

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/193.00.1/Б/ВК
	Екземпляр № 1	Арк 49/1

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Державного університету  
«Житомирська політехніка»

протокол від \_\_\_ \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.  
№ \_\_\_

### **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «ГЕОДЕЗИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ОБРОБКА»**

(назва навчальної дисципліни)

для студентів освітнього рівня «бакалавр»  
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»

(шифр та назва спеціальності)

освітньо-професійна програма «Геодезія та землеустрій»

(назва)

факультет гірничо-екологічний  
кафедра маркшейдерії

(назва кафедри)

Рекомендовано на засіданні  
кафедри маркшейдерії

(назва кафедри)

28 серпня 2024

р., протокол № 9

Розробник: к.т.н., доц. кафедри маркшейдерії Панасюк А.В.

Житомир  
2024

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/193.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/3

## Вступ

Основна частина первинної маркшейдерської інформації отримується за допомогою вимірювань. Безпосередньо ця інформація використовується рідко. Як правило, вона піддається математичній обробці.

В широкому розумінні математичною обробкою називається комплекс обчислювальних перетворень вихідної інформації для отримання числових значень, що мають наукову та практичну цінність. Математична обробка результатів вимірювань має свою специфіку, що полягає в необхідності обліку в процесі обчислень похибок вимірів. Очевидно, що й результати, отримані після обробки, будуть супроводжуватися невизначеними похибками.

Крім того, задачі обробки результатів вимірів ускладнюються через те, що для забезпечення контролю та надійності зазвичай виконують значну кількість надлишкових вимірів, які приводять до отримання декількох значень однієї й тієї ж величини, які чисельно відрізняються через вплив похибок вимірів. Таким чином, однією з основних задач математичної обробки є задача отримання однозначних результатів, що найкращим чином наближаються до невідомих дійсних значень. При математичній обробці результатів вимірювань ця задача розв'язується за допомогою методу найменших квадратів, при якому окрім знаходження оптимальних значень, можливо також оцінити їх точність та якість. При реалізації методу найменших квадратів похибки вимірів розглядаються як випадкові величини, статистична поведінка яких підлягає певному закону розподілу.

Сучасна теорія математичної обробки вимірів тісно пов'язана з теорією ймовірностей та математичною статистикою, в ній широко використовується математичний апарат матричної алгебри.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/193.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/4

## Практичне заняття №1.

### Дослідження властивостей випадкових похибок

#### Теоретичні відомості.

Розподіл випадкових похибок вимірювань описується так званим нормальним законом або законом Гауса.

Функція густини нормального розподілу випадкових похибок має вигляд:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  – значення випадкової похибки,  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення сукупності цих похибок.

Аналізуючи функцію нормального розподілу, можна сформулювати чотири основні властивості випадкових похибок вимірювань.

1. Зі зменшенням абсолютних значень похибок зростає частота їх появи.
2. Абсолютні значення  $\varepsilon$ , зростаючи, досягають деякого значення, за яким ймовірність їх появи практично дорівнює нулю. Ця властивість дозволяє встановлювати для кожного конкретного виду вимірювань граничні похибки, тобто вимірювання можна вважати грубими, якщо значення похибок більші за певні допуски.
3. Поява рівних за абсолютною величиною, але протилежних за знаком похибок рівноймовірна. Ця властивість впливає з парності функції.
4. Середнє арифметичне значення сукупності випадкових похибок  $\varepsilon$  прямує до нуля при необмеженому зростанні їх числа,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0 \quad (2)$$

#### Задача №1.1

Високоточним теодолітом на місцевості виміряний горизонтальний кут із середньою похибкою 1,5" і отримане його дійсне значення  $X = 76^\circ 15' 31,4''$ . цей же кут був виміряний багаторазово ( $n = 30$ ) новим теодолітом з передбачуваною середньою похибкою одного виміру  $m_0 = 5''$ .

Здійснити статистичну обробку ряду випадкових значень похибок вимірювання.

#### Розв'язок

1. Обчислюємо випадкові похибки вимірів  $\varepsilon_i = x_i - X$ , де  $x_i$  – виміряні значення;  $X$  – дійсне значення величини.
2. Знаходимо степені похибок  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^4$ .
3. Визначаємо суми  $[\varepsilon]$ ,  $[\varepsilon^2]$ ,  $[\varepsilon^3]$ ,  $[\varepsilon^4]$ .

Таблиця 1

Номер	Виміряне	$\varepsilon''$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$
1	2	3	4	5	6
1.	76° 15' 36"	4,6	21,2	97,3	448

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015				Ф-23.06- 05.02/3/193.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1				Арк 49/5

2.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375
3.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
4.	24	- 7,4	54,8	- 405,2	2999
5.	33	1,6	2,6	4,1	7
6.	42	10,6	112,4	1191,0	12625
7.	33	1,6	2,6	4,1	7
8.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
9.	33	1,6	2,6	4,1	7
10.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375
11.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
12.	42	10,6	112,4	1191,0	12625
13.	39	7,6	57,8	439,0	3336
14.	39	7,6	57,8	439,0	3336
15.	33	1,6	2,6	4,1	7
16.	21	- 10,4	108,2	- 1124,9	11699
17.	33	1,6	2,6	4,1	7
18.	27	- 4,4	19,4	-85,2	375
19.	36	4,6	21,2	97,3	448
20.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
21.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
22.	33	1,6	2,6	4,1	7
23.	30	-1,4	2,0	- 2,7	4
24.	27	-4,4	19,4	- 85,2	375
25.	33	1,6	2,6	4,1	7
26.	27	- 4,4	19,4	-85,2	375
27.	45	13,6	185,0	2515,5	34210
28.	24	- 7,4	54,8	- 405,2	2999
29.	27	-4,4	19,4	- 85,2	375
30.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
X	76° 15' 31,4"	[ε] = 9,0	[ε <sup>2</sup> ] = 934,2	[ε <sup>3</sup> ] = 3533,4	[ε <sup>4</sup> ] = 87 052

4. Використовуючи ці суми, знаходимо наступні вирази:

a) зсув вибіркового середнього арифметичного значення відносно дійсного

$$\Delta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{9''}{30} = 0,3''$$

звідси середнє значення з ряду вимірів буде рівне

$$76^{\circ}15'31,4'' + 0,3'' = 76^{\circ}15'31,74''$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015							Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1		
	Екземпляр № 1							Арк 49/7		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
- ∞		- ∞	- 0,5000							
- 7,5	1	- 1,34	- 0,4099	0,09	0,03	2,7	1,07	0,09	0,03	0,06
- 5,0	2	- 0,89	- 0,3132	0,10	0,07	3,0	0,33	0,19	0,10	0,09
- 2,5	6	- 0,45	- 0,1732	0,14	0,20	4,2	0,77	0,33	0,30	0,03
0	7	0	0	0,17	0,23	5,1	0,71	0,50	0,53	- 0,03
2,5	7	0,45	0,1732	0,17	0,23	5,1	0,71	0,67	0,76	- 0,09
5,0	2	0,89	0,3132	0,14	0,07	4,2	1,15	0,81	0,83	- 0,02
7,5	0	1,34	0,4099	0,10	0	3,0	3,00	0,91	0,83	0,08
10,0	2	1,78	0,4625	0,05	0,07	1,5	0,16	0,96	0,90	0,06
∞	3	∞	0,5000	0,04	0,10	1,2	2,70	1,00	1,00	0
<b>Σ</b>	<b>30</b>	-	-	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>30</b>	<b>10,6</b>	-	-	-

Верхні межі інтервалів  $x_i$  відкладені по обидва боки від нуля. Для кожного інтервалу шукають частоту  $n_i$  – число випадкових величин ряду, що потрапляють всередину відповідного інтервалу.

Нормовані інтервали обчислюються за формулою

$$t_i = \frac{x_i}{m}$$

За ними вибираються половини значень  $\Phi(t)$  з табл. додатку 1. Знаки цих значень аналогічні знакам  $t_i$ .

Записуються теоретичні  $p_t$  та фактичні  $p_\phi$  ймовірності попадання випадкових величин в інтервали. При цьому величина  $p_t$  отримана як різниця сусідніх рядків стовпчика 4, а  $p_\phi$  – діленням частот  $n_i$  на  $n$  – число вимірів.

Теоретичні частоти  $n'_i$  отримуються множенням теоретичних ймовірностей  $p_t$  на число всіх вимірів  $n$ .

Критерій згоди Пірсона обчислюється за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 10,6,$$

де  $k$  – число інтервалів. В нашому випадку  $k = 9$ .

Гіпотеза про відповідність розподілу ряду випадкових значень  $\varepsilon_i$  нормальному приймається, якщо виконується умова  $\chi^2 \leq \chi_q^2$ . Тут  $\chi_q^2$  – значення, що вибирається за числом ступенів свободи  $r$  та рівнем істотності  $p = 1 - \gamma$ , де  $\gamma$  – довірча ймовірність (додаток 3).

Число ступенів свободи для нормального розподілу  $r = k - 3$ . В нашому випадку  $r = 9 - 3 = 6$ .

Для довірчої ймовірності  $\gamma = 0,95$  ( $p = 0,05$ )  $\chi_{0,05}^2 = 12,6$ . Оскільки  $\chi^2 \leq \chi_{0,05}^2$ , можна зробити висновок про відповідність розподілу випадкових похибок вимірювання нормальному закону.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/ 8

Стовпчики 9, 10, 11 (табл. 2) містять дані, що необхідні для отримання критерію згоди Колмогорова. Накопичені ймовірності отримуються послідовним додаванням ймовірностей  $p_i$  та  $p_\phi$  стовпчиків 5 і 6, в стовпчику 11 ( $D$ ) записуються різниці накопичених ймовірностей (табл. 5).

Показником розходження фактичного та теоретичного розподілів є число

$$\lambda_\phi = D_{max} \sqrt{n},$$

де  $D_{max}$  – абсолютне значення максимальної різниці накопичених ймовірностей. В прикладі  $D_{max} = 0,09$ , звідси

$$\lambda_\phi = 0,09 \sqrt{30} = 0,493.$$

Гіпотеза відповідності фактичного розподілу ряду випадкових значень похибок  $\varepsilon$  нормальному розподілу приймається, якщо виконується умова  $\lambda_\phi \leq \lambda_q$ . Тут коефіцієнти  $\lambda_\phi$  в залежності від рівня істотності мають наступні значення :

Рівень істотності $p$	0,1	0,05	0,01
Коефіцієнт $\lambda_p$	1,224	1,358	1,627

В прикладі показник  $\lambda_\phi$  менший за всі коефіцієнти  $\lambda_p$ , що свідчить про наближеність фактичного розподілу отриманих випадкових похибок до нормального.

Таким чином, за всіма критеріями можна зробити висновок про те, що фактичний розподіл величин  $\varepsilon$  підлягає нормальному закону.

## Практичне заняття №2.

### Математична обробка рівноточних багаторазових вимірів однієї величини.

#### Теоретичні відомості.

Обробка рівноточних вимірів однієї величини здійснюється за такою схемою.

1. Визначається найбільш надійне (середнє арифметичне) значення вимірюваної величини  $\bar{X}$  за такими формулами:

для невеликих за значенням лінійних величин

$$\bar{X} = \frac{[x]}{n} \quad (3.1)$$

для кутових та лінійних величин

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[\delta]}{n} \quad (3.2)$$

де  $X_0$  – деяке значення з ряду виміряних величин (як правило, найменше),  $\delta_i = x_i - X_0$ .

2. Середня квадратична похибка одного вимірювання  $m$  за формулою Беселя

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad (4)$$

де  $v_i = x_i - \bar{X}$ .

3. Середня похибка одного вимірювання

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/9

$$\theta = \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (5)$$

4. Ймовірна похибка одного вимірювання  $r$ ;  
5. Фактичні та теоретичні співвідношення  $\theta/m$  та  $r/m$ .

Теоретичні співвідношення  $\theta \approx \frac{4}{5}m$  та  $r \approx \frac{2}{3}m$ ;

6. Похибка середньої квадратичної похибки одного вимірювання  $m_m$ ;  
7. Середня квадратична похибка найбільш надійного значення

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

8. Контроль обчислень проводиться за рівностями

$$[v] = 0 \quad (7)$$

та

$$[v\delta] = [v\delta] \quad (8)$$

Якщо при визначенні середнього арифметичного є похибка округлення  $\beta = \bar{X} - \bar{X}_{точне}$ , то виконується рівність

$$[v] = -n\beta \quad (9)$$

### Задача №2.1

Сторона в трикутнику, яка необхідна для обчислення неприступних відстаней, вимірювалась 11 разів рівноточно. Значення результатів наведені в табл. 3. Виконати математичну обробку ряду вимірів сторони в трикутнику.

