмування.

9. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Нехай m постачальників має однорідну продукцію $A_1, A_2, \dots, A_m$. Продукцію необхідно доставити n споживачам у кількостях $B_1, B_2, \dots, B_n$. Усі відстані від постачальників i ($i = 1, 2, \dots, m$) до споживачів j ($j = 1, 2, \dots, n$) C_{ij} відомі, C_{ij} може означати також тариф перевезення від постачальника до споживача. Будь-який покупець може отримати товар від будь-якого постачальника. В цих умовах треба скласти план перевезень, щоб загальний вантажообіг був мінімальним.

Покупці Постач.	B_1	B_2	...	B_n
A_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	...	C_{1n} x_{1n}
A_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	...	C_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	...	C_{mn} x_{mn}

Задача 15. Потрібно перевезти однорідні товари від 2-х постачальників: Львівського та

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 22

Київського чотирьом гуртівням (А, В, С, D). Дано відстані від виробників до покупців (у сотнях км), запаси товару у виробників та потреби покупців. Розрахувати найменший план перевезень (у тонно-кілометрах).

Покупці Постач.	Гуртівня А 12 т	Гуртівня В 10 т	Гуртівня С 6 т	Гуртівня D 2 т
Львів 13 т.	17 X ₁₁	26 X ₁₂	28 X ₁₃	27 X ₁₄
Київ 17 т.	16 X ₂₁	22 X ₂₂	26 X ₂₃	21 X ₂₄

Цільова функція: $\min f = 17x_{11} + 26x_{12} + 28x_{13} + 27x_{14} + 16x_{21} + 22x_{22} + 26x_{23} + 21x_{24}$

Обмеження:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 13 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 17 \\ x_{11} + x_{21} &= 12 \\ x_{12} + x_{22} &= 10 \\ x_{13} + x_{23} &= 6 \\ x_{14} + x_{24} &= 2 \end{aligned}$$

Число обмежень має бути рівним $m + n - 1$ (у нашому випадку $2 + 4 - 1 = 5$), тому якесь з обмежень можна виключити (наприклад, перше).

Алгоритм розв'язання транспортної задачі

1. Вибір першого допустимого рішення – використовується метод мінімального елемента. У першу чергу заповнюються клітинки з найменшими відстанями.

ТАБЛИЦЯ 1.

	А 12 т	В 10 т	С 6 т	Д 2 т
Львів 13 т.	(2) - 17	(6) 7 26	(8) 6 28	(4) - 27
Київ 17 т.	(1) 12 16	(5) 3 22	(7) - 26	(3) 2 21

Послідовність заповнення таблиці за методом мінімального елемента (у дужках в таблиці зазначено послідовність кроків виконання):

- найменша відстань у клітинці a_{21} , тому заповнюємо найперше її. Проставляємо туди таке число, щоб по можливості максимально задовольнити вимогу відповідного покупця (у нашому випадку – А), $a_{21} = 12$.
- попит гуртівні А задоволений повністю, тому в клітинці a_{11} пусто.
- серед інших найменша відстань 21 у клітинці a_{24} , тому ставимо туди 2.
- попит D задоволений, тому у клітинці a_{14} пусто.
- найменша відстань у клітинці a_{22} , туди проставляємо товари, які залишились:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 23

$$17 - (12 + 2) = 3.$$

6. заповнюємо клітинку угорі a_{12} : $10 - 3 = 7$.
7. у 2-му ряді залишилась клітинка a_{23} – запаси повністю вичерпані, тому там пусто.
8. остання клітинка $a_{13} = 6$.

2. Перевірка на оптимальність.

Знайдено перший допустимий план перевезень, але він не обов'язково мусить бути оптимальним. Для перевірки плану на оптимальність треба ввести $m + n$ додаткових величин, які називають потенціалами.

ТАБЛИЦЯ 2.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т	U_m
Львів 13 т.	17 -	26 7	28 6	27 -	$U_1 = 0$
Київ 17 т.	16 12	22 3	26 -	21 2	$U_2 = -4$
V_n	$V_1 = 20$	$V_2 = 26$	$V_3 = 28$	$V_4 = 25$	

Потенціали визначаються так:

1. Для початку $U_1 = 0$ (у всіх випадках).
2. Сума потенціалів рядка та стовпчика має дорівнювати відстані (тарифу) – це числа на сірому фоні. Повинна виконуватися рівність $C_{mn} = U_m + V_n$. Спочатку визначається потенціал, що відповідає непорожній клітинці рядка 1. Можна взяти 2-ий стовпчик і визначити V_2 . $V_2 = 26 - 0 = 26$.
3. Далі розраховуємо потенціал для 3-го стовпчика: $V_3 = 28 - 0 = 28$.
4. Тепер розрахуємо потенціал 2-го рядка за допомогою клітинки a_{22} : $U_2 = 22 - 26 = -4$.
5. Можна визначити потенціал 1-го стовпчика: $V_1 = 16 - (-4) = 20$.
6. Залишився останній потенціал 4-го стовпчика: $V_4 = 21 - (-4) = 25$.

Кожна пуста клітинка перевіряється. Для цього з тарифу пустої клітинки віднімається сума потенціалів рядка і стовпчика, або $\alpha_{mn} = C_{mn} - (U_m + V_n)$.

1. $\alpha_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 17 - (20 + 0) = -3$;
2. $\alpha_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 27 - (25 + 0) = 2$;
3. $\alpha_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 26 - (28 - 4) = 2$.

Якщо серед результатів є від'ємні, то знайдений план не є оптимальним і треба зробити перепланування.

3. Перепланування.

