

## Лабораторна робота № 3

### Тема заняття: *Формули алгебри висловлень. Функції алгебри логіки (2год)*

**Мета:** надати студентам міцне фундаментальне розуміння основ математичної логіки та її застосування у різних галузях, зокрема в інформатиці. Ознайомити студентів з основними поняттями логіки: висловлювання, логічні зв'язки, істиннісні таблиці, формули. Розвинути навички побудови та аналізу складних логічних висловлювань.

#### **Література**

Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас Ф.Г. Комп'ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – ст. 9-15

### Зміст роботи

**Завдання 1.** Записати висловлювання у вигляді формули логіки висловлювань, використовуючи пропозиційні (логічні) змінні для позначення елементарних висловлювань.

1	Якщо програма не має помилок, то вона виконується успішно, якщо програма має логічні помилки, то вона теж виконується успішно.
2	Якщо програма має логічні помилки, то вона виконається успішно, але результат буде невірним.
3	Я поїду на море або в гори, але не одночасно
4	Функція повертає значення true тільки тоді, коли всі елементи масиву більші за 5 або хоча б один елемент дорівнює 0
5	Для того, щоб вирішити завдання, потрібно знати математику або програмування
6	Якщо змінна $x$ є цілим числом і більше 0, то це натуральне число
7	Якщо число більше нуля і менше 10, то воно одноцифрове.
8	Якщо користувач авторизований або є адміністратором, то він має доступ до цієї сторінки.
9	Алгоритм сортування завершився успішно, якщо всі елементи масиву відсортовані за зростанням або за спаданням
10	Якщо змінна $i$ менша за 10, то виконати тіло циклу, якщо більше або дорівнює 10 вийти з циклу
11	Якщо завтра буде сонячно, то я піду на пляж, інакше я залишуся вдома
12	Якщо глибина рекурсії дорівнює 0, то повернути результат
13	Якщо я здам іспит з математики та з програмування, то отримаю стипендію.
14	Для того щоб скласти іспит, необхідно добре підготуватися і бути спокійним
15	Завтра буде холодно чи падатиме сніг, але не падатиме сніг, якщо буде холодно.
16	Я поїду на море тоді і тільки тоді, коли я не поїду в гори.
17	Якщо Петро піде у кіно, а Марійка залишиться вдома, то вони не зустрінуться.
18	Неправильно, що якщо книжка не про математику, то вона цікава; отже, всі цікаві книги про математику.

**Методичні рекомендації:** Записати висловлювання у вигляді формули логіки висловлювань, використовуючи пропозиційні (логічні) змінні для позначення елементарних висловлювань:

*Невірно, що якщо Сидоров - не касир, то Сидоров вбив касира; отже, прізвище касира - Сидоров.*

Рішення: Введемо позначення:

$a$  - «Сидоров - касир»,  $b$  - «Сидоров вбив касира» Початковий вислів містить зв'язку «якщо ..., то ...», яка відповідає імплікації, так само зв'язка «Невірно, що ...» і «не», що відповідає запереченню. Формула має вигляд:

$$\overline{(a \rightarrow b)} \rightarrow a$$

**Завдання 2.** Бульова функція  $f(x,y,z)$  задана формулою алгебри логіки. Задати цю функцію:

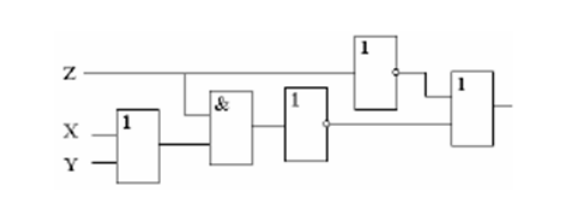
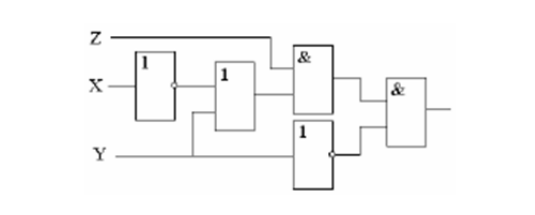
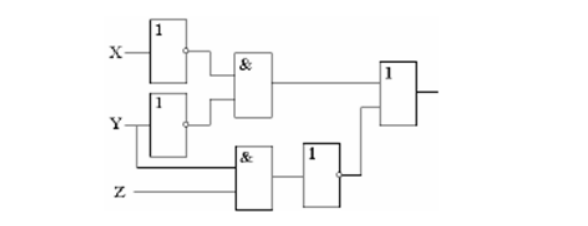
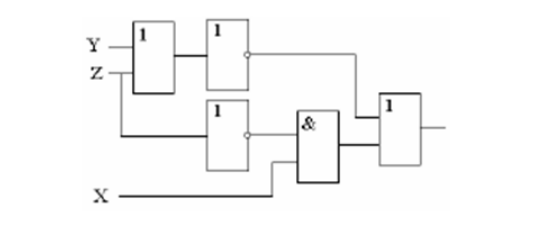
- 1) таблицею істинності;
- 2) вектором значень;
- 3) порядковим номером;
- 4) номерами наборів, на яких  $f=1$ .

1	$f = (x \wedge y) \vee ((\neg x \wedge \neg z) \vee y)$ $f = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$	2	$f = \neg((\neg x \wedge \neg z) \wedge (\neg(y \vee z) \vee x))$ $f = (x \rightarrow z) \rightarrow (\neg x \wedge y) \rightarrow (x \vee y)$
3	$f = ((\neg x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee \neg y)$ $f = \neg x \wedge (y \vee \neg z) \oplus (\neg(x \vee y)) \vee z$	4	$f = (x \wedge (\neg(z \wedge y))) \vee (\neg y \vee \neg x)$ $f = ((x \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$
5	$f = \neg x \wedge ((\neg y \wedge z) \vee x \vee y)$ $f = (((x \wedge \neg z) \vee \neg y) \oplus (\neg(z \vee \neg x))) \vee y$	6	$f = \neg y \vee (\neg x \wedge z) \vee (\neg(x \wedge y))$ $f = \neg(z \vee (\neg y \wedge x)) \rightarrow (\neg x \wedge (\neg z \vee y))$
7	$f = ((x \wedge \neg y) \vee z) \wedge (\neg x \vee y) \vee \neg z$ $f = \neg((x \vee \neg y) \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg x)$	8	$f = (\neg(x \wedge y)) \oplus (\neg(y \vee \neg z) \wedge x)$ $f = (\neg y \rightarrow z) \vee (\neg(x \vee (\neg z \rightarrow y))) \wedge \neg x$
9	$f = ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \wedge (\neg(z \vee y) \wedge x)$ $f = ((x \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$	10	$f = \neg(((\neg x \wedge z) \wedge y) \vee (x \vee \neg y))$ $f = (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z))$
11	$f = ((\neg x \vee z) \wedge \neg y) \vee (\neg z \vee y)$ $f = (x \rightarrow y) \oplus (y \vee z)$	12	$f = \neg(\neg z \vee (\neg y \wedge \neg x) \wedge (\neg z \vee y))$ $f = (x \rightarrow \neg(x \wedge y)) \rightarrow ((z \vee y) \rightarrow (x \wedge y))$
13	$f = ((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \vee \neg x)$ $f = (x \vee y) \oplus (y \rightarrow z)$	14	$f = (x \wedge (z \vee \neg y)) \vee (y \wedge (z \vee \neg x))$ $f = (x \oplus y) \rightarrow y \wedge z$
15	$f = (((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$ $f = (((x \wedge y) \rightarrow z) \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z)$	16	$f = ((x \wedge (y \vee \neg x)) \wedge ((\neg y \rightarrow x) \vee z))$ $f = (x \wedge y) \vee (y \rightarrow z)$

**Методичні рекомендації:** Приклад виконання наведено в лекції №3.

**Завдання 3.** Скласти за структурною формулою завдання 2 відповідну логічну схему.

**Завдання 4.** Скласти за логічною схемою відповідну структурну формулу.

1		2	
3		4	

5		6	
7		8	
9		10	
11		12	
13		14	
15		16	

### Методичні рекомендації

Відношення між булевими змінними подаються булевими функціями, які, подібно до числових функцій, можуть залежати від однієї, двох чи більш змінних (аргументів).