Розв'язок

Таблиця 3

$N_0$ $n/n$	$S, м$	$s_0, м$	$\delta, мм$	$\bar{s}, м$	$v, мм$	$ v , мм^2$	$v\delta, мм^2$	$vv, мм^2$
1	78,416	78,413	3	78,420	-4	4	-12	16
2	78,420		7		0	0	0	0
3	78,413		0		-7	7	0	49
4	78,424		11		4	4	44	16
5	78,426		14		6	6	78	36
6	78,422		9		2	2	18	4
7	78,418		5		-2	2	-10	4
8	78,421		2		-1	1	8	1
9	78,425		12		5	5	60	25
10	78,419		6		-1	1	-6	1
11	78,417		4		-3	3	-12	9
$\Sigma$	—	—	<b>78</b>	—	<b>-1</b>	<b>35</b>	<b>168</b>	<b>161</b>

1. За даними табл. 3 обчислюємо арифметичну середню



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/10

$$\bar{S} = S_0 + \frac{[\delta]}{n} = 78,413 \text{ м} + \frac{78}{11} \text{ мм} = 78,420091 \text{ м} = 78,420 \text{ м}.$$

Похибка округлення  $\beta = \bar{S} - \overline{S_{точне}} = 78,420 - 78,420091 = 0,091 \text{ мм}.$

2. Обчислюємо середню квадратичну похибку одного виміру за формулою Беселя  $m$ , середню похибку  $\theta$  та найбільш ймовірну похибку  $r$ . Перевіряємо співвідношення між ними.

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{161}{11-1}} = \sqrt{16,1} = 4,0 \text{ мм},$$

$$\theta = \frac{[|v|]}{n} = \frac{35}{11} = 3,18 \text{ мм},$$

№ з/п	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
v	0	1	1	2	2	3	4	4	5	6	7

$$r = 3.$$

Обчислюємо фактичні співвідношення виду:

$$\frac{\theta}{m} = \frac{3,18}{4,0} = 0,795 \text{ (0,8)};$$

$$\frac{r}{m} = \frac{3}{4,0} = 0,75 \text{ (0,67)}.$$

В дужках наведені теоретичні співвідношення.

3. Визначаємо середню квадратичну похибку арифметичної середньої

$$m_{\bar{s}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{4,0}{\sqrt{11}} = 1,2 \text{ мм}$$

4. Розраховуємо відносну похибку

$$\frac{m_{\bar{s}}}{\bar{S}} = \frac{1,2 \text{ мм}}{78,420 \text{ м}} = \frac{0,0012}{78,420} = \frac{1}{65000}$$

5. Обчислюємо середню квадратичну похибку самої середньої квадратичної похибки одного виміру

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4,0}{\sqrt{2(11-1)}} = 0,9 \text{ мм}.$$

Можна вважати, що похибка визначена надійно, якщо виконується рівність

$$m_m \approx \frac{m}{4} = \frac{4,0}{4} = 1 \text{ мм}.$$

6. Визначаємо середню квадратичну похибку самої середньої квадратичної похибки арифметичної середньої

$$m_{m_{\bar{s}}} = \frac{m_{\bar{s}}}{\sqrt{2n}} = \frac{1,2}{\sqrt{2 \cdot 11}} = 0,3 \text{ мм}.$$

Можна вважати, що похибка визначена надійно, якщо виконується рівність

$$m_{m_{\bar{s}}} = \frac{m_{\bar{s}}}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3 \text{ мм}.$$

7. Побудуємо довірчі інтервали при довірчій імовірності  $\gamma = 0,9$  та числі ступенів свободи  $k = 11 - 1 = 10$ :

- для дійсного значення довжини сторони трикутника, що вимірюється

$$\bar{S} - t_{\gamma} m_{\bar{s}} \leq S \leq \bar{S} + t_{\gamma} m_{\bar{s}}$$

коефіцієнт  $t_{\gamma} = 1,81$  (за таблицею додатку 2)

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/11

$$78,420 - 1,81 \cdot 0,0012 \leq S \leq 78,420 + 1,81 \cdot 0,0012$$

$$78,418 \text{ м} \leq S \leq 78,422 \text{ м};$$

- для дійсного значення середньої квадратичної похибки одного виміру  $\sigma$

$$\gamma_1 m \leq \sigma \leq \gamma_2 m$$

$$p_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,9}{2} = 0,05, \quad p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,05 = 0,95$$

за таблицею додатку 3  $\chi_1^2 = 14,1$ ,  $\chi_2^2 = 2,17$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}} = \sqrt{\frac{11-1}{18,3}} = 0,739, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}} = \sqrt{\frac{11-1}{3,94}} = 1,593$$

$$0,739 \cdot 4,0 \leq \sigma \leq 1,593 \cdot 4,0$$

$$3,0 \text{ мм} \leq \sigma \leq 6,4 \text{ мм};$$

- для дійсного значення середньої квадратичної похибки арифметичної середньої  $\sigma_{\bar{x}}$

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}$$

$$0,739 \cdot 1,2 \leq \sigma_{\bar{x}} \leq 1,593 \cdot 1,2$$

$$0,88 \text{ мм} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq 1,9 \text{ мм}$$

8. Виконати контроль обчислень за формулами 7-9.

### Задача №2.2

В табл. 4 наведено результати багаторазового визначення поправки гірокомпасу  $\Delta_i$  на вихідній стороні високоякісної триангуляційної мережі. В результаті обробки необхідно знайти:

1. Найбільш надійне (середнє арифметичне) значення вимірюваної величини  $\bar{\Delta}$ ;
2. Середню квадратичну похибку одного вимірювання  $m$ ;
3. Середню похибку одного вимірювання  $\theta$ ;
4. Ймовірну похибку одного вимірювання  $r$ ;
5. Фактичні та теоретичні співвідношення  $\theta/m$  та  $r/m$ ;
6. Похибку середньої квадратичної похибки одного вимірювання  $m_m$ ;
7. Середню квадратичну похибку найбільш надійного значення  $m_{\bar{\Delta}}$ .

Обробку виконаємо в такій послідовності:

1. Визначимо попереднє значення ("умовний нуль"), яке приблизно розміщене між максимальним та мінімальним значенням, в нашому прикладі  $\Delta_0 = 43'30''$ .

Отримаємо різниці

$$\delta_i = \Delta_i - \Delta_0,$$

де,  $\Delta_i$  – результати вимірювання.

Ці різниці записуються в стовпчик 3 таблиці 4.

Таблиця 4

Номер виміру	Виміряне значення $\Delta_i$	$\delta_i = \Delta_i - \Delta_0$	$v_i = \Delta_i - \bar{\Delta}$	$v_i \delta_i$	$v_i v_i$	Впорядкований ряд $ v_i $
1	2	3	4	5	6	7
1	58"	28	22,9	641,2	524,41	2,9

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015					Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1					Арк 49/12

2	38"	8	2,9	23,2	8,41	2,9
3	43"	13	7,9	102,7	62,41	2,9
4	24"	-6	-11,1	66,6	123,21	6,9
5	44"	14	8,9	124,6	79,21	7,9
6	23"	-7	-12,1	84,7	146,41	8,9
7	54"	24	18,9	453,6	357,21	8,9
8	38"	8	2,9	23,2	8,41	10,1
9	63"	33	27,9	920,7	778,41	11,1
10	38"	8	2,9	23,2	8,41	11,9
11	42"	12	6,9	82,8	47,61	11,9
12	47"	17	11,9	202,3	141,61	12,1
13	16"	-14	-19,1	267,4	364,81	12,1
14	23"	-7	-12,1	84,7	146,41	14,9
15	09"	-21	-26,1	548,1	681,21	16,1
16	17"	-13	-18,1	235,3	327,61	18,1
17	47"	17	11,9	202,3	141,61	18,9
18	44"	14	8,9	124,6	79,21	19,1
19	25"	-5	-10,1	50,5	102,01	20,9
20	19"	-11	-16,1	177,1	259,21	22,1
21	12"	-18	-23,1	415,8	533,61	22,9
22	50"	20	14,9	298	222,01	23,1
23	56"	26	20,9	543,4	436,81	26,1
24	13"	-17	-22,1	375,7	488,41	27,9
$\Delta_0 = 75^\circ 43' 30''$		$[\delta] =$	$[v] =$	$[v\delta] =$	$[vv] =$	$[[v_i]] = 340,6$
$\bar{\Delta} = 75^\circ 43' 35,1''$		123	0,6	6071,7	6068,64	

2. Найбільш надійне значення визначаємо за формулою простої арифметичної середньої:

$$\bar{\Delta} = \Delta_0 + \frac{[\delta]}{n} = 43'30'' + \frac{123}{m} = 43'35,1''.$$

3. В стовпчик 4 (табл. 4) записуємо відхилення окремих вимірів від найбільш надійного (середньої арифметичної), тобто  $v_i = \Delta_i - \bar{\Delta}$ . Для контролю отримуємо суму  $[v]$ , яка повинна дорівнювати нулю. В нашому прикладі  $[v]=0,6$ . Незначне відхилення від нуля зумовлене похибками округлення при визначенні  $\bar{\Delta}$ . Тут же визначаємо суму абсолютних значень відхилення  $[[v]]=340,6$ , необхідну для знаходження середньої похибки.

4. В стовпчики 5 і 6 (табл. 4) записуємо добутки  $v_i\delta_i$  та  $v_iv_i$ . Після додавання отримаємо  $[v\delta]=6071,7$  і  $[vv]=6008,4$ . Контроль  $[v\delta]=[vv]$  сходиться в межах точності обчислення  $\Delta$  та обчислення цих сум.

5. В стовпчику 7 (табл. 4) розміщуємо абсолютні значення  $v_i$  в порядку їх зростання.

6. Знаходимо похибки одного вимірювання:

Середня квадратична похибка дорівнює:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/13

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{6068}{23}} = 16,2''.$$

Середня похибка

$$\theta = \frac{[|v|]}{n} = \frac{340,6}{24} = 14,2''.$$

Імовірну похибку вибираємо із середини впорядкованого ряду – в нашому прикладі ( $n$  - парне) як середнє із  $|v_{12}|$  і  $|v_{13}|$ , тобто

$$r = \frac{|v_{12}| + |v_{13}|}{2} = \frac{(12,1 + 12,1)}{2} = 12,1''.$$

7. Обчислюємо фактичні співвідношення виду:

$$\frac{\theta}{m} = \frac{14,2}{16,2} = 0,877 \quad (0,75);$$

$$\frac{r}{m} = \frac{12,1}{16,2} = 0,747 \quad (0,67).$$

В дужках наведені теоретичні співвідношення. Розходження фактичних та теоретичних співвідношень при такій обчисленій кількості вимірів складає менше 10%, що є цілком прийнятним.

8. Визначаємо похибку отриманої середньої квадратичної похибки:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{16,2}{\sqrt{46}} = 2,4''.$$

9. Обчислюємо середню квадратичну похибку визначення кінцевого (середнього арифметичного) значення поправки гірокомпаса:

$$m_{\Delta} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{16,2}{\sqrt{24}} = 3,3''.$$

Отримані результати запишемо у вигляді

$$\bar{A} = 43'35'' \pm 3,3''.$$

### Практичне заняття №3.

#### Математична обробка рядів подвійних вимірів однієї величини.

#### Теоретичні відомості.

Для контролю та підвищення точності кожну величину вимірюють декілька разів; часто обмежуються двома незалежними вимірюваннями. В цьому випадку шукають різниці кожної пари вимірів.

$$\begin{aligned} d_1 &= x'_1 - x''_1; \\ d_2 &= x'_2 - x''_2; \\ &\dots\dots\dots; \\ d_n &= x'_n - x''_n. \end{aligned}$$

Значення  $d_i$  є дійсними похибками різниць подвійних вимірів, тому використовуючи формулу Гауса, отримаємо

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/14

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}}, \quad (10)$$

де  $n$  – кількість різниць вимірів.

Середня квадратична похибка одного вимірювання

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

За кінцеве, найбільш надійне значення приймають  $\bar{x}_i = \frac{x'_i + x''_i}{2}$ . Тоді

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2}. \quad (12)$$

Формули (11-12) застосовують, коли ряд подвійних вимірів не містить систематичних похибок. Якщо результати вимірювань містять систематичні похибки, то в значеннях різниць  $d_i$  вони значно послаблюються, і в  $d_i$  ввійдуть залишкові систематичні похибки. Величину залишкової систематичної похибки визначають за формулою

$$d_0 = \frac{[d]}{n}. \quad (13)$$

Критерієм допустимості  $d_0$  є нерівність  $[d] \leq 0,25[d]$ .

Якщо нерівність не виконується, то розглядаючи різниці  $d'_i = d_i - d_0$  як відхилення від середнього арифметичного, за формулою Беселя знаходимо

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'd']}{n-1}}. \quad (14)$$

Середні квадратичні похибки  $m_{x_i}$  (одного вимірювання) та  $m_{\bar{x}_i}$  (середнього арифметичного) визначають за формулами

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} \quad (16)$$

Нехай відомі різниці вимірів, рівноточних в кожній парі, але пари між собою нерівноточні. Для різниці  $d_i = x'_i - x''_i$  отримаємо  $\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x'_i}} + \frac{1}{p_{x''_i}}$ .

Оскільки  $p_{x'_i} = p_{x''_i}$ , то  $p_{d_i} = \frac{p_{x_i}}{2}$ . Тоді за відсутності систематичних похибок середня квадратична похибка одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \quad (17)$$

Похибка середньої квадратичної похибка одиниці ваги

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} \quad (18)$$

Середні квадратичні похибки середніх значень  $\bar{x}_i$  визначають за формулою

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2}p_i}. \quad (19)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/15

Якщо різниці  $d_i$  містять систематичні похибки, то величина  $d_0 = \frac{[pd]}{[p]}$  буде відрізнятися від нуля. Допустимість значення  $d_0$  визначається з нерівності  $|[d\sqrt{p}]| \leq 0,25 [d\sqrt{p}]$ .