Серед порожніх клітинок з від'ємним значенням різниці потенціалів вибирається та, у якій різниця α_{mn} є найменшою. Ця клітинка рекомендується до заповнення. У нашому випадку це буде клітинка a_{11} . Ця клітинка стає ненульовою, тобто в неї потрібно вписати число.

Методика перепланування така. В межах таблиці будується прямокутник, одна з вершин якого припадає на дану клітинку (a_{11}), а інші мусять попасти на заповнені клітинки

ТАБЛИЦЯ 3.

	A	B	C	D
--	----------	----------	----------	----------

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 24

	12 т	10 т	6 т	2 т
Львів 13 т.	- 17	7 26	6 28	- 27
Київ 17 т.	12 16	3 22	- 26	2 21

В клітинку a_{11} треба вписати додатне значення. Для цього із якоїсь сусідньої клітинки його треба відняти, враховуючи, що сума в рядках та стовпчиках зміниться. Для того, щоб вирівняти суму, це значення треба вирахувати також із другої сусідньої клітинки, але потрібно, щоб вона залишалася додатною. Тому серед цих двох сусідніх клітинок вибирається менше значення.

У нашій задачі сусідніми до a_{11} будуть a_{12} та a_{21} . Серед них менше значення в $a_{12} = 7$. Тому число 7 треба вирахувати з a_{12} і занести в a_{11} . Для того, щоб сума у стовпчику 1 залишалась 12 треба від a_{21} відняти 7. $a_{21} = 12 - 7 = 5$. Тепер, щоб вирівняти суму в рядку 2 необхідно це число 7 додати у клітинку a_{22} : $3 + 7 = 0$ (див. таблицю 4)

ТАБЛИЦЯ 4.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т
Львів 13 т.	7 17	- 26	6 28	- 27
Київ 17 т.	5 16	10 22	- 26	2 21

Знайдено новий допустимий план перевезень і його знову треба перевірити на оптимальність.

4. Перевірка на оптимальність.

Розраховуються потенціали (таблиця 5). Методика розрахунку наведена у пункті 2.

ТАБЛИЦЯ 5.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т	U_m
Львів 13 т.	7 17	- 26	6 28	- 27	$U_1 = 0$
Київ 17 т.	5 16	10 22	- 26	2 21	$U_2 = -1$
V_n	$V_1 = 17$	$V_2 = 23$	$V_3 = 28$	$V_4 = 22$	

Перевіряємо пусті клітинки:

- $\alpha_{mn} = C_{mn} - (U_m + V_n) = \alpha_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 26 - (23 + 0) = 3;$
- $\alpha_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 27 - (22 + 0) = 5;$
- $\alpha_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 26 - (28 - 1) = -1.$

Є від'ємний елемент, тому необхідне перепланування.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1		Арк 41 / 25

5. Перепланування.

Будуємо прямокутник по клітинках, однією з вершин є клітинка з мінімальним α_{mn} – це клітинка a_{23} , а інші вершини мають лежати на заповнених клітинках (a_{11} , a_{21} та a_{13}).

ТАБЛИЦЯ 6.

	А 12 т		В 10 т		С 6 т		D 2 т	
Львів 13 т.	7	17	-	26	6	28	-	27
Київ 17 т.	5	16	10	22	-	26	2	21

У порожню клітинку a_{23} треба внести додатнє значення. Серед сусідніх до a_{23} вершин прямокутника (a_{21} та a_{13}) менше значення має $a_{21} = 5$, тому 5 треба внести в a_{23} . Далі необхідно скоректувати значення так, щоб суми в рядках та стовпцях не змінилися. Нова таблиця буде виглядати так:

ТАБЛИЦЯ 7.

	А 12 т		В 10 т		С 6 т		D 2 т	
Львів 13 т.	12	17	-	26	1	28	-	27
Київ 17 т.	-	16	10	22	5	26	2	21

6. Перевірка на оптимальність.

Розраховуємо потенціали за відомою методикою.

ТАБЛИЦЯ 8.

	А 12 т		В 10 т		С 6 т		D 2 т		U _m
Львів 13 т.	12	17	-	26	1	28	-	27	U ₁ = 0
Київ 17 т.	-	16	10	22	5	26	2	21	U ₂ = -2
V _n	V ₁ = 17		V ₂ = 24		V ₃ = 28		V ₄ = 23		

Перевіряємо пусті клітинки:

- $\alpha_{mn} = C_{mn} - (U_m + V_n) = \alpha_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 26 - (24 + 0) = 2;$
- $\alpha_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 27 - (23 + 0) = 4;$
- $\alpha_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 16 - (17 - 2) = 1.$

Від'ємних елементів немає, тому план є оптимальним.

$$\min f = 12 \cdot 17 + 1 \cdot 28 + 10 \cdot 22 + 5 \cdot 26 + 2 \cdot 21 = 624 \text{ або } 62400 \text{ тонно-кілометрів.}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 26

Задача 16. Розв’язати попередню задачу, використовуючи метод північно-західного кута для вибору першого допустимого рішення. Порівняти отриманий результат з попередньою задачею.

Згідно методу північно-західного кута, у першу чергу заповнюємо клітинку a_{11} . Проставляємо туди число таке, щоб максимально задовольнити вимогу першого споживача (12). У Львівського постачальника є в наявності 13 тонн товару, тому лишню тонну записуємо наступному споживачеві у клітинку a_{12} . Запаси Львівського постачальника вичерпані, тому в клітинках a_{13} і a_{14} пусто.

Далі заповнюється 2-й ряд. Потреби першого споживача задоволені, тому в клітинці a_{21} пусто. В клітинку a_{22} ставиться 9, щоб задовольнити потреби 2-го споживача. В a_{23} вписується 6 і останні 2 тонни в клітинку a_{24} (ТАБЛИЦЯ 1).