**Булевою функцією**  $n$  незалежних змінних називається функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 1$ , в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини  $\{0; 1\}$ , тобто  $x_k \in \{0; 1\}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $y \in \{0, 1\}$ .

Кортеж  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  конкретних значень булевих змінних називається **набором**, або **булевым вектором**.

Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то набір називається **прямим**, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді  $x = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ , то набір називається **зворотним**.

**Областю визначення бульової функції  $n$  аргументів** є сукупність  $2^n$  бульових кортежів. Число різних бульових функцій є скінченне і дорівнює  $2^{2^n}$ . Якщо  $n = 1$  число бульових функцій дорівнює 4, а за  $n = 2 - 16$ .

**Таблиця істинності** - це математична таблиця, яка показує всі можливі комбінації значень істинності для простих висловлювань та відповідне значення істинності для складного висловлювання. Вона використовується в логіці для візуалізації та аналізу логічних функцій.

Наприклад. Скласти таблицю істинності для функції  $f = \neg((\neg x \wedge z) \wedge y)$

x	y	z	$\neg x$	$\neg x \wedge z$	$(\neg x \wedge z) \wedge y$	$f = \neg((\neg x \wedge z) \wedge y)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

**Операція Ні - логічне заперечення (інверсія).** Для операції заперечення прийняті такі умовні позначення:  $\bar{A}$ , not A,  $\neg A$ , ! A. Таблиця істинності:

A	!A
0	1
1	0

**Операція Або - логічне додавання (диз'юнкція, об'єднання).** Для операції прийняті такі умовні позначення: A або B,  $A \vee B$ , A or B,  $A \parallel B$ . Таблиця істинності:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**Операція І - логічне множення (кон'юнкція).** Застосовувані позначення: A і B,  $A \wedge B$ , A & B, A and B. Таблиця істинності:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Операція «Якщо-то» - логічне слідування (імплікація).** Ця операція пов'язує два простих логічних вирази, з яких перше є умовою, а друге - наслідком цієї умови. Позначення: якщо A, то B; if A then B;  $A \rightarrow B$ . Таблиця істинності:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**Операція «A тоді і тільки тоді, коли B» (еквівалентність, рівнозначність).** Застосовується позначення:  $A \leftrightarrow B$ ,  $A \sim B$ . Таблиця істинності:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Операція «Додавання за модулем 2» (XOR, що виключає або, суворі диз'юнкція).** Застосовується позначення:  $A \text{ XOR } B$ ,  $A \oplus B$ . Таблиця істинності:

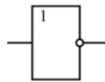
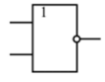
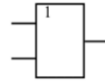
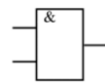
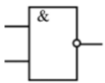
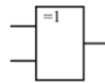
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Пріоритет логічних операцій:

- 1) Дії в дужках
- 2) Інверсія
- 3) Кон'юнкція (&)
- 4) Диз'юнкція (V), Виключає Або (XOR), Сума по модулю 2
- 5) Імплікація ( $\rightarrow$ )
- 6) Еквівалентність ( $\leftrightarrow$ )

#### Умовне позначення логічних елементів

Інвертор (не)		(або / ні) $\overline{A + B}$		диз'юнктор (або)	
кон'юнктор (І)		(і / ні) $\overline{A \cdot B}$		нерівнозначність	

#### Контрольні питання

1. Дати визначення поняттю висловлення. Які бувають висловлення? Як позначаються висловлення?
2. Назвіть п'ять основних операцій над висловленнями. Які з них ми називаємо бінарними, а які унарними?
3. Що називається висловлюванням?
4. Як визначається операція диз'юнкції висловлювань?
5. Як визначається операція кон'юнкції висловлювань?
6. Як визначається операція заперечення висловлювань?
7. Як визначається операція імплікації висловлювань?
8. Як визначається операція логічного додавання?
9. Як визначається операція штрих Шеффера?
10. Як визначається операція стрілка Пірса?