Якщо нерівність не виконується, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'd']}{2(n-1)}} \quad (20)$$

### Задача №3.1

Отримані результати подвійного вимірювання гіроскопічного азимута в гірничих виробках. Здійснити обробку ряду подвійних вимірів.

Скласти таблицю 12 подвійних вимірів горизонтальних кутів.

Таблиця 5

№ n n	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$d$	$ d $	$dd$
1.	316° 18' 05"	316° 18' 46"	- 41	41	1681
2.	201° 44' 05"	201° 44' 13"	- 8	8	64
3.	54° 04' 47"	54° 04' 59"	- 12	12	144
4.	272° 39' 50"	272° 39' 39"	11	11	121
5.	24° 51' 14"	24° 51' 18"	- 4	4	16
6.	132° 32' 43"	132° 32' 27"	16	16	256
7.	118° 15' 50"	118° 15' 54"	-4	4	16
8.	2° 19' 29"	2° 19' 23"	6	6	36
9.	299° 32' 32"	299° 32' 24"	8	8	64
10.	77° 26' 31"	77° 26' 02"	29	29	841
11.	45° 47' 47"	45° 47' 24"	23	23	529
12.	203° 34' 05"	203° 34' 33"	- 28	28	784
<b>Σ</b>	—	—	<b>- 4</b>	<b>190</b>	<b>4552</b>

1. Обчислюємо різниці  $d_i = \alpha'_i - \alpha''_i$ .
2. Визначаємо залишкову систематичну похибку  $d_0$ .
3. Перевіримо допустимість залишкової систематичної похибки  $d_0$  за нерівністю  $|[d]| \leq 0,25 [d]$ .

Оскільки  $[d] = 4$ , а  $0,25 [d] = 190 / 4 = 47,5$ , то нерівність виконується, отже значення залишкової систематичної похибки  $d_0$  є допустимим.

4. Визначаємо похибку всієї сукупності вимірів

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}} = \sqrt{\frac{4552}{12}} = 19,5''.$$

5. Середня квадратична похибка одного вимірювання

$$m_{\alpha_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \frac{19,5}{\sqrt{2}} = 14''.$$

6. Середня квадратична похибка середніх значень

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/ 16

$$m_{\alpha_i} = \frac{m_d}{2} = \frac{19,5}{2} = 9,8''.$$

### Задача №3.2

Відомі різниці прямих та обернених нівелірних ходів III класу та кількість станцій за ходами в одному напрямку. Виконати оцінку точності наведених результатів вимірювань.

Таблиця 6

Номер ходу	Різниця $d$ , мм	Кількість станцій, $N$	Вага $p=10/N$	$pd$ , мм	$d\sqrt{p}$	$ d\sqrt{p} $	$pdd$	Похибки середніх значень $m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}$
1	3,7	29	0,34	1,26	2,16	2,16	4,65	3,3
2	8,4	17	0,59	4,96	6,45	6,45	41,63	2,5
3	-7,2	31	0,32	-2,30	-4,07	4,07	16,59	3,4
4	4,1	18	0,56	2,30	3,07	3,07	9,41	2,6
5	-8,3	23	0,43	-3,57	-5,44	5,44	29,62	2,9
6	-4,9	12	0,83	-4,07	-4,46	4,46	19,93	2,1
7	0,7	17	0,59	0,41	0,54	0,54	0,29	2,5
8	2,9	24	0,42	1,22	1,88	1,88	3,53	2,9
9	3,7	33	0,30	1,11	2,03	2,03	4,11	3,5
<b>Σ</b>	<b>3,1</b>	<b>-</b>	<b>4,38</b>	<b>1,32</b>	<b>2,16</b>	<b>30,1</b>	<b>129,76</b>	<b>-</b>

Обчислимо  $d_0 = \frac{[pd]}{[p]} = +0,30$ .

Допустимість значення  $d_0$  визначається з нерівності

$$|d\sqrt{p}| \leq 0,25 |d\sqrt{p}|.$$

В даному прикладі  $|d\sqrt{p}| = 2,16$ , що менше за  $0,25 |d\sqrt{p}| = 7,53$ , тому середня квадратична похибка одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} = 2,7 \text{ мм.}$$

Обчислимо  $m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} = 0,64 \text{ мм.}$

Обчислимо похибки середніх значень для кожного ходу  $m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}$ .

### Практичне заняття №4.

#### Визначення похибок функцій вимірених величин.

#### Теоретичні відомості.

В загальному випадку шукається середня квадратична похибка  $m_y$  деякої функції вимірених величин вигляду:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/17

$$y = F(l_1, l_2, \dots, l_n), \quad (21)$$

де,  $l_i$  – результати безпосередніх вимірювань  $n$  різних величин.

При цьому вважаються відомими середні квадратичні похибки окремих вимірювань, які позначимо відповідно  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

Дійсне значення оцінюваної функції отримується при заміні вимірених значень  $l_i$  на дійсні значення  $L_i$ :

$$Y = F(L_1, L_2, \dots, L_n). \quad (22)$$

Тоді середня квадратична похибка оцінюваної функції, виражена через похибки аргументів:

$$m_y^2 = f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + \dots + f_n^2 m_n^2. \quad (2)$$

(3)

де

$$\frac{\partial F}{\partial L_i} = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

#### Задача 4.1

Площа прямокутної земельної ділянки обчислювалась за формулою  $s = a \cdot b$ , де  $a = 20,00$  м і  $b = 30,00$  м – сторони прямокутника, які виміряні з середніми квадратичними похибками  $m_a = 0,02$  м і  $m_b = 0,03$  м відповідно. Визначити середню похибку обчисленої площі.

#### Розв'язок

Застосовуючи формулу для похибки функції  $s = a \cdot b$ , знайдемо в загальному вигляді

$$m_s^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 m_b^2$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial s}{\partial a} = b; \quad \frac{\partial s}{\partial b} = a.$$

Підставляючи їх у вираз для  $m_s^2$ , отримаємо

$$m_s^2 = b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2 = 30,00^2 \cdot 0,02^2 + 20,00^2 \cdot 0,03^2 = 0,72.$$

$$m_s = \sqrt{0,72} = 0,85 \text{ м}^2.$$

#### Задача 4.2

У всячому теодолітному ході, що складається з 8 сторін, кути виміряні із середньою похибкою  $m_\beta = 20''$ . Вихідний дирекційний кут  $\alpha_0$  визначено з похибкою  $m_\alpha = 35''$ .

Знайти середню похибку дирекційного кута останньої сторони.

#### Розв'язок.

1. Виражаємо оцінювану функцію через виміряні величини:

$$y = \alpha_8 = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_8 \pm 8 \cdot 180^\circ.$$

2. Знаходимо частинні похідні від оцінюваної функції за аргументами  $\alpha_0, \beta_1, \dots, \beta_8$ :

$$\frac{\partial \alpha_8}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \alpha_8}{\partial \beta_1} = \dots = \frac{\partial \alpha_8}{\partial \beta_8} = 1.$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/18

3. Підставляємо похибки  $m_\alpha$  і  $m_\beta$  та знайдені похідні в формулу для визначення похибки функції

$$m_{\alpha_8}^2 = m_\alpha^2 + 8m_\beta^2.$$

Звідси отримуємо

$$m_{\alpha_8} = \sqrt{m_\alpha^2 + 8m_\beta^2} = \sqrt{35^2 + 8 \cdot 20^2} = 67''.$$

Відмітимо, що в більш загальному випадку

$$m_{\alpha_i} = \sqrt{m_\alpha^2 + im_\beta^2},$$

де  $i$  – номер оцінюваної сторони.

### Задача 4.3

Визначити середню квадратичну похибку перевищення, що обчислюється за формулою  $h = S \cdot \operatorname{tg} \delta$  для наступних умов: горизонтальне прокладання  $S = 125,53$  м, його середня похибка  $m_S = 0,025$  м, кут нахилу  $\delta = 28^\circ 15'$  виміряно з середньою похибкою  $m_\delta = 30''$ .

*Розв'язок.*

Застосовуючи формулу для похибки функції, знайдемо її в загальному вигляді

$$m_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \delta}\right)^2 m_\delta^2.$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial h}{\partial S} = \operatorname{tg} \delta; \quad \frac{\partial h}{\partial \delta} = \frac{S}{\cos^2 \delta}.$$

Підставляючи їх у вираз для  $m_h^2$ , отримаємо

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \delta \cdot m_S^2 + \frac{S^2}{\cos^4 \delta} \frac{m_\delta^2}{\rho^2}.$$

В математиці кутові величини завжди подаються в аналітичній (радіанній) мірі. Тому в прикладі для переходу до аналітичної міри похибку  $m_\delta$ , виражену в секундах градусної міри, ділимо на коефіцієнт переходу  $\rho = 206265'' \approx 2'' \cdot 10^5$ . Тоді

$$m_h^2 = 0,289 \cdot 6,25 \cdot 10^{-4} + \frac{15758}{0,602} \frac{900}{4 \cdot 10^{10}} = 7,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Звідси

$$m_h = 2,78 \cdot 10^{-2} = 0,028 \text{ м}.$$

### Задача 4.4

Визначити похибку положення за координатними осями пункту  $K$ , отриманого полярною засічкою (рис 1). Результати вимірювання  $\beta = 93^\circ 15' 48'' \pm 7,3''$ ;  $S = 584,903 \pm 0,038$  м. Вихідні дані:  $X_A = 21068,707$ ;  $Y_A = 73302,019$ ;  $\alpha_0 = 338^\circ 03' 06''$ .

*Розв'язок*

1. Обчислимо координати пункту  $K$ .

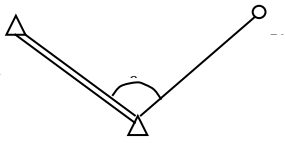
$$X_K = X_A + S \cos \alpha;$$

$$Y_K = Y_A + S \sin \alpha;$$

$$\alpha = \alpha_0 + \beta.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/19

Підставивши числові значення, отримаємо  $\alpha = 71^\circ 18' 54''$ ,  $\sin \alpha = 0,947294$  та  $\cos \alpha = 0,32065$ . Звідси  $X_K = 21265,089$ ;  $Y_K = 73856,094$ .



2. Знайдемо похибки  $m_X$  та  $m_Y$  пункту  $K$ , використовуючи формули для обчислення координат.

У відповідності з формулою похибки для функції вигляду  $y = x + k$ ,  $m_\alpha = m_\beta = 7,3''$ . Частинні похідні від оцінюваних функцій  $X_K$  та  $Y_K$  за незалежними аргументами  $S$  і  $\alpha$  будуть рівні

$$\frac{\partial X_K}{\partial S} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial X_K}{\partial \alpha} = -S \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial Y_K}{\partial S} = \sin \alpha; \quad \frac{\partial Y_K}{\partial \alpha} = S \cos \alpha.$$

3. Підставляючи знайдені частинні похідні в формулу для похибки функції, в загальному вигляді отримаємо

$$m_X^2 = \left( \frac{\partial X_K}{\partial S} \right)^2 \cdot m_S^2 + \left( \frac{\partial X_K}{\partial \alpha} \right)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} = \cos^2 \alpha \cdot m_S^2 + S^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2};$$

$$m_Y^2 = \left( \frac{\partial Y_K}{\partial S} \right)^2 \cdot m_S^2 + \left( \frac{\partial Y_K}{\partial \alpha} \right)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} = \sin^2 \alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}.$$

Підставивши в ці формули чисельні значення знайдемо необхідні похибки

$$m_X^2 = 5,33 \cdot 10^{-4}; \quad m_X = 0,023 \text{ м};$$

$$m_Y^2 = 1,92 \cdot 10^{-4}; \quad m_Y = 0,037 \text{ м}.$$

## Практичне заняття №5.

### Математична обробка нерівноточних багаторазових вимірів однієї величини.

#### Теоретичні відомості

Обробка нерівноточних вимірів однієї величини здійснюється за такою схемою.

1. Визначається найбільш ймовірне значення вимірюваної величини (загальне середнє арифметичне значення)  $\bar{X}$  за такими формулами:

$$\bar{X} = \frac{[px]}{[p]} \quad (25)$$

або

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} \quad (26)$$

2. Середню квадратичну похибку одиниці ваги.

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \quad (27)$$

3. Похибку середньої квадратичної похибки одиниці ваги.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/20

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} \quad (28)$$

4. Середню квадратичну похибку арифметичної середньої.

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \quad (29)$$

5. Контроль обчислень проводиться за рівностями

$$[pv] = 0 \quad (30)$$

та

$$[pvv] = [pv\delta] \quad (31)$$

Якщо при визначенні середнього арифметичного є похибка округлення  $\beta = \bar{X} - \bar{X}_{точне}$ , то виконується рівність

$$[pv] = -\beta[p] \quad (32)$$

### Задача 5.1

Висотна позначка ( $H$ ) вузлового репера отримана з різною точністю з 8 нівелірних ходів. Результати вимірів наведено в табл. 7.