ТАБЛИЦЯ 1.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т	U_m
Львів 13 т.	12 17	1 26	- 28	- 27	$U_1 = 0$
Київ 17 т.	- 16	9 22	6 26	2 21	$U_2 = -4$
V_n	$V_1 = 17$	$V_2 = 26$	$V_3 = 31$	$V_4 = 25$	

Розв’язується дана задача так само, як і попередня, за допомогою потенціалів.

Перевіряємо пусті клітинки:

- $\alpha_{mn} = C_{mn} - (U_m + V_n)$; $\alpha_{13} = 28 - (31 + 0) = -3$;
- $\alpha_{14} = 27 - (25 + 0) = 2$;
- $\alpha_{21} = 16 - (17 - 4) = 3$.

Від’ємні елементи є, тому потрібне перепланування.

Нова таблиця буде мати такий вигляд:

ТАБЛИЦЯ 2.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т	U_m
Львів 13 т.	12 17	- 26	1 28	- 27	$U_1 = 0$
Київ 17 т.	- 16	10 22	5 26	2 21	$U_2 = -2$
V_n	$V_1 = 17$	$V_2 = 24$	$V_3 = 28$	$V_4 = 23$	

Перевірка пустих клітинок:

- $\alpha_{12} = 26 - (24 + 0) = 2$;
- $\alpha_{14} = 27 - (23 + 0) = 4$;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 27

3. $\alpha_{21} = 16 - (17 - 2) = 1.$

Від’ємних елементів немає, тому план є оптимальним.

$\min f = 12 \cdot 17 + 1 \cdot 28 + 10 \cdot 22 + 5 \cdot 26 + 2 \cdot 21 = 624$ або 62400 тонно-кілометрів.

Розв’язок задачі такий самий, як і в попередньої.

Задача 17. Чотири магазини отримують товар з двох гуртівень. Перша гуртівня може відвантажити в день 8,5 тонн товару, а друга – 5,5 тонн. Добові потреби магазинів у товарі складають 3, 5, 2 і 4 тонни. Вартість перевезень однієї тонни товару (у сотнях гривень) від гуртівень до магазинів подана у таблиці.

Покупці Постач.	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4
Гуртівня 1	2 x ₁₁	3 x ₁₂	5 x ₁₃	4 x ₁₄
Гуртівня 2	4 x ₂₁	2 x ₂₂	3 x ₂₃	5 x ₂₄

Скласти план перевезень з найменшими транспортними витратами.

Обчислювати вартість перевезень для кожного з допустимих планів.

Цільова функція: $\min f = 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24}$

Вибір першого допустимого рішення робимо за методом північно-західного кута, оскільки у таблиці присутні два однакових мінімальних тарифи, і тому метод мінімального елемента застосувати не можна.

ТАБЛИЦЯ 1.

	Магазин 1 3 т	Магазин 2 5 т	Магазин 3 2 т	Магазин 4 4 т	U _m
Гуртівня 1 8,5 т	2 3	3 5	5 0,5	4 -	U ₁ = 0
Гуртівня 2 5,5 т	4 -	2 -	3 1,5	5 4	U ₂ = -2
V _n	V ₁ = 2	V ₂ = 3	V ₃ = 5	V ₄ = 7	

4. $\alpha_{14} = 4 - (7 + 0) = -3;$

5. $\alpha_{21} = 4 - (2 - 2) = 4;$

6. $\alpha_{23} = 2 - (3 - 2) = 1.$

$\min f = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 4 = 48.$

ТАБЛИЦЯ 2.

	Магазин 1 3 т	Магазин 2 5 т	Магазин 3 2 т	Магазин 4 4 т	U _m
Гуртівня 1 8,5 т	2 3	3 5	5 -	4 0,5	U ₁ = 0

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1			Арк 41 / 28

Гуртівня 2 5,5 т	-	4	-	2	2	3	3,5	5	$U_2 = 1$
Vn	$V_1 = 2$		$V_2 = 3$		$V_3 = 2$		$V_4 = 4$		

1. $\alpha_{13} = 5 - (2 + 0) = 3;$
2. $\alpha_{21} = 4 - (2 + 1) = 1;$
3. $\alpha_{23} = 2 - (3 + 1) = -2.$

$$\min f = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3,5 = 46,5.$$

ТАБЛИЦЯ 3.

	Магазин 1 3 т	Магазин 2 5 т	Магазин 3 2 т	Магазин 4 4 т	Um
Гуртівня 1 8,5 т	3	1,5	-	4	$U_1 = 0$
Гуртівня 2 5,5 т	-	3,5	2	-	$U_2 = -1$
Vn	$V_1 = 2$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 4$	

4. $\alpha_{13} = 5 - (4 + 0) = 1;$
5. $\alpha_{21} = 4 - (2 - 1) = 3;$
6. $\alpha_{24} = 5 - (4 - 1) = 2.$

Даний план є оптимальним.

$$\min f = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1,5 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 2 = 39,5 \text{ (або 3950 грн.)}$$

Задача 18. Розв'язати транспортну задачу: 1) використовуючи метод північно-західного кута; 2) використовуючи метод мінімального елемента. Порівняти оптимальні плани двох задач.

	4	3	2	3
4	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
8	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}

1) Метод північно-західного кута.

ТАБЛИЦЯ №1.

	4	3	2	3	Um
4	4	0	-	-	$U_1 = 0$
8		6	3	5	$U_2 = 5$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 29

	–	3	2	3	
Vn	$V_1 = 4$	$V_2 = 1$	$V_3 = -2$	$V_4 = 0$	

Оскільки $m + n - 1 = 5$, а кількість заповнених клітинок рівна 4, то даний план є виродженим, тому вводимо 0 у порожню клітинку (бажано з найменшим тарифом).

$$\alpha_{13} = 8 - (-2 + 0) = 10; \quad \alpha_{14} = 7 - 0 = 7; \quad \underline{\alpha_{21} = 2 - (4 + 5) = -7}.$$

ТАБЛИЦЯ №2.

	4	3	2	3	U_m
4	1 4	3 1	– 8	– 7	$U_1 = 0$
8	3 2	– 6	2 3	3 5	$U_2 = -2$
Vn	$V_1 = 4$	$V_2 = 1$	$V_3 = 5$	$V_4 = 7$	

$$\alpha_{13} = 8 - (5 + 0) = 3; \quad \alpha_{14} = 7 - (7 + 0) = 0; \quad \alpha_{22} = 6 - (1 - 2) = 7.$$

Даний план є оптимальним, $\min f = 34$.

2) Метод мінімального елемента.

ТАБЛИЦЯ №1.

	4	3	2	3	U_m
4	– 4	3 1	– 8	1 7	$U_1 = 0$
8	4 2	– 6	2 3	2 5	$U_2 = -2$
Vn	$V_1 = 4$	$V_2 = 1$	$V_3 = 5$	$V_4 = 7$	

$$\alpha_{11} = 4 - (4 + 0) = 0; \quad \alpha_{13} = 8 - (5 + 0) = 3; \quad \alpha_{22} = 6 - (1 - 2) = 7.$$

Даний план є оптимальним, $\min f = 34$.

Хоча кінцеві плани задачі є різними, мінімуму досягається у двох випадках.

10. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Задача 19. Скласти план перевезень з мінімальним вантажообігом, використовуючи метод

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 30

північно-західного кута для розв'язання транспортної задачі. Відстані подані у сотнях кілометрів, вантажі у тонах.

Покупці Поставн.	Покупець В1 136	Покупець В2 96	Покупець В3 256	Покупець В4 160
Завод А1 216	7 X₁₁	8 X₁₂	1 X₁₃	2 X₁₄
Завод А2 286	4 X₂₁	5 X₂₂	9 X₂₃	8 X₂₄
Завод А3 146	9 X₃₁	2 X₃₂	3 X₃₃	6 X₃₄

Розв'язок задачі 19, винесеної на домашнє завдання.

ТАБЛИЦЯ 1.

	В1 136	В2 96	В3 256	В4 160	U_m
А1 216	7 136	8 80	1 —	2 —	U ₁ = 0
А2 286	4 —	5 16	9 256	8 14	U ₂ = -3
А3 146	9 —	2 —	3 —	6 146	U ₃ = -5
V_n	V ₁ = 7	V ₂ = 8	V ₃ = 12	V ₄ = 11	

$$\alpha_{13} = 1 - (12 + 0) = -12; \quad \alpha_{14} = 2 - (11 + 0) = -9; \quad \alpha_{21} = 4 - (7 - 3) = 0;$$

$$\alpha_{31} = 9 - (7 - 5) = 7; \quad \alpha_{32} = 2 - (8 - 5) = -1; \quad \alpha_{33} = 3 - (12 - 5) = -4.$$

ТАБЛИЦЯ 2.

	В1 136	В2 96	В3 256	В4 160	U_m
А1 216	7 136	8 —	1 80	2 —	U ₁ = 0
А2 286	4 —	5 96	9 176	8 14	U ₂ = 8
А3 146	9 —	2 —	3 —	6 146	U ₃ = 6
V_n	V ₁ = 7	V ₂ = -3	V ₃ = 1	V ₄ = 0	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1		Арк 41 / 31

$$\alpha_{12} = 8 - (-3 + 0) = 11; \quad \alpha_{14} = 2 - 0 = 2; \quad \underline{\alpha_{21} = 4 - (7 + 8) = -9};$$

$$\alpha_{31} = 9 - (7 + 6) = -4; \alpha_{32} = 2 - (-3 + 6) = -1; \quad \alpha_{33} = 3 - (1 + 6) = -4.$$

ТАБЛИЦЯ 3.

	B1 136	B2 96	B3 256	B4 160	U_m
A1 216	— 7	— 8	216 1	— 2	U ₁ = 0
A2 286	136 4	96 5	40 9	14 8	U ₂ = 8
A3 146	— 9	— 2	— 3	146 6	U ₃ = 6
V_n	V ₁ = -4	V ₂ = -3	V ₃ = 1	V ₄ = 0	

$$\alpha_{11} = 7 - (-4 + 0) = 11; \quad \alpha_{12} = 8 - (-3 + 0) = 11; \quad \alpha_{14} = 2 - 0 = 2;$$

$$\alpha_{31} = 9 - (6 - 4) = 7; \quad \alpha_{32} = 2 - (-3 + 6) = -1; \quad \underline{\alpha_{33} = 3 - (1 + 6) = -4}.$$

ТАБЛИЦЯ 4.

	B1 136	B2 96	B3 256	B4 160	U_m
A1 216	— 7	— 8	216 1	— 2	U ₁ = 0
A2 286	136 4	96 5	— 9	54 8	U ₂ = 4
A3 146	— 9	— 2	40 3	106 6	U ₃ = 2
V_n	V ₁ = 0	V ₂ = 1	V ₃ = 1	V ₄ = 4	

$$\alpha_{11} = 7 - 0 = 7; \quad \alpha_{12} = 8 - (1 + 0) = 7; \quad \underline{\alpha_{14} = 2 - (4 + 0) = -2};$$

$$\alpha_{23} = 9 - (1 + 4) = 5; \quad \alpha_{31} = 9 - (2 + 0) = 7; \quad \alpha_{32} = 2 - (1 + 2) = -1.$$

ТАБЛИЦЯ 5.