Таблиця 7

№ ходу	$H_{табл}, м$	$m_{табл}, мм$
1	374,627	3,2
2	374,622	5,4
3	374,617	6,1
4	374,623	4,3
5	374,626	2,8
6	374,620	4,3
7	374,619	4,0
8	374,625	2,9

За наведеними даними необхідно визначити:

1. Найбільш ймовірне значення позначки вузлового репера (загальне середнє арифметичне значення).
2. Середню квадратичну похибку одиниці ваги.
3. Похибку середньої квадратичної похибки одиниці ваги.
4. Середню квадратичну похибку арифметичної середньої.

*Розв'язок*

Для розв'язання задачі скласти табл. 8.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/21

Таблиця 8

№ ходу	$H, м$	$m, мм$	$m^2$	$p$	$pH$	$v, мм$	$pv$	$pvv$
1	374,627	3,2	10,24	3,63	1359,896	3	10,89	32,67
2	374,622	5,4	29,16	1,28	479,516	-2	-2,56	5,12
3	374,617	6,1	37,21	1,00	374,617	-7	-7	49
4	374,623	4,3	18,49	2,01	752,992	-1	-2,01	2,01
5	374,626	2,8	7,84	4,75	1779,474	2	9,5	19
6	374,620	4,3	18,49	2,01	752,986	-4	-8,04	32,16
7	374,619	4,0	16	2,33	872,862	-5	-11,65	58,25
8	374,625	2,9	8,41	4,42	1655,843	1	4,42	4,42
$\Sigma$	-	-	-	<b>21,43</b>	<b>8028,186</b>	-	<b>-6,45</b>	<b>202,63</b>

1. Вага вимірів знаходиться за формулою

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2},$$

де  $\mu_0$  – постійна величина, за яку приймають величину максимальної середньої квадратичної похибки вимірів (в загальному випадку довільна величина).

В нашому прикладі  $\mu_0 = 6,1$  мм.

2. Найбільш ймовірна висотна позначка вузлового репера знаходиться за виразом

$$\bar{H} = \frac{[pH]}{[p]} = \frac{8028,186}{21,43} = 374,623705 \text{ м} \approx 374,624 \text{ м}.$$

Похибка округлення  $\beta = \bar{H} - \bar{H}_{точне} = 0,295$  мм.

3. Відхилення  $v_i$  визначають як різницю між вимірним значенням  $H_i$  та середнім арифметичним  $\bar{H}$

$$v_i = H_i - \bar{H}.$$

4. Середня квадратична похибка одиниці ваги обчислюється наступним чином

$$\mu_H = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{202,63}{8-1}} = 5,4 \text{ мм}.$$

5. Знаходиться похибка середньої квадратичної одиниці ваги

$$m_\mu = \frac{\mu_H}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{5,4}{\sqrt{2(8-1)}} = 1,5 \text{ мм}.$$

6. Визначається середня квадратична похибка найбільш ймовірного значення

$$m_{\bar{H}} = \frac{\mu_H}{\sqrt{[p]}} = \frac{5,4}{\sqrt{21,43}} = 1,2 \text{ мм}.$$

7. Контроль обчислень проведемо за формулою  $[pv] = -\beta[p]$ .

$$[pv] = -6,45;$$

$$-\beta[p] = -0,295 \cdot 21,43 = -6,32.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/22

## Задача 5.2

При дослідженні теодоліта один і той же кут був виміряний 8 разів з різним числом прийомів.

В табл. 9 наведені середні арифметичні значення кутів  $\alpha$ , число прийомів  $n$  і середні квадратичні похибки  $m$  результатів вимірів з одного прийому.

Таблиця 9

№ виміру	$\alpha_{\text{табл}}$	$n$	$m''$
1	76°23'01"	7	3,0
2	76°23'05"	11	5,1
3	76°23'02"	6	4,2
4	76°23'07"	9	6,1
5	76°23'04"	3	2,8
6	76°23'03"	12	7,0
7	76°23'06"	8	2,7
8	76°23'09"	5	3,5

Необхідно визначити:

1. Найбільш ймовірне значення кута (загальне середнє арифметичне значення).
2. Середню квадратичну похибку одиниці ваги.
3. Похибку середньої квадратичної похибки одиниці ваги.
4. Середню квадратичну похибку арифметичної середньої.

### Розв'язок

Для розв'язування складається табл. 10.

Таблиця 10

№ виміру	$\alpha$	$n$	$m''$	$m_a$	$m_a^2$	$p$	$\delta''$	$p\delta$	$v''$	$p\nu$	$p\nu\delta$	$p\nu\nu$
1	76° 23' 01"	7	3,0	1,1	1,21	3,31	0	0,00	-3	-9,93	0	29,79
2	76° 23' 05"	11	5,1	1,5	2,25	1,78	4	7,12	1	1,78	7,12	1,78
3	76° 23' 02"	6	4,2	1,7	2,89	1,38	1	1,38	-2	-2,76	-2,76	5,52
4	76° 23' 07"	9	6,1	2,0	4,00	1,00	6	6,00	3	3	18	9,00
5	76° 23' 04"	3	2,8	1,6	2,56	1,56	3	4,68	0	0	0	0,00
6	76° 23' 03"	12	7,0	2,0	4,00	1,00	2	2,00	-1	-1	-2	1,00
7	76° 23' 06"	8	2,7	1,0	1,00	4,00	5	20,00	2	8	40	16,00
8	76° 23' 09"	5	3,5	1,6	2,56	1,56	8	12,48	5	7,8	62,4	39,00
$\Sigma$	-	-	-	-	-	15,59	-	53,66	-	6,89	122,76	102,09

1. Визначаємо середню квадратичну похибку вимірювання кутів, яку знаходять за формулою

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/23

$$m_{\alpha} = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

де  $m$  – середня квадратична похибка вимірювання кута одним прийомом;  $n$  – число прийомів.

2. Вага вимірів знаходиться за формулою

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_{\alpha_i}^2},$$

де  $\mu_0$  – постійна величина, за яку приймають величину максимальної середньої квадратичної похибки вимірів.

В нашому прикладі  $\mu_0 = 2,0''$ .

3. Оскільки при переведенні градусів та хвилин в секунди отримуються великі числа, то для визначення середнього арифметичного значення застосуємо спосіб "хибного нуля". Виберемо з ряду вимірів  $\alpha_i$  деяке значення  $\alpha_0$  (наприклад мінімальне) і обчислимо відхилення  $\delta_i$  виміряних значень від "хибного нуля"  $\alpha_0$ .

$$\delta_i = \alpha_i - \alpha_0.$$

В нашому випадку  $\alpha_0 = 76^{\circ} 23' 01''$ .

4. Тоді найбільш ймовірне значення кута знаходиться за виразом

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 76^{\circ} 23' 01'' + \frac{53,66}{15,59} = 76^{\circ} 23' 01'' + 3,442'' = 76^{\circ} 23' 04''.$$

Похибка округлення  $\beta = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{точне} = -0,442''$ .

5. Відхилення  $v_i$  визначають як різницю між вимірним значенням  $\alpha_i$  та середнім арифметичним  $\bar{\alpha}$

$$v_i = \alpha_i - \bar{\alpha}.$$

6. Середня квадратична похибка одиниці ваги обчислюється наступним чином

$$\mu_{\alpha} = \sqrt{\frac{[pvv]}{N-1}} = \sqrt{\frac{102,09}{8-1}} = 3,8'',$$

де  $N$  – кількість вимірів.

7. Похибка середньої квадратичної одиниці ваги

$$m_{\mu} = \frac{\mu_{\alpha}}{\sqrt{2(N-1)}} = \frac{3,8}{\sqrt{2(8-1)}} = 1,0''.$$

8. Середня квадратична похибка найбільш ймовірного значення

$$m_{\bar{\alpha}} = \frac{\mu_{\alpha}}{\sqrt{[p]}} = \frac{3,8}{\sqrt{15,59}} = 1,0''.$$

9. Контроль обчислень проведемо за формулами  $[pvv] = [pv\delta]$  та  $[pv] = -\beta[p]$ .

За результатами обчислень отримаємо  $[pvv] = 102,09$ ;  $[pv\delta] = 122,76$ .

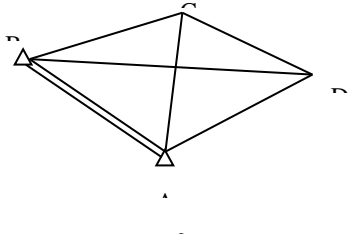
Розбіжність між значеннями є допустимою.

За другою рівністю результати однакові  $[pv] = 6,89$ ;  $-\beta[p] = 6,89$ .

## Практичне заняття №6.

### Зрівнювання геодезичного чотирикутника.

В чотирикутнику ABCD (рис 2) з однаковою точністю виміряні всі кути  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ . Провести зрівнювання вимірних кутів корелатним методом.



### Розв'язок

Розглянемо порядок зрівнювання на наступному прикладі. В табл. 11 наведено значення вимірних кутів.

Таблиця 11

Кути	Значення кутів
1	11°30'04"
2	76°07'04"
3	68°23'25"
4	23°59'25"
5	54°06'05"
6	33°31'02"
7	57°04'02"
8	35°19'02"

Зрівнювання розпочинається з визначення кількості умовних рівнянь.

- Число всіх умовних рівнянь  $S$  знаходять за формулою

$$S = N - 2(n - 2)$$

$N$  – число вимірних кутів;  $n$  – число всіх пунктів в мережі.

В нашому випадку  $S = 8 - 2(4 - 2) = 4$ ;

- Число умовних рівнянь сторін визначається з виразу

$$C = P - 2n + 3$$

$P$  – число всіх сторін в мережі.

Для наведеного прикладу  $C = 6 - 2 \times 4 + 3 = 1$

- Число рівнянь фігур знаходимо за формулою

$$F = S - C - g = N - P - g + 1$$

$g$  – число умов горизонту рівне числу центральних точок в системі.

$$F = 4 - 1 - 0 = 8 - 6 - 0 + 1 = 3$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/25

Складаємо умовні рівняння, в які будуть входити три рівняння фігур і одне рівняння сторін.

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 180^\circ = \omega_1 \\ F_2 &= \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 - 180^\circ = \omega_2 \\ F_3 &= \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 180^\circ = \omega_3 \end{aligned} \right\} - \text{рівняння фігур}$$

$$F_4 = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 \sin \alpha_7}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 \sin \alpha_8} - 1 = \omega_4 - \text{рівняння сторін}$$

Підставивши значення вимірних кутів в рівняння, знайдемо нев'язки  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -2'' \\ \omega_2 &= 11'' \\ \omega_3 &= -3'' \\ \omega_4 &= 55,87 \end{aligned}$$

(зауваження: отримане з рівняння сторін значення слід помножити на коефіцієнт переходу  $\rho = 206265''$ )

Визначаємо коефіцієнти системи рівнянь:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} = 1; & a_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} = 1; & a_3 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_3} = 1; & a_4 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_4} = 1; & a_5 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_5} = 0; & a_6 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_6} = 0; \\ a_7 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_7} = 0; & a_8 &= \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_8} = 0; \\ b_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} = 0; & b_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} = 0; & b_3 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_3} = 0; & b_4 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_4} = 0; & b_5 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_5} = 1; & b_6 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_6} = 1; \\ b_7 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_7} = 1; & b_8 &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_8} = 1; \\ c_1 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1} = 0; & c_2 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_2} = 0; & c_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_3} = 1; & c_4 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_4} = 1; & c_5 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_5} = 1; & c_6 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_6} = 1; \\ c_7 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_7} = 0; & c_8 &= \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_8} = 0; \\ d_1 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_1} = ctg \alpha_1 = 4,91; & d_2 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_2} = -ctg \alpha_2 = -0,25; & d_3 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_3} = ctg \alpha_3 = 0,40; \\ d_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_4} = -ctg \alpha_4 = -2,25; & d_5 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_5} = ctg \alpha_5 = 0,72; & d_6 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_6} = -ctg \alpha_6 = -1,51; \\ d_7 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_7} = ctg \alpha_7 = 0,65; & d_8 &= \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_8} = -ctg \alpha_8 = -1,41. \end{aligned}$$

Складаємо таблицю, яка має наступний вигляд (табл. 12)

Таблиця 12

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>	<i>bb</i>	<i>bc</i>	<i>bd</i>	<i>cc</i>	<i>cd</i>	<i>dd</i>
1	1,00	0,00	0,00	4,91	1,00	0,00	0,00	4,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	24,11
2	1,00	0,00	0,00	-0,25	1,00	0,00	0,00	-0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06
3	1,00	0,00	1,00	0,40	1,00	0,00	1,00	0,40	0,00	0,00	0,00	1,00	0,40	0,16
4	1,00	0,00	1,00	-2,25	1,00	0,00	1,00	-2,25	0,00	0,00	0,00	1,00	-2,25	5,06
5	0,00	1,00	1,00	0,72	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,72	1,00	0,72	0,52
6	0,00	1,00	1,00	-2,25	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	-1,51	1,00	-1,51	2,28
7	0,00	1,00	0,00	-1,51	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,65	0,00	0,00	0,42
8	0,00	1,00	0,00	0,65	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-1,41	0,00	0,00	1,99
<b>Σ</b>					<b>4,00</b>	<b>0,00</b>	<b>2,00</b>	<b>2,81</b>	<b>4,00</b>	<b>2,00</b>	<b>-1,55</b>	<b>4,00</b>	<b>-2,64</b>	<b>34,60</b>