	B1 136	B2 96	B3 256	B4 160	U_m
A1 216	— 7	— 8	110 1	106 2	U ₁ = 0
A2 286	136 4	96 5	— 9	54 8	U ₂ = 6
A3 146	— 9	— 2	146 3	— 6	U ₃ = 2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 32

V_n	V₁ = -2	V₂ = -1	V₃ = 1	V₄ = 2	
----------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	--------------------------	--

$$\alpha_{11} = 7 - (-2 + 0) = 9; \alpha_{12} = 8 - (-1 + 0) = 9; \alpha_{23} = 9 - (1 + 6) = 2;$$

$$\alpha_{31} = 9 - (-2 + 2) = 9; \alpha_{32} = 2 - (-1 + 2) = 1; \quad \alpha_{34} = 6 - (2 + 2) = 2.$$

Даний план є оптимальним.

$$\min f = 1 \cdot 110 + 2 \cdot 106 + 4 \cdot 136 + 5 \cdot 96 + 8 \cdot 54 + 3 \cdot 146 = 2216.$$

11. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант А.

- Правила переходу від стандартної до канонічної задачі лінійного програмування.
- З якою метою проводяться розрахунки транспортної задачі.
- Скласти план перевезень з мінімальним вантажообігом, використовуючи метод мінімального елемента для розв'язання транспортної задачі. Відстані подані у сотнях кілометрів, вантажі у тоннах.

Покупці Поставн.	Покупець В1 50	Покупець В2 80	Покупець В3 100	Покупець В4 70
Завод А1 45	6 X ₁₁	28 X ₁₂	53 X ₁₃	22 X ₁₄
Завод А2 65	4 X ₂₁	26 X ₂₂	50 X ₂₃	19 X ₂₄
Завод А3 190	18 X ₃₁	20 X ₃₂	54 X ₃₃	24 X ₃₄

Варіант Б.

- З якою метою проводяться розрахунки симплексним методом.
- Правила переходу від прямої до двоїстої задачі лінійного програмування.
- Скласти план перевезень з мінімальним вантажообігом, використовуючи метод північно-західного кута для розв'язання транспортної задачі. Відстані подані у сотнях кілометрів, вантажі у тоннах.

Покупці Поставн.	Покупець В1 50	Покупець В2 80	Покупець В3 100	Покупець В4 70
Завод А1 100	6 X ₁₁	28 X ₁₂	53 X ₁₃	22 X ₁₄
Завод А2 50	4 X ₂₁	26 X ₂₂	50 X ₂₃	19 X ₂₄
Завод А3	18	20	54	24

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 33

150	X ₃₁	X ₃₂	X ₃₃	X ₃₄
-----	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Варіант В.

1. У яких випадках використовується метод штучного базису.
2. Як здійснюється перевірка на оптимальність плану у транспортній задачі?
3. Скласти план перевезень з мінімальними витратами, використовуючи метод мінімального елемента для розв'язання транспортної задачі. Витрати на перевезення подані у сотнях гривень, вантажі у тоннах.

Покупці Поставн.	Покупець В1 50	Покупець В2 80	Покупець В3 100	Покупець В4 70
Завод А1 45	6 X ₁₁	28 X ₁₂	53 X ₁₃	22 X ₁₄
Завод А2 65	4 X ₂₁	26 X ₂₂	50 X ₂₃	19 X ₂₄
Завод А3 190	18 X ₃₁	20 X ₃₂	54 X ₃₃	24 X ₃₄

Варіант Г.

1. У чому полягає суть симплексного методу.
2. Правила переходу від прямої до двоїстої задачі лінійного програмування.
3. Скласти план перевезень з мінімальними витратами, використовуючи метод північно-західного кута для розв'язання транспортної задачі. Витрати подані у сотнях гривень, вантажі у тоннах.

Покупці Поставн.	Покупець В1 50	Покупець В2 80	Покупець В3 100	Покупець В4 70
Завод А1 100	6 X ₁₁	28 X ₁₂	53 X ₁₃	22 X ₁₄
Завод А2 50	4 X ₂₁	26 X ₂₂	50 X ₂₃	19 X ₂₄
Завод А3 150	18 X ₃₁	20 X ₃₂	54 X ₃₃	24 X ₃₄

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ВАРІАНТИ А, В.

ТАБЛИЦЯ 1.

	50	80	100	70	U _m
--	----	----	-----	----	----------------

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1			Арк 41 / 34

45	6 —	28 —	53 —	22 45	$U_1 = 0$
65	4 50	26 —	50 —	19 15	$U_2 = -3$
190	18 —	20 80	54 100	24 10	$U_3 = 2$
Vn	$V_1 = 7$	$V_2 = 18$	$V_3 = 52$	$V_4 = 22$	

$$\alpha_{11} = 6 - (7 + 0) = -1; \quad \alpha_{12} = 28 - (18 + 0) = 10; \quad \alpha_{13} = 53 - (52 + 0) = 1;$$

$$\alpha_{22} = 26 - (18 - 3) = 11; \quad \alpha_{23} = 50 - (52 - 3) = 1; \quad \alpha_{31} = 18 - (7 + 2) = 9.$$

$$\min f = 8715.$$

ТАБЛИЦЯ 2.

	50	80	100	70	Um
45	6 45	28 —	53 —	22 —	$U_1 = 0$
65	4 5	26 —	50 —	19 60	$U_2 = -2$
190	18 —	20 80	54 100	24 10	$U_3 = 3$
Vn	$V_1 = 6$	$V_2 = 13$	$V_3 = 47$	$V_4 = 17$	

$$\alpha_{12} = 28 - (17 + 0) = 11; \quad \alpha_{13} = 53 - (51 + 0) = 2; \quad \alpha_{14} = 22 - (21 + 0) = 1;$$

$$\alpha_{22} = 26 - (17 - 2) = 11; \quad \alpha_{23} = 50 - (51 - 2) = 1; \quad \alpha_{31} = 18 - (6 + 3) = 9.$$

Даний план є оптимальним. $\min f = 270 + 20 + 1140 + 1600 + 5400 + 240 = 8670.$

ВАРІАНТИ Б, Г.

ТАБЛИЦЯ 1.

	50	80	100	70	Um
100	6 50	28 50	53 —	22 —	$U_1 = 0$
50	4 —	26 30	50 20	19 —	$U_2 = -2$
150	18 —	20 —	54 80	24 70	$U_3 = 2$
Vn	$V_1 = 6$	$V_2 = 28$	$V_3 = 52$	$V_4 = 22$	

$$\alpha_{13} = 53 - (52 + 0) = 1; \quad \alpha_{14} = 22 - (22 + 0) = 0; \quad \alpha_{21} = 4 - (6 - 2) = 0;$$

$$\alpha_{24} = 19 - (22 - 2) = -1; \quad \alpha_{31} = 18 - (6 + 2) = 10; \quad \alpha_{32} = 20 - (28 + 2) = -10.$$

$$\min f = 9480.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015				Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1				Арк 41 / 35

ТАБЛИЦЯ 2.

	50	80	100	70	U _m
100	50 6	50 28	– 53	– 22	U ₁ = 0
50	– 4	– 26	50 50	– 19	U ₂ = –12
150	– 18	30 20	50 54	70 24	U ₃ = –8
V _n	V ₁ = 6	V ₂ = 28	V ₃ = 62	V ₄ = 32	

$$\alpha_{13} = 53 - (62 + 0) = -9; \quad \alpha_{14} = 22 - (32 + 0) = -10; \quad \alpha_{21} = 4 - (6 - 12) = 10;$$

$$\alpha_{22} = 26 - (28 - 12) = 10; \quad \alpha_{24} = 19 - (32 - 12) = -1; \quad \alpha_{31} = 18 - (6 - 8) = 20.$$

ТАБЛИЦЯ 3.

	50	80	100	70	U _m
100	50 6	– 28	– 53	50 22	U ₁ = 0
50	– 4	– 26	50 50	– 19	U ₂ = –2
150	– 18	80 20	50 54	20 24	U ₃ = 2
V _n	V ₁ = 6	V ₂ = 18	V ₃ = 52	V ₄ = 22	

$$\alpha_{12} = 28 - (18 + 0) = 10; \quad \alpha_{13} = 53 - (52 + 0) = 1; \quad \alpha_{21} = 4 - (6 - 2) = 0;$$

$$\alpha_{22} = 26 - (18 - 2) = 10; \quad \alpha_{24} = 19 - (22 - 2) = -1; \quad \alpha_{31} = 18 - (6 + 2) = 10.$$

ТАБЛИЦЯ 4.

	50	80	100	70	U _m
100	50 6	– 28	– 53	50 22	U ₁ = 0
50	– 4	– 26	30 50	20 19	U ₂ = –3
150	– 18	80 20	70 54	– 24	U ₃ = 1
V _n	V ₁ = 6	V ₂ = 19	V ₃ = 53	V ₄ = 22	

$$\alpha_{12} = 28 - (19 + 0) = 9; \quad \alpha_{13} = 53 - (53 + 0) = 0; \quad \alpha_{21} = 4 - (6 - 3) = 1;$$

$$\alpha_{22} = 26 - (19 - 3) = 10; \quad \alpha_{31} = 18 - (6 + 1) = 9; \quad \alpha_{34} = 24 - (22 + 1) = 1.$$

Даний план є оптимальним. $\min f = 300 + 1100 + 1500 + 380 + 1600 + 3780 = 8660$.

12. НЕЗБАЛАНСОВАНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Якщо сумарні запаси товарів на складах постачальників не співпадають з потребами покупців, то йде мова про незбалансовану транспортну задачу. Якщо запаси виробників є більшими за потреби покупців, то задачу штучно зводять до збалансованої шляхом введення умовного покупця, якому формально призначають усі надлишки товарів. Якщо запаси є меншими, то відповідно вводиться умовний виробник, якому призначають недостачу товарів.

Задача 20. Потрібно перевезти однорідні товари від 2-х постачальників: Львівського та Київського чотирьом гуртівням (А, В, С, D). Дано відстані від виробників до покупців (у сотнях км), запаси товару у виробників та потреби покупців. Розрахувати найменший план перевезень (у тонно-кілометрах).

Покупці Постач.	Гуртівня А 12 т	Гуртівня В 10 т	Гуртівня С 6 т	Гуртівня D 2 т
Львів 20 т.	17 X ₁₁	26 X ₁₂	28 X ₁₃	27 X ₁₄
Київ 30 т.	16 X ₂₁	22 X ₂₂	26 X ₂₃	21 X ₂₄

Вводимо у таблицю додатковий стовпчик для умовного покупця. Тарифи цього покупця призначаються нульовими.

В незбалансованих транспортних задачах при виборі першого допустимого плану за методом мінімального елемента перевезення умовного споживача доцільно заповнювати в останню чергу, не дивлячись на мінімальний тариф. Тому перший допустимий план буде таким:

ТАБЛИЦЯ 1.