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/26

Складаємо систему рівнянь для визначення корелатів

$$\begin{cases} [aa]K_1 + [ab]K_2 + [ac]K_3 + [ad]K_4 + \omega_1 = 0 \\ [ab]K_1 + [bb]K_2 + [bc]K_3 + [bd]K_4 + \omega_2 = 0 \\ [ac]K_1 + [bc]K_2 + [cc]K_3 + [cd]K_4 + \omega_3 = 0 \\ [ad]K_1 + [bd]K_2 + [cd]K_3 + [dd]K_4 + \omega_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4K_1 + 2K_3 + 2,81K_4 - 2 = 0 \\ 4K_2 + 2K_3 - 1,55K_4 + 11 = 0 \\ 2K_1 + 2K_2 + 4K_3 - 2,64K_4 - 3 = 0 \\ 2,81K_1 - 1,55K_2 - 2,64K_3 + 34,60K_4 + 55,87 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь будь-яким способом, отримаємо наступні значення корелатів:

$$K_1 = 1,43, K_2 = -3,83, K_3 = 0,73, K_4 = -1,85.$$

Обчислення поправок  $\epsilon$  до вимірних величин здійснимо в табл. 14

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1K_1 + b_1K_2 + c_1K_3 + d_1K_4; \\ v_2 &= a_2K_1 + b_2K_2 + c_2K_3 + d_2K_4; \\ &\dots\dots\dots; \\ v_n &= a_nK_1 + b_nK_2 + c_nK_3 + d_nK_4. \end{aligned}$$

Таблиця 13

№	$aK_1$	$bK_2$	$cK_3$	$dK_4$	$v$	$vv$	$K$	$\omega$	$K\omega$
1	1,43	0,00	0,00	-9,08	-7,65	58,52	1,43	-2,00	-2,86
2	1,43	0,00	0,00	0,46	1,89	3,57	-3,83	11,00	-42,13
3	1,43	0,00	0,73	-0,74	1,42	2,02	0,73	-3,00	-2,19
4	1,43	0,00	0,73	4,16	6,32	39,94	-1,85	55,87	-103,36
5	0,00	-3,83	0,73	-1,33	-4,43	19,62			
6	0,00	-3,83	0,73	2,79	-0,31	0,10			
7	0,00	-3,83	0,00	-1,20	-5,03	25,30			
8	0,00	-3,83	0,00	2,61	-1,22	1,49			
$\Sigma$						150,56			-150,54

Проводимо перевірку:  $[vv] = -[K\omega]$

Визначаємо зрівнені та остаточні значення кутів (табл. 14). Для цього поправки  $\epsilon$  записуємо з точністю до сотих секунди. З такою ж точністю записуємо зрівнені значення кутів, а остаточні округлюємо до десятих долей секунди

Таблиця 14

№	Кут			$v''$	Зрівнене значення кута			Остаточне значення кута		
	°	'	"		°	'	"	°	'	"
1	11	30	4	-7,65	11	29	56,35	11	29	56,4
2	76	7	4	1,89	76	7	5,89	76	7	5,9
3	68	23	25	1,42	68	23	26,42	68	23	26,4
4	23	59	25	6,32	23	59	31,32	23	59	31,3

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015							Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1		
	Екземпляр № 1							Арк 49/27		

5	54	6	5	-4,43	54	6	0,57	54	6	0,6
6	33	31	2	-0,31	33	31	1,69	33	31	1,7
7	57	4	2	-5,03	57	3	56,97	57	3	57,0
8	35	19	2	-1,22	35	19	0,78	35	19	0,8

Для контролю підставимо остаточні значення кутів в умовні рівняння  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , в яких нев'язки повинні зникнути.

Визначення середньої квадратичної похибки виміряних величин за їх відхиленнями від зрівнених значень здійснюється за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{r}} = \sqrt{\frac{150,56}{4}} = 6,1'',$$

де  $r$  – кількість надлишкових вимірів.

Визначення середньої квадратичної похибки зрівнених значень здійснюється за формулою

$$M = m \sqrt{\frac{N-r}{N}} = 6,1 \sqrt{\frac{8-4}{8}} = 4,3'',$$

де  $N$  – кількість всіх вимірів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/28

## Додатки

Додаток 1

**Значення функції**  $\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0479	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1035	0,1114	0,1193	0,1271	0,1350	0,1429	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2811	0,2886	0,2960	0,3034
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3400	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3758
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6527	0,6579	0,6630	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7418	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7776	0,7813	0,7850	0,7887	0,7924	0,7959	0,7995	0,8030
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8530	0,8557	0,8585	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8754	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9511	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9615	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9742	0,9749	0,9755	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9785	0,9791	0,9796	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9831
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9868	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9882	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/29

Додаток 2

**Значення критичних точок розподілу Стьюдента**

Число ступенів свободи $k$	Критичні точки розподілу Стьюдента $t_\gamma$					
	Значення ймовірності $\gamma$					
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/30

40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Додаток 3

**Значення критичних точок розподілу  $\chi^2$**

Число ступенів в свободі $k$	Критичні точки розподілу $\chi^2$					
	Рівень істотності $p$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/31

27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

### Завдання для виконання робіт

#### Задача 1.1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Дійсне значення кута	48°	50°	31°	46°	38°	59°	67°	74°	37°	41°
	39'	41'	43'	52'	27'	48'	32'	56'	35'	29'
	36,4''	42,2''	14,8''	28,5''	34,9''	21,8''	10,3''	44,2''	32,7''	27,4''
<b>Виміряні значення в секундах</b>										
1.	40	44	13	28	36	19	3	45	31	27
2.	37	43	11	29	38	21	11	42	29	28
3.	31	41	12	30	39	18	19	44	30	29
4.	32	40	10	31	40	24	6	40	28	30
5.	32	44	6	30	39	17	14	44	24	29
6.	38	43	15	25	36	31	10	43	33	24
7.	34	38	14	20	31	13	5	44	32	36
8.	43	38	18	36	37	26	14	53	36	35
9.	30	46	26	33	34	30	12	44	41	32
10.	38	47	19	23	31	27	6	42	37	22
11.	39	46	20	29	46	28	20	49	38	30
12.	45	45	19	37	29	17	6	51	37	36
13.	33	41	19	30	27	14	4	37	37	26
14.	39	42	18	39	37	24	8	51	36	19
15.	44	46	10	21	28	29	5	38	28	20
16.	27	46	15	22	33	28	8	37	33	21
17.	43	44	11	26	39	18	15	42	29	25
18.	31	41	11	29	32	24	14	43	36	28
19.	39	41	14	26	30	24	9	47	32	25
20.	31	43	12	30	31	18	1	43	30	26
21.	30	47	12	31	40	19	14	36	29	30
22.	39	32	12	30	30	19	21	44	30	31
23.	27	43	18	31	29	20	9	46	36	30
24.	36	45	14	23	38	20	17	48	31	22
25.	39	45	15	23	31	23	6	52	33	22
26.	44	33	21	23	38	20	7	41	39	33

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015							Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1		
	Екземпляр № 1							Арк 49/32		

27.	30	50	11	26	38	20	9	45	29	25
28.	38	31	15	22	38	15	12	38	33	21
29.	39	46	20	43	36	23	16	36	38	23
30.	37	40	19	22	35	30	7	52	37	34

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Дійсне значення кута	43°	104°	25°	86°	66°	52°	57°	112°	107°	76°
	24'	29'	17'	4'	41'	29'	54'	30'	27'	46'
	23,8"	48,2"	40,6"	21,1"	24,9"	13,7"	41,5"	16,5"	19,7"	26,9"
<b>Виміряні значення в секундах</b>										
1.	20	47	45	23	17	11	38	14	18	18
2.	28	38	41	22	25	8	36	26	18	31
3.	27	41	36	20	27	11	39	8	27	24
4.	19	42	36	19	33	12	40	18	15	34
5.	24	46	36	23	28	13	41	19	18	23
6.	20	49	42	22	16	9	37	12	14	33
7.	27	45	39	16	18	15	43	25	18	30
8.	23	47	47	17	37	12	40	20	30	32
9.	21	51	34	25	29	19	47	23	26	26
10.	20	49	43	26	25	14	42	19	15	33
11.	21	50	38	17	21	12	40	10	9	27
12.	27	54	49	24	20	6	34	22	14	34
13.	23	43	37	20	17	15	43	11	22	29
14.	24	54	43	21	20	16	44	16	22	25
15.	30	46	48	25	31	27	55	15	17	22
16.	20	42	32	17	30	8	36	12	16	20
17.	24	62	47	23	29	18	46	8	21	31
18.	29	55	35	20	20	18	46	18	28	28
19.	28	52	43	20	23	19	47	20	21	31
20.	38	48	35	22	33	10	38	15	15	28
21.	14	43	34	25	25	12	40	21	11	28
22.	25	44	39	11	27	14	42	16	23	38
23.	21	53	50	21	23	15	42	15	11	19
24.	18	50	40	24	27	14	41	7	28	26
25.	24	46	43	18	27	11	39	12	31	19
26.	28	55	48	31	25	13	40	22	21	25
27.	25	41	35	29	25	18	46	16	26	25
28.	24	50	39	10	27	15	43	18	21	23

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015								Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1								Арк 49/33	

29.	20	50	43	24	21	18	46	22	24	18
30.	22	57	42	19	24	11	39	18	17	29

Варіант	21	22	23	24	25
Дійсне значення кута	53° 43' 19,8"	56° 51' 16,2"	54° 12' 40,2"	62° 21' 26,4"	119° 22' 17,2"
<b>Виміряні значення в секундах</b>					
1.	16	16	40	24	17
2.	23	25	40	30	12
3.	21	24	43	24	11
4.	20	24	50	36	13
5.	16	17	30	33	20
6.	22	11	44	24	18
7.	19	18	34	23	7
8.	24	14	39	31	26
9.	10	14	46	26	12
10.	16	9	35	27	16
11.	19	23	36	30	21
12.	18	10	41	33	13
13.	25	23	31	28	24
14.	13	16	34	26	17
15.	20	10	43	17	26
16.	11	12	48	28	13
17.	25	20	41	17	20
18.	23	12	38	22	17
19.	12	17	51	24	11
20.	26	14	31	29	20
21.	24	10	41	23	25
22.	16	20	39	24	15
23.	21	14	43	33	18
24.	23	19	41	29	17
25.	20	13	42	26	19
26.	26	13	45	29	14
27.	25	19	34	21	22
28.	15	13	43	28	29
29.	20	24	48	17	10
30.	23	15	36	34	15



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/34

### Задача 2.1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8
Довірча ймовірність	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$
<b>Виміряні значення, м</b>								
1.	56,362	49,558	64,778	73,827	36,721	42,358	62,677	52,366
2.	56,361	49,567	64,781	73,814	36,716	42,359	62,683	52,356
3.	56,357	49,552	64,781	73,812	36,718	42,364	62,689	52,363
4.	56,352	49,562	64,783	73,824	36,721	42,355	62,687	52,365
5.	56,367	49,562	64,784	73,816	36,719	42,362	62,669	52,356
6.	56,365	49,569	64,775	73,823	36,715	42,359	62,683	52,357
7.	56,354	49,557	64,785	73,824	36,724	42,356	62,678	52,357
8.	56,360	49,563	64,781	73,817	36,724	42,361	62,678	52,358
9.	56,368	49,568	64,776	73,821	36,725	42,365	62,680	52,358
10.	56,358	49,551	64,782	73,820	36,714	42,369	62,677	52,361
11.	56,350	49,553	64,779	73,822	36,723	42,355	62,681	52,358

Варіант	9	10	11	12	13	14	15	16
Довірча ймовірність	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$
<b>Виміряні значення, м</b>								
1.	82,728	73,478	52,558	85,827	32,358	65,362	77,677	46,778
2.	82,738	73,488	52,567	85,814	32,359	65,361	77,683	46,781
3.	82,729	73,480	52,552	85,812	32,364	65,357	77,689	46,781
4.	82,735	73,477	52,562	85,824	32,355	65,352	77,687	46,783
5.	82,721	73,479	52,562	85,816	32,362	65,367	77,669	46,784
6.	82,726	73,482	52,569	85,823	32,359	65,365	77,683	46,775
7.	82,727	73,482	52,557	85,824	32,356	65,354	77,678	46,785
8.	82,739	73,481	52,563	85,817	32,361	65,360	77,678	46,781
9.	82,734	73,477	52,568	85,821	32,365	65,368	77,680	46,776
10.	82,725	73,477	52,551	85,820	32,369	65,358	77,677	46,782
11.	82,722	73,476	52,553	85,822	32,355	65,350	77,681	46,779