	А 12 т	В 10 т	С 6 т	D 2 т	Умовний споживач	U _m
Львів 20 т.	17 -	26 0	28 -	27 -	0 20	U ₁ = 0
Київ 30 т.	16 12	22 10	26 6	21 2	0 -	U ₂ = -4
V _n	V ₁ = 20	V ₂ = 26	V ₃ = 30	V ₄ = 25	V ₅ = 0	

Якщо кількість заповнених клітинок є меншою від $m + n - 1$, то такий план називається виродженим і для нього не можна розрахувати потенціали. Тому вводимо у будь-яку порожню клітинку (рекомендовано з мінімальним тарифом) нульове перевезення, наприклад, в a_{12} . Тепер можна розрахувати потенціали і перевірити даний план на оптимальність

7. $\alpha_{11} = 17 - (20 + 0) = -3;$

8. $\alpha_{12} = 30 - (28 + 0) = 2;$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 37

9. $\alpha_{14} = 27 - (25 + 0) = 2;$

10. $\alpha_{25} = 0 - (0 - 4) = 4.$

План не є оптимальним, необхідне перепланування.

ТАБЛИЦЯ 2.

	A 12 т	B 10 т	C 6 т	D 2 т	Умовний споживач	Um
Львів 20 т.	17 0	26 -	28 -	27 -	0 20	U ₁ = 0
Київ 30 т.	16 12	22 10	26 6	21 2	0 -	U ₂ = -1
V_n	V ₁ = 17	V ₂ = 23	V ₃ = 27	V ₄ = 22	V ₅ = 0	

1. $\alpha_{12} = 26 - (23 + 0) = 3;$

2. $\alpha_{13} = 28 - (27 + 0) = 1;$

3. $\alpha_{14} = 27 - (22 + 0) = 5;$

4. $\alpha_{25} = 0 - (0 - 1) = 1.$

Від’ємних значень немає, тому даний план вважається оптимальним. Він рекомендує усі фактичні поставки робити від Київського виробника, так як у цьому випадку транспортні витрати будуть мінімальними і складуть:

$$\min f = 16 \cdot 12 + 22 \cdot 10 + 26 \cdot 6 + 21 \cdot 2 = 610 \text{ (або 61000 тоннокілометрів).}$$

Задача 21. Чотири магазини отримують товар з двох гуртівень. Перша гуртівня може відвантажити в день 5 тонн товару, а друга – 3 тонни. Добові потреби магазинів у товарі складають 3, 5, 2 і 4 тонни. Вартість перевезень однієї тонни товару (у сотнях гривень) від гуртівень до магазинів подана у таблиці.

Покупці Постач.	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4
Гуртівня 1	2 x ₁₁	3 x ₁₂	5 x ₁₃	4 x ₁₄
Гуртівня 2	4 x ₂₁	2 x ₂₂	3 x ₂₃	5 x ₂₄

Розв’язати незбалансовану транспортну задачу – скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами, використовуючи метод північно-західного кута для вибору першого допустимого плану.

Вводимо у задачу умовного продавця, якому призначимо перевезення, яких не стає, щоб задовільнити усіх покупців: $(3 + 5 + 2 + 4) - (5 + 3) = 6.$

ТАБЛИЦЯ 1.

	Магазин 1 3 т	Магазин 2 5 т	Магазин 3 2 т	Магазин 4 4 т	U _m
Гуртівня 1 5 т	2 3	3 2	5 -	4 -	U ₁ = 0
Гуртівня 2 3 т	4 -	2 3	3 0	5 -	U ₂ = -1
Умовний продавець 6 т	0 -	0 -	0 2	0 4	U ₃ = -4
V _n	V ₁ = 2	V ₂ = 3	V ₃ = 4	V ₄ = 4	

Проводимо перевірку плану на оптимальність:

1. $\alpha_{13} = 5 - (4 + 0) = 1$;
2. $\alpha_{14} = 4 - (4 + 0) = 0$;
3. $\alpha_{21} = 4 - (2 - 1) = 3$;
4. $\alpha_{24} = 5 - (4 - 1) = 2$;
5. $\alpha_{31} = 0 - (2 - 4) = 2$;
6. $\alpha_{21} = 0 - (4 - 4) = 1$.

Даний план є оптимальним.

$\min f = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18$ (або 1800 гривень).

Третій і четвертий магазини не будуть забезпечені товарами, оскільки вартість перевезень до них не є економічно вигідною.

Задача 22. Скласти оптимальний план перевезень в умовах переважання пропозиції, використовуючи метод мінімального елемента для знаходження першого допустимого плану транспортної задачі. Відстані (у сотнях кілометрів) та вантажі (у тоннах) задані у таблиці.

Покупці Постач.	Покупець В1 50	Покупець В2 80	Покупець В3 100	Покупець В4 70
Завод А1 90	6 X ₁₁	28 X ₁₂	53 X ₁₃	22 X ₁₄
Завод А2 160	4 X ₂₁	26 X ₂₂	50 X ₂₃	19 X ₂₄
Завод А3 200	18 X ₃₁	20 X ₃₂	54 X ₃₃	24 X ₃₄

Заповнюємо таблицю методом мінімального елемента. Оскільки пропозиції продавців перевищують потреби покупців, то у таблицю вводиться додатковий стовпчик умовного

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 39

споживача, якому призначаються надлишкові товари.

ТАБЛИЦЯ 1.