Варіант	17	18	19	20	21	22	23	24
Довірча ймовірність	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,98$
<b>Виміряні значення, м</b>								
1.	84,366	51,721	36,728	49,478	88,362	73,778	25,721	37,677
2.	84,356	51,716	36,738	49,488	88,361	73,781	25,716	37,683

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015						Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1						Арк 49/35	

3.	84,363	51,718	36,729	49,480	88,357	73,781	25,718	37,689
4.	84,365	51,721	36,735	49,477	88,352	73,783	25,721	37,687
5.	84,356	51,719	36,721	49,479	88,367	73,784	25,719	37,669
6.	84,357	51,715	36,726	49,482	88,365	73,775	25,715	37,683
7.	84,357	51,724	36,727	49,482	88,354	73,785	25,724	37,678
8.	84,358	51,724	36,739	49,481	88,360	73,781	25,724	37,678
9.	84,358	51,725	36,734	49,477	88,368	73,776	25,725	37,680
10.	84,361	51,714	36,725	49,477	88,358	73,782	25,714	37,677
11.	84,358	51,723	36,722	49,476	88,350	73,779	25,723	37,681

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВК3.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/36

### Задача 2.2

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Дійсне значення кута	48°	50°	31°	46°	38°	59°	67°	74°	37°	41°
	39'	41'	43'	52'	27'	48'	32'	56'	35'	29'
	36,4''	42,2''	14,8''	28,5''	34,9''	21,8''	10,3''	44,2''	32,7''	27,4''

#### Виміряні значення в секундах

31.	40	44	13	28	36	19	3	45	31	27
32.	37	43	11	29	38	21	11	42	29	28
33.	31	41	12	30	39	18	19	44	30	29
34.	32	40	10	31	40	24	6	40	28	30
35.	32	44	6	30	39	17	14	44	24	29
36.	38	43	15	25	36	31	10	43	33	24
37.	34	38	14	20	31	13	5	44	32	36
38.	43	38	18	36	37	26	14	53	36	35
39.	30	46	26	33	34	30	12	44	41	32
40.	38	47	19	23	31	27	6	42	37	22
41.	39	46	20	29	46	28	20	49	38	30
42.	45	45	19	37	29	17	6	51	37	36
43.	33	41	19	30	27	14	4	37	37	26
44.	39	42	18	39	37	24	8	51	36	19
45.	44	46	10	21	28	29	5	38	28	20
46.	27	46	15	22	33	28	8	37	33	21
47.	43	44	11	26	39	18	15	42	29	25
48.	31	41	11	29	32	24	14	43	36	28
49.	39	41	14	26	30	24	9	47	32	25
50.	31	43	12	30	31	18	1	43	30	26
51.	30	47	12	31	40	19	14	36	29	30
52.	39	32	12	30	30	19	21	44	30	31
53.	27	43	18	31	29	20	9	46	36	30
54.	36	45	14	23	38	20	17	48	31	22
55.	39	45	15	23	31	23	6	52	33	22
56.	44	33	21	23	38	20	7	41	39	33
57.	30	50	11	26	38	20	9	45	29	25
58.	38	31	15	22	38	15	12	38	33	21
59.	39	46	20	43	36	23	16	36	38	23
60.	37	40	19	22	35	30	7	52	37	34

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015							Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1							Арк 49/ 37	

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Дійсне значення кута	43°	104°	25°	86°	66°	52°	57°	112°	107°	76°
	24'	29'	17'	4'	41'	29'	54'	30'	27'	46'
	23,8"	48,2"	40,6"	21,1"	24,9"	13,7"	41,5"	16,5"	19,7"	26,9"
<b>Виміряні значення в секундах</b>										
31.	20	47	45	23	17	11	38	14	18	18
32.	28	38	41	22	25	8	36	26	18	31
33.	27	41	36	20	27	11	39	8	27	24
34.	19	42	36	19	33	12	40	18	15	34
35.	24	46	36	23	28	13	41	19	18	23
36.	20	49	42	22	16	9	37	12	14	33
37.	27	45	39	16	18	15	43	25	18	30
38.	23	47	47	17	37	12	40	20	30	32
39.	21	51	34	25	29	19	47	23	26	26
40.	20	49	43	26	25	14	42	19	15	33
41.	21	50	38	17	21	12	40	10	9	27
42.	27	54	49	24	20	6	34	22	14	34
43.	23	43	37	20	17	15	43	11	22	29
44.	24	54	43	21	20	16	44	16	22	25
45.	30	46	48	25	31	27	55	15	17	22
46.	20	42	32	17	30	8	36	12	16	20
47.	24	62	47	23	29	18	46	8	21	31
48.	29	55	35	20	20	18	46	18	28	28
49.	28	52	43	20	23	19	47	20	21	31
50.	38	48	35	22	33	10	38	15	15	28
51.	14	43	34	25	25	12	40	21	11	28
52.	25	44	39	11	27	14	42	16	23	38
53.	21	53	50	21	23	15	42	15	11	19
54.	18	50	40	24	27	14	41	7	28	26
55.	24	46	43	18	27	11	39	12	31	19
56.	28	55	48	31	25	13	40	22	21	25
57.	25	41	35	29	25	18	46	16	26	25
58.	24	50	39	10	27	15	43	18	21	23
59.	20	50	43	24	21	18	46	22	24	18
60.	22	57	42	19	24	11	39	18	17	29

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/38

Варіант	21	22	23	24	25
Дійсне значення кута	53° 43' 19,8"	56° 51' 16,2"	54° 12' 40,2"	62° 21' 26,4"	119° 22' 17,2"
<b>Виміряні значення в секундах</b>					
31.	16	16	40	24	17
32.	23	25	40	30	12
33.	21	24	43	24	11
34.	20	24	50	36	13
35.	16	17	30	33	20
36.	22	11	44	24	18
37.	19	18	34	23	7
38.	24	14	39	31	26
39.	10	14	46	26	12
40.	16	9	35	27	16
41.	19	23	36	30	21
42.	18	10	41	33	13
43.	25	23	31	28	24
44.	13	16	34	26	17
45.	20	10	43	17	26
46.	11	12	48	28	13
47.	25	20	41	17	20
48.	23	12	38	22	17
49.	12	17	51	24	11
50.	26	14	31	29	20
51.	24	10	41	23	25
52.	16	20	39	24	15
53.	21	14	43	33	18
54.	23	19	41	29	17
55.	20	13	42	26	19
56.	26	13	45	29	14
57.	25	19	34	21	22
58.	15	13	43	28	29
59.	20	24	48	17	10
60.	23	15	36	34	15

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/39

### Задача 3.1

№ за списком	№№ варіантів вимірів	№ за списком	№№ варіантів вимірів	№ за списком	№№ варіантів вимірів
1	1, 2, 3	11	1, 3, 7	21	1, 5, 8
2	1, 2, 4	12	1, 3, 8	22	1, 5, 9
3	1, 2, 5	13	1, 3, 9	23	1, 6, 7
4	1, 2, 6	14	1, 4, 5	24	1, 6, 8
5	1, 2, 7	15	1, 4, 6	25	1, 6, 9
6	1, 2, 8	16	1, 4, 7		
7	1, 2, 9	17	1, 4, 8		
8	1, 3, 4	18	1, 4, 9		
9	1, 3, 5	19	1, 5, 6		
10	1, 3, 6	20	1, 5, 7		

Номери варіантів вимірів					
1		2		3	
1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір
179°59'58,1"	179°59'57,8"	184°10'53,3"	184°10'55,1"	17°22'01,5"	17°22'00,9"
178°59'28,9"	178°59'29,3"	162°20'54,4"	162°20'59,7"	189°11'35,5"	189°11'51,5"
170°59'57,6"	170°59'59,2"	193°16'16,3"	193°16'17,8"	171°30'51,0"	171°30'46,6"
5°51'15,2"	5°51'16,5"	157°25'45,6"	157°25'43,9"	183°00'31,0"	183°00'44,6"
40°12'37,7"	40°12'36,5"	246°54'30,6"	246°54'26,2"	166°21'24,9"	166°21'19,7"
267°43'18,2"	267°43'22,5"	99°54'30,6"	99°54'26,2"	28°23'12,2"	28°23'10,5"
177°21'46,0"	177°21'46,7"	168°38'57,7"	168°38'52,9"	181°14'41,8"	181°14'42,8"
179°53'18,5"	179°53'21,5"	114°58'49,3"	114°58'44,9"	178°49'35,8"	178°49'35,1"
180°04'01,0"	180°03'59,5"	143°29'52,5"	143°29'56,9"	181°07'21,9"	181°07'27,0"
179°54'00,5"	179°54'02,2"	145°09'11,0"	145°09'04,4"	170°47'24,3"	170°47'24,5"
Номери варіантів вимірів					
4		5		6	
1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір
159°45'59,0"	159°45'55,0"	180°53'26,7"	180°53'25,2"	89°10'28,5"	89°10'28,5"
213°09'41,1"	213°09'33,8"	179°35'13,2"	179°35'12,2"	226°00'22,5"	226°00'21,5"
147°47'02,2"	147°46'56,2"	263°00'33,2"	263°00'40,5"	179°44'44,0"	179°44'38,5"
199°33'14,8"	199°33'16,4"	106°33'09,5"	106°33'10,7"	179°44'12,5"	179°44'09,5"
184°58'01,7"	184°58'01,5"	231°26'28,5"	231°26'30,2"	129°27'35,5"	129°27'38,5"
119°02'54,5"	119°02'54,7"	164°25'05,5"	164°24'59,5"	260°54'49,0"	260°54'44,5"

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015		Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1		Арк 49/40

173°54'04,0"	173°54'07,2"	184°41'18,2"	184°41'19,7"	134°42'32,0"	134°42'28,0"
252°57'41,5"	252°57'42,7"	86°13'41,5"	86°13'40,6"	189°29'00,0"	189°29'02,0"
181°15'07,2"	181°15'09,2"	203°54'55,5"	203°54'55,6"	250°14'54,5"	250°14'52,5"
286°39'20,2"	286°39'17,0"	154°41'24,0"	154°41'23,7"	196°24'11,8"	196°24'00,0"

Номери варіантів вимірів					
7		8		9	
1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір	1 вимір	2 вимір
180°06'15,2"	180°06'11,7"	180°07'11,0"	180°07'08,6"	96°09'56,3"	96°09'53,0"
46°01'42,5"	46°01'46,7"	186°47'36,8"	186°47'38,7"	179°58'22,3"	179°58'24,0"
179°49'41,5"	179°49'41,7"	165°25'10,5"	165°25'01,7"	174°46'53,5"	174°46'47,7"
179°43'24,2"	179°43'28,7"	191°13'27,7"	191°13'28,2"	148°50'00,0"	148°49'55,7"
127°34'16,2"	127°34'10,2"	193°38'40,2"	193°38'39,4"	129°45'56,4"	129°45'59,5"
213°49'14,7"	213°49'19,2"	177°23'35,0"	177°23'36,0"	49°54'38,1"	49°54'43,7"
131°56'47,5"	131°56'44,0"	180°40'29,7"	180°40'37,5"	34°28'31,3"	34°28'25,5"
187°51'18,0"	187°51'17,8"	179°26'24,5"	179°26'27,5"	111°44'12,7"	111°44'15,1"
90°38'02,9"	90°37'57,2"	174°14'16,5"	174°14'15,8"	88°37'17,8"	88°37'13,6"
218°44'35,5"	218°44'33,7"	156°43'34,0"	156°43'31,2"	135°29'37,4"	135°29'39,6"

### Задача 3.2

Варіанти											
1		2		3		4		5		6	
Різниця <i>d</i> , мм	Кількість станцій, <i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>
2,6	18	9,1	31	-6,7	19	4,1	21	-3,6	13	6,5	20
4,6	15	-1,2	33	-2,3	11	-5,6	10	-1,8	25	7,8	21
-6,1	34	4,6	19	10,8	21	-3,9	31	-1,3	11	1,4	31
-5,8	31	9,5	31	-3,7	18	10,7	22	-2,2	22	7,6	12
-4,3	17	2,8	17	-3,4	13	8,8	28	-8,4	33	1,8	22
-7,7	14	6,8	19	9,5	31	-5,4	32	3,1	23	-6,4	27
2,1	16	1,4	24	3,8	33	-1,7	15	9,2	14	-8,3	29
-2,9	21	4,4	14	8,6	26	4,4	23	5,2	34	7,2	15
3,5	10	3,6	13	-7,5	24	4,8	22	7,1	12	-4,2	11

Варіанти											
7		8		9		10		11		12	
Різниця	Кількість	<i>d</i> ,	<i>N</i>	<i>d</i> ,	<i>N</i>	<i>d</i> ,	<i>N</i>	<i>d</i> ,	<i>N</i>	<i>d</i> ,	<i>N</i>

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015								Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1								Арк 49/41	

<i>d</i> , мм	станцій, <i>N</i>	мм		мм		мм		мм		мм	
-9,4	31	-3,3	10	-0,2	14	1,3	27	7,5	33	1,4	27
5,5	17	2,9	31	-6,8	33	7,7	26	-2,1	20	6,6	35
0,1	35	7,7	15	-5,3	32	-3,5	35	6,4	14	7,7	17
-1,2	20	-6,2	28	3,1	19	4,8	21	1,9	22	-2,9	18
1,3	27	-5,6	27	5,9	16	-3,9	32	10,7	27	-6,8	12
5,2	22	1,6	24	-0,9	28	-0,1	27	-5,1	27	0,6	22
4,3	31	-9,8	35	10,1	18	-6,1	12	3,9	34	0,5	32
2,6	12	-7,2	30	-9,1	21	6,1	14	0,8	32	-7,3	14
-8,4	32	-0,1	34	-8,6	30	10,6	31	2,8	31	-0,2	13

Варіанти											
13		14		15		16		17		18	
Різниця <i>d</i> , мм	Кількість станцій, <i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>
4,7	20	6,2	25	-3,6	35	-8,1	29	-4,1	25	5,2	29
-6,5	28	-5,3	11	-6,9	15	-5,4	22	-6,7	22	-7,1	16
6,4	34	-6,4	30	-4,7	16	-4,8	28	-0,6	16	-2,1	12
-3,9	29	-8,8	10	0,1	21	2,7	33	-0,9	10	10,8	17
0,6	21	-3,1	22	-4,3	16	2,2	33	-6,5	13	2,4	14
4,3	12	10,8	19	7,1	19	-4,4	27	-9,5	20	6,6	27
0,5	31	7,5	23	10,4	33	-7,9	23	-9,3	15	-5,7	11
7,2	15	2,1	28	7,8	10	-5,1	35	8,2	13	-0,2	10
1,5	14	-5,9	23	10,2	23	10,1	17	-4,4	18	-6,2	25
Варіанти											
19		20		21		22		23		24	
Різниця <i>d</i> , мм	Кількість станцій, <i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>	<i>d</i> , мм	<i>N</i>
-8,6	16	2,9	35	5,6	10	-7,3	25	6,6	10	-7,5	34
-4,2	28	-4,6	28	1,8	32	3,2	10	2,6	22	-7,2	15
8,4	10	3,6	13	-5,8	13	-2,1	18	2,2	35	1,4	29
3,1	27	6,6	34	-5,2	26	-7,4	20	-3,7	30	0,3	35
-0,6	15	3,7	26	6,3	25	9,6	35	6,3	24	0,1	19
3,2	33	3,7	27	-4,9	23	4,7	26	-7,8	26	1,7	23
8,8	12	0,8	17	7,2	30	10,6	35	-7,7	10	-6,2	30



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1 Арк 49/42	

-3,8	16	-9,6	30	2,7	29	-5,5	20	8,3	15	-8,9	12
-4,1	18	1,3	19	1,3	31	7,7	17	7,4	22	6,1	11

### Задача 4.1

<b>1</b>	<b>2</b>
Площа ромба $S = a^2 \sin \alpha$ . Знайти похибку площі, якщо $a = 40,00 \text{ м}$ $m_a = 0,04 \text{ м}$ $\alpha = 40^\circ 35' 30''$ $m_\alpha = 5''$	Площа паралелограма $S = ab \sin \alpha$ . Знайти похибку площі, якщо $a = 25,00 \text{ м}$ $m_a = 0,025 \text{ м}$ $b = 30,00 \text{ м}$ $m_b = 0,03 \text{ м}$ $\alpha = 55^\circ 40'$ $m_\alpha = 30''$
<b>3</b>	<b>4</b>
Площа трапеції $S = \frac{a+b}{2} h$ . Знайти похибку площі, якщо $a = 20,00 \text{ м}$ $m_a = 0,02 \text{ м}$ $b = 50,00 \text{ м}$ $m_b = 0,05 \text{ м}$ $h = 30,00 \text{ м}$ $m_h = 0,03 \text{ м}$	Площа чотирикутника $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ . Знайти похибку площі, якщо $d_1 = 40,00 \text{ м}$ $m_{d_1} = 0,04 \text{ м}$ $d_2 = 60,00 \text{ м}$ $m_{d_2} = 0,06 \text{ м}$ $\alpha = 30^\circ 45'$ $m_\alpha = 10''$
<b>5</b>	<b>6</b>
Площа правильного трикутника $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ . Знайти похибку площі, якщо $a = 25 \text{ м}$ $m_a = 0,025 \text{ м}$	Площа трикутника $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ . Знайти похибку площі, якщо $a = 45 \text{ м}$ $m_a = 0,045 \text{ м}$ $b = 30 \text{ м}$ $m_b = 0,03 \text{ м}$ $\gamma = 28^\circ 40' 15''$ $m_\gamma = 1''$
<b>7</b>	<b>8</b>
Площа кругового кільця $S = \pi(R^2 - r^2)$ . Знайти похибку площі, якщо $R = 65 \text{ м}$ $m_R = 0,065 \text{ м}$ $r = 32 \text{ м}$ $m_r = 0,032 \text{ м}$	Площа кругового сектора $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$ . Знайти похибку площі, якщо $r = 54 \text{ м}$ $m_r = 0,054 \text{ м}$ $\alpha = 44^\circ 35' 20''$ $m_\alpha = 5''$
<b>9</b>	<b>10</b>
Площа кругового сегмента $S = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$ Знайти похибку площі, якщо $r = 36 \text{ м}$ $m_r = 0,036 \text{ м}$ $\alpha = 55^\circ 42' 30''$ $m_\alpha = 5''$	Площа рівнобедреного трикутника $S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha$ Знайти похибку площі, якщо $b = 23 \text{ м}$ $m_b = 0,023 \text{ м}$ $\alpha = 64^\circ 20' 35''$ $m_\alpha = 2''$
<b>11</b>	<b>12</b>
Об'єм прямокутного паралелепіпеда $V = abc$ Знайти похибку об'єму, якщо	Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда $S = 2(ab + bc + ac)$ Знайти похибку площі, якщо

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/43

$a = 25 \text{ м}$ $m_a = 0,025 \text{ м}$ $b = 38 \text{ м}$ $m_b = 0,038 \text{ м}$ $c = 44 \text{ м}$ $m_c = 0,044 \text{ м}$	$a = 20 \text{ м}$ $m_a = 0,02 \text{ м}$ $b = 30 \text{ м}$ $m_b = 0,03 \text{ м}$ $c = 40 \text{ м}$ $m_c = 0,04 \text{ м}$
<b>13</b>	<b>14</b>
Об'єм циліндра $V = \pi R^2 h$ Знайти похибку об'єму, якщо $R = 25 \text{ м}$ $m_R = 0,025 \text{ м}$ $h = 35 \text{ м}$ $m_h = 0,035 \text{ м}$	Площа поверхні циліндра $S = 2\pi(Rh + R^2)$ Знайти похибку площі, якщо $R = 34 \text{ м}$ $m_R = 0,034 \text{ м}$ $h = 23 \text{ м}$ $m_h = 0,023 \text{ м}$
<b>15</b>	<b>16</b>
Об'єм піраміди (в основі прямокутник) $V = \frac{1}{3}abh$ Знайти похибку об'єму, якщо $a = 27 \text{ м}$ $m_a = 0,027 \text{ м}$ $b = 36 \text{ м}$ $m_b = 0,036 \text{ м}$ $h = 49 \text{ м}$ $m_h = 0,049 \text{ м}$	Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ Знайти похибку об'єму, якщо $R = 34 \text{ м}$ $m_R = 0,034 \text{ м}$ $h = 47 \text{ м}$ $m_h = 0,047 \text{ м}$
<b>17</b>	<b>18</b>
Площа поверхні конуса $S = \pi Rl + \pi R^2$ Знайти похибку площі, якщо $R = 24 \text{ м}$ $m_R = 0,024 \text{ м}$ $l = 37 \text{ м}$ $m_l = 0,037 \text{ м}$	Об'єм зрізаного конуса $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$ Знайти похибку об'єму, якщо $R = 75 \text{ м}$ $m_R = 0,075 \text{ м}$ $r = 35 \text{ м}$ $m_r = 0,035 \text{ м}$ $h = 15 \text{ м}$ $m_h = 0,015 \text{ м}$
<b>19</b>	<b>20</b>
Площа бічної поверхні зрізаного конуса $S = \pi l(R + r)$ Знайти похибку площі, якщо $R = 43 \text{ м}$ $m_R = 0,043 \text{ м}$ $r = 28 \text{ м}$ $m_r = 0,028 \text{ м}$ $l = 31 \text{ м}$ $m_l = 0,031 \text{ м}$	Площа повної поверхні зрізаного конуса $S = \pi(l(R + r) + r^2 + R^2)$ Знайти похибку площі, якщо $R = 30 \text{ м}$ $m_R = 0,03 \text{ м}$ $r = 21 \text{ м}$ $m_r = 0,021 \text{ м}$ $l = 15 \text{ м}$ $m_l = 0,015 \text{ м}$
<b>21</b>	<b>22</b>
Периметр еліпса $P = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ Знайти похибку периметра, якщо $a = 23 \text{ м}$ $m_a = 0,023 \text{ м}$ $b = 34 \text{ м}$ $m_b = 0,034 \text{ м}$	Об'єм еліпсоїда $V = \frac{4}{3}\pi abc$ Знайти похибку об'єму, якщо $a = 54 \text{ м}$ $m_a = 0,054 \text{ м}$ $b = 48 \text{ м}$ $m_b = 0,048 \text{ м}$ $c = 23 \text{ м}$ $m_c = 0,023 \text{ м}$
<b>23</b>	<b>24</b>
Об'єм сферичного сегменту $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ Знайти похибку об'єму, якщо $h = 12 \text{ м}$ $m_h = 0,012 \text{ м}$ $r = 22 \text{ м}$ $m_r = 0,022 \text{ м}$	Площа поверхні тора $V = \pi^2(b^2 - a^2)$ Знайти похибку площі, якщо $a = 20 \text{ м}$ $m_a = 0,02 \text{ м}$ $b = 42 \text{ м}$ $m_b = 0,042 \text{ м}$
<b>25</b>	

Об'єм порожнистого  
циліндра  $v = \frac{1}{4}\pi h(D^2 - d^2)$   
Знайти похибку об'єму,  
якщо  
 $h = 12 \text{ м}$ ,  $m_h = 0,012 \text{ м}$   
 $D = 25 \text{ м}$ ,  $m_r = 0,025 \text{ м}$   
 $d = 17 \text{ м}$ ,  $m_r = 0,017 \text{ м}$

### Задача 5.1

1		2		3		4		5	
<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>
374,628	3,3	374,629	3,4	374,630	3,5	374,631	3,6	374,632	3,7
374,623	5,5	374,624	5,6	374,625	5,7	374,626	5,8	374,627	5,9
374,618	6,2	374,619	6,3	374,620	6,4	374,621	6,5	374,622	6,6
374,624	4,4	374,625	4,5	374,626	4,6	374,627	4,7	374,628	4,8
374,627	2,9	374,628	3,0	374,629	3,1	374,630	3,2	374,631	3,3
374,621	4,4	374,622	4,5	374,623	4,6	374,624	4,7	374,625	4,8
374,620	4,1	374,621	4,2	374,622	4,3	374,623	4,4	374,624	4,5
374,626	3,0	374,627	3,1	374,628	3,2	374,629	3,3	374,630	3,4

6		7		8		9		10	
<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>
374,633	3,8	374,634	3,9	374,635	4,0	374,636	4,1	374,637	4,2
374,628	6,0	374,629	6,1	374,630	6,2	374,631	6,3	374,632	6,4
374,623	6,7	374,624	6,8	374,625	6,9	374,626	7,0	374,627	7,1
374,629	4,9	374,630	5,0	374,631	5,1	374,632	5,2	374,633	5,3
374,632	3,4	374,633	3,5	374,634	3,6	374,635	3,7	374,636	3,8
374,626	4,9	374,627	5,0	374,628	5,1	374,629	5,2	374,630	5,3
374,625	4,6	374,626	4,7	374,627	4,8	374,628	4,9	374,629	5,0
374,631	3,5	374,632	3,6	374,633	3,7	374,634	3,8	374,635	3,9

11		12		13		14		15	
<i>H, м</i>	<i>t,</i>	<i>H, м</i>	<i>t,</i>	<i>H, м</i>	<i>t,</i>	<i>H, м</i>	<i>t,</i>	<i>H, м</i>	<i>t,</i>

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015						Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1						Арк 49/45	

	<b>ММ</b>		<b>ММ</b>		<b>ММ</b>		<b>ММ</b>		<b>ММ</b>
374,638	4,3	374,639	4,4	374,640	4,5	374,641	4,6	374,642	4,7
374,633	6,5	374,634	6,6	374,635	6,7	374,636	6,8	374,637	6,9
374,628	7,2	374,629	7,3	374,630	7,4	374,631	7,5	374,632	7,6
374,634	5,4	374,635	5,5	374,636	5,6	374,637	5,7	374,638	5,8
374,637	3,9	374,638	4,0	374,639	4,1	374,640	4,2	374,641	4,3
374,631	5,4	374,632	5,5	374,633	5,6	374,634	5,7	374,635	5,8
374,630	5,1	374,631	5,2	374,632	5,3	374,633	5,4	374,634	5,5
374,636	4,0	374,637	4,1	374,638	4,2	374,639	4,3	374,640	4,4