	50	80	100	70	Ум. спож.	Um
90	6 —	28 —	53 60	22 —	0 30	$U_1 = 0$
160	4 50	26 —	50 40	19 70	0 —	$U_2 = -3$
200	18 —	20 80	54 —	24 —	0 120	$U_3 = 0$
Vn	$V_1 = 7$	$V_2 = 20$	$V_3 = 53$	$V_4 = 22$	$V_5 = 0$	

Даний план не є виродженим, оскільки кількість заповнених клітинок дорівнює $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= 6 - (7 + 0) = -1; & \alpha_{12} &= 28 - (20 + 0) = 8; & \alpha_{14} &= 22 - (22 + 0) = 0; \\ \alpha_{22} &= 26 - (20 - 3) = 9; & \alpha_{25} &= 0 - (0 - 3) = 3; \\ \alpha_{31} &= 18 - (7 + 0) = 11; & \alpha_{33} &= 54 - (53 + 0) = 1; & \alpha_{34} &= 24 - (22 + 0) = 2. \\ \min f &= 8310.\end{aligned}$$

ТАБЛИЦЯ 2.

	50	80	100	70	Ум. спож.	Um
90	6 50	28 —	53 10	22 —	0 30	$U_1 = 0$
160	4 —	26 —	50 90	19 70	0 —	$U_2 = -3$
200	18 —	20 80	54 —	24 —	0 120	$U_3 = 0$
Vn	$V_1 = 6$	$V_2 = 20$	$V_3 = 53$	$V_4 = 22$	$V_5 = 0$	

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= 28 - (20 + 0) = 8; & \alpha_{14} &= 22 - (22 + 0) = 0; \\ \alpha_{21} &= 4 - (6 - 3) = 1; & \alpha_{22} &= 26 - (20 - 3) = 9; & \alpha_{25} &= 0 - (0 - 3) = 3; \\ \alpha_{31} &= 18 - (6 + 0) = 12; & \alpha_{33} &= 54 - (53 + 0) = 1; & \alpha_{34} &= 24 - (22 + 0) = 2.\end{aligned}$$

Даний план є оптимальним: $\min f = 8260$.

13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМИ MS EXCEL

Задача 23. Потрібно перевезти вантаж з трьох складів двом споживачам. Першому

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 40

споживачу треба доставити 45 одиниць товару, другому – 79 одиниць. Розподіл вантажів на складах та вартість перевезень від складів до споживачів наведена у таблиці. Скласти оптимальний план перевезень.

Покупці Склади	45	79
18	17 с1	6 с4
75	12 с2	13 с5
31	9 с3	8 с6

с1-с6 – шукані величини вантажів, які треба перевезти.

Цільова функція буде мати вигляд:

$$F(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = 17 \cdot c_1 + 12 \cdot c_2 + 9 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 + 13 \cdot c_5 + 8 \cdot c_6.$$

Запишемо обмеження:

$$\begin{aligned} c_1 + c_4 &= 18 & c_1 &\geq 0 \\ c_2 + c_5 &= 75 & c_2 &\geq 0 \\ c_3 + c_6 &= 31 & c_3 &\geq 0 \\ c_4 &\geq 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 45 & c_5 &\geq 0 \\ c_4 + c_5 + c_6 &= 79 & c_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Запускаємо програму EXCEL.

Послідовність виконання дій:

1. У клітинку A1 вводимо цільову функцію $=17 \cdot c_1 + 12 \cdot c_2 + 9 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 + 13 \cdot c_5 + 8 \cdot c_6$
2. В клітинку A3 вводимо обмеження $= c_1 + c_4$
3. В клітинку A4 вводимо обмеження $= c_2 + c_5$
4. В клітинку A5 вводимо обмеження $= c_3 + c_6$
5. В клітинку A6 вводимо обмеження $= c_1 + c_2 + c_3$
6. В клітинку A7 вводимо обмеження $= c_4 + c_5 + c_6$
7. В клітинки C1...C6 введемо початкові нульові значення.
8. Виконаємо команду СЕРВІС / РОЗВ'ЯЗУВАЧ.
9. У полі вводу ВСТАНОВИТИ ЦІЛЬОВУ робимо посилання на A1.
10. Переставляємо перемикач на МІНІМАЛЬНЕ ЗНАЧЕННЯ
11. У полі вводу ЗМІНЮЮЧИ ЗМІННІ вказуємо C1:C6.
12. Починаємо вводити інформацію в поле вводу ОБМЕЖЕННЯ. Натиснемо кнопку ДОДАТИ і з'явиться вікно діалогу ДОДАТИ ОБМЕЖЕННЯ. У полі ПОСИЛАННЯ НА КОМІРКУ робимо посилання на A3, а у полі ОБМЕЖЕННЯ поставимо знак $=$ і число 18. Аналогічно виконуємо для клітинок A4-A7.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.05-05.02/2/051.00.1/ ОК.19-2024
	Екземпляр № 1	Арк 41 / 41

13. Для вводу обмежень змінних s_1 - s_6 на невід'ємність у вікні ДОДАТИ ОБМЕЖЕННЯ вводимо почергово клітинки $C_1 \dots C_6$, знак $\geq$ і нуль.

14. Натискаємо кнопку ВИКОНАТИ отримуємо результат.

У клітинці A1 – мінімальна вартість перевезень (1286), а в клітинках C_1 - C_6 – оптимальні обсяги перевезень.

14. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

Опитування по наступних запитаннях:

1. У чому полягає суть транспортної задачі?
2. Назвіть основні методи укладання першого допустимого плану транспортної задачі.
3. Заповніть таблицю: а) методом мінімального елемента; б) методом північно-західного кута.

	5		8		10		7	
8		3		15		21		10
9		2		14		20		6
13		5		7		25		12

4. Як називається метод перевірки на оптимальність допустимого плану транспортної задачі, у чому його суть?
5. Яка транспортна задача називається незбалансованою?
6. Як розв'язуються незбалансовані транспортні задачі?
7. У якому випадку допустимий план є виродженим?