16		17		18		19		20	
<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>t, мм</i>
374,643	4,8	374,644	4,9	374,645	5,0	374,646	5,1	374,647	5,2
374,638	7,0	374,639	7,1	374,640	7,2	374,641	7,3	374,642	7,4
374,633	7,7	374,634	7,8	374,635	7,9	374,636	8,0	374,637	8,1
374,639	5,9	374,640	6,0	374,641	6,1	374,642	6,2	374,643	6,3
374,642	4,4	374,643	4,5	374,644	4,6	374,645	4,7	374,646	4,8
374,636	5,9	374,637	6,0	374,638	6,1	374,639	6,2	374,640	6,3
374,635	5,6	374,636	5,7	374,637	5,8	374,638	5,9	374,639	6,0
374,641	4,5	374,642	4,6	374,643	4,7	374,644	4,8	374,645	4,9

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/46

21		22		23		24		25	
<i>H, м</i>	<i>m, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>m, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>m, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>m, мм</i>	<i>H, м</i>	<i>m, мм</i>
374,648	5,3	374,649	5,4	374,650	5,5	374,651	5,6	374,652	5,7
374,643	7,5	374,644	7,6	374,645	7,7	374,646	7,8	374,647	7,9
374,638	8,2	374,639	8,3	374,640	8,4	374,641	8,5	374,642	8,6
374,644	6,4	374,645	6,5	374,646	6,6	374,647	6,7	374,648	6,8
374,647	4,9	374,648	5,0	374,649	5,1	374,650	5,2	374,651	5,3
374,641	6,4	374,642	6,5	374,643	6,6	374,644	6,7	374,645	6,8
374,640	6,1	374,641	6,2	374,642	6,3	374,643	6,4	374,644	6,5
374,646	5,0	374,647	5,1	374,648	5,2	374,649	5,3	374,650	5,4

### Задача 5.2

1			2			3			4		
<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>
77°24'02"	7	3,1	78°25'03"	8	3,2	79°26'04"	6	3,3	80°27'05"	9	3,4
77°24'06"	11	5,2	78°25'07"	10	5,3	79°26'08"	9	5,4	80°27'09"	6	5,5
77°24'03"	6	4,3	78°25'04"	7	4,4	79°26'05"	8	4,5	80°27'06"	3	4,6
77°24'08"	9	6,2	78°25'09"	6	6,3	79°26'10"	3	6,4	80°27'11"	8	6,5
77°24'05"	3	2,9	78°25'06"	4	3,0	79°26'07"	12	3,1	80°27'08"	12	3,2
77°24'04"	12	7,1	78°25'05"	10	7,2	79°26'06"	4	7,3	80°27'07"	10	7,4
77°24'07"	8	2,8	78°25'08"	12	2,9	79°26'09"	7	3,0	80°27'10"	7	3,1
77°24'10"	5	3,6	78°25'11"	5	3,7	79°26'12"	10	3,8	80°27'13"	4	3,9
5			6			7			8		
<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>
81°28'06"	4	3,5	82°29'07"	5	3,6	83°30'08"	5	3,7	84°31'09"	10	3,8
81°28'10"	9	5,6	82°29'11"	8	5,7	83°30'12"	12	5,8	84°31'13"	7	5,9
81°28'07"	8	4,7	82°29'08"	12	4,8	83°30'09"	10	4,9	84°31'10"	4	5,0
81°28'12"	11	6,6	82°29'13"	3	6,7	83°30'14"	4	6,8	84°31'15"	12	6,9
81°28'09"	7	3,3	82°29'10"	9	3,4	83°30'11"	6	3,5	84°31'12"	3	3,6
81°28'08"	6	7,5	82°29'09"	6	7,6	83°30'10"	7	7,7	84°31'11"	8	7,8
81°28'11"	10	3,2	82°29'12"	11	3,3	83°30'13"	10	3,4	84°31'14"	9	3,5
81°28'14"	5	4,0	82°29'15"	7	4,1	83°30'16"	8	4,2	84°31'17"	6	4,3
9			10			11			12		
<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>	<i>α</i>	<i>n</i>	<i>m''</i>
85°32'10"	4	3,9	86°33'11"	5	4,0	87°34'12"	6	4,1	88°35'13"	9	4,2
85°32'14"	7	6,0	86°33'15"	10	6,1	87°34'16"	3	6,2	88°35'17"	4	6,3
85°32'11"	10	5,1	86°33'12"	6	5,2	87°34'13"	10	5,3	88°35'14"	6	5,4
85°32'16"	12	7,0	86°33'17"	7	7,1	87°34'18"	7	7,2	88°35'19"	3	7,3
85°32'13"	8	3,7	86°33'14"	11	3,8	87°34'15"	9	3,9	88°35'16"	8	4,0
85°32'12"	3	7,9	86°33'13"	8	8,0	87°34'14"	12	8,1	88°35'15"	11	8,2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015								Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1	
	Екземпляр № 1								Арк 49/47	

85°32'15"	6	3,6	86°33'16"	9	3,7	87°34'17"	11	3,8	88°35'18"	5	3,9
85°32'18"	9	4,4	86°33'19"	4	4,5	87°34'20"	4	4,6	88°35'21"	7	4,7

13			14			15			16		
$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$
89°36'14"	7	4,3	90°37'15"	9	4,4	91°38'16"	9	4,5	92°39'17"	4	4,6
89°36'18"	8	6,4	90°37'19"	6	6,5	91°38'20"	8	6,6	92°39'21"	11	6,7
89°36'15"	6	5,5	90°37'16"	5	5,6	91°38'17"	6	5,7	92°39'18"	12	5,8
89°36'20"	9	7,4	90°37'21"	10	7,5	91°38'22"	4	7,6	92°39'23"	9	7,7
89°36'17"	5	4,1	90°37'18"	4	4,2	91°38'19"	5	4,3	92°39'20"	7	4,4
89°36'16"	4	8,3	90°37'17"	8	8,4	91°38'18"	10	8,5	92°39'19"	10	8,6
89°36'19"	11	4,0	90°37'20"	7	4,1	91°38'21"	3	4,2	92°39'22"	3	4,3
89°36'22"	10	4,8	90°37'23"	11	4,9	91°38'24"	11	5,0	92°39'25"	6	5,1
17			18			19			20		
$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$
93°40'18"	7	4,7	94°41'19"	10	4,8	95°42'20"	11	4,9	96°43'21"	11	5,0
93°40'22"	5	6,8	94°41'23"	11	6,9	95°42'24"	7	7,0	96°43'25"	3	7,1
93°40'19"	11	5,9	94°41'20"	4	6,0	95°42'21"	8	6,1	96°43'22"	10	6,2
93°40'24"	8	7,8	94°41'25"	5	7,9	95°42'26"	4	8,0	96°43'27"	5	8,1
93°40'21"	3	4,5	94°41'22"	9	4,6	95°42'23"	10	4,7	96°43'24"	4	4,8
93°40'20"	6	8,7	94°41'21"	6	8,8	95°42'22"	5	8,9	96°43'23"	6	9,0
93°40'23"	4	4,4	94°41'24"	8	4,5	95°42'25"	6	4,6	96°43'26"	8	4,7
93°40'26"	9	5,2	94°41'27"	7	5,3	95°42'28"	9	5,4	96°43'29"	9	5,5
21			22			23			24		
$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$	$\alpha$	$n$	$m''$
97°44'22"	7	5,1	98°45'23"	8	5,2	99°46'24"	6	5,3	75°47'25"	9	5,4
97°44'26"	11	7,2	98°45'27"	10	7,3	99°46'28"	9	7,4	75°47'29"	6	7,5
97°44'23"	6	6,3	98°45'24"	7	6,4	99°46'25"	8	6,5	75°47'26"	3	6,6
97°44'28"	9	8,2	98°45'29"	6	8,3	99°46'30"	3	8,4	75°47'31"	8	8,5
97°44'25"	3	4,9	98°45'26"	4	5,0	99°46'27"	12	5,1	75°47'28"	12	5,2
97°44'24"	12	9,1	98°45'25"	10	9,2	99°46'26"	4	9,3	75°47'27"	10	9,4
97°44'27"	8	4,8	98°45'28"	12	4,9	99°46'29"	7	5,0	75°47'30"	7	5,1
97°44'30"	5	5,6	98°45'31"	5	5,7	99°46'32"	10	5,8	75°47'33"	4	5,9

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/48

### Задача 6.1

Варіанти																
	1			2			3			4			5			
№	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
1	72	39	30	23	50	32	21	56	14,6	36	35	42,7	39	45	38	
2	23	21	55	69	15	33	64	35	33,4	35	26	01,1	53	20	17	
3	21	06	18	47	37	17	75	34	12,4	55	08	36,6	39	16	51	
4	62	52	32	39	16	39	17	53	59,7	52	49	38,3	47	37	42	
5	17	00	55	53	20	44	27	32	56,1	44	04	51,4	69	15	12	
6	79	00	40	39	45	21	58	58	48,8	27	56	58	23	50	44	
7	68	19	45	55	28	57	57	13	06,7	36	58	44	31	25	19	
8	15	38	45	31	25	09	36	15	05,6	70	59	27,3	55	28	59	

Варіанти																
	6			7			8			9			10			
№	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
1	86	07	10	31	25	14,3	31	25	06	20	22	33,02	47	37	25	
2	33	12	25	55	28	29,4	55	28	43	77	50	03,91	39	16	38	
3	31	59	32	39	45	32,2	39	45	21	54	38	40,25	53	20	31	
4	28	40	32	53	20	48,4	53	20	43	27	08	41,11	39	45	19	
5	37	42	51	39	16	21,8	39	16	39	44	02	56,02	55	28	59	
6	81	37	15	47	37	30,2	47	37	14	54	09	46,05	31	25	11	
7	26	41	55	69	15	44,5	69	15	48	55	09	34,21	23	50	27	
8	33	57	44	23	50	20,4	23	50	36	26	37	46,24	69	15	42	

Варіанти																
	11			12			13			14			15			
№	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
1	34	00	51	34	30	19	37	26	19,9	16	06	30,56	45	59	26,4	
2	70	22	34	17	21	00	70	15	25,7	87	06	20,01	30	24	28,6	
3	51	31	30	59	28	41	48	58	31,8	66	23	01,23	29	47	46,9	
4	24	05	14	68	39	45	23	19	46,5	10	24	09,26	73	48	26,1	
5	56	27	17	13	44	08	31	18	18,0	19	56	51,93	31	26	50,9	
6	47	56	10	38	07	11	76	23	23,1	83	15	57,42	44	57	02,6	
7	32	22	35	85	46	30	44	43	47,4	53	47	08,95	72	25	43,9	
8	43	13	57	42	22	19	27	34	31,5	23	00	02,21	31	10	24,1	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/49

Варіанти															
№	16			17			18			19			20		
	о	'	"	о	'	"	о	'	"	о	'	"	о	'	"
1	42	02	40	73	32	37,4	52	05	21	49	38	05,6	49	18	22,6
2	50	38	50	43	42	40,6	30	43	02	31	08	01,3	53	33	44,8
3	52	15	10	24	52	11,3	44	09	36	39	50	32,3	46	13	28,7
4	35	03	20	37	52	27,9	53	02	49	59	23	22,2	30	54	22,4
5	40	16	26	71	07	54,0	39	45	19	39	04	24,5	35	17	18,7
6	52	25	02	46	07	28,8	43	02	22	41	41	38,1	67	34	48,7
7	44	25	25	27	31	24,9	41	07	51	48	18	38,2	42	51	23,0
8	42	53	00	35	13	15,3	56	04	27	50	55	15,0	34	16	30,9

Варіанти															
№	21			22			23			24			25		
	о	'	"	о	'	"	о	'	"	о	'	"	о	'	"
1	16	06	30,56	46	53	42,15	43	52	04,0	46	13	28	40	40	45,1
2	87	06	20,01	34	04	46,18	31	48	21,3	30	54	20	15	09	19,5
3	66	23	01,03	62	18	00,78	69	06	15,1	35	17	28	36	32	57,8
4	10	24	09,26	36	43	34,27	35	13	29,0	67	34	50	87	36	50,2
5	19	56	51,93	20	46	12,3	10	37	34,0	42	51	27	25	06	25,9
6	83	15	57,42	60	12	09,25	65	02	53,0	34	16	23	30	43	39,7
7	53	47	08,95	57	24	33,44	79	09	28,6	49	18	20	50	53	54,1
8	23	00	02,21	41	37	06,38	25	10	10,3	53	33	45	73	16	02,9



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-23.06- 05.02/3/184.00.1/Б/ВКЗ.1
	Екземпляр № 1	Арк 49/50

## ЗМІСТ

<i>Вступ</i> .....	3
<i>Практичне заняття №1. Дослідження властивостей випадкових похибок</i> ...	4
<i>Практичне заняття №2. Математична обробка рівноточних багаторазових вимірів однієї величини</i> .....	8
<i>Практичне заняття №3. Математична обробка рядів подвійних вимірів однієї величини</i> .....	14
<i>Практичне заняття №4. Визначення похибок функцій виміряних величин</i> ...	18
<i>Практичне заняття №5. Математична обробка нерівноточних багаторазових вимірів однієї величини</i> .....	21
<i>Практичне заняття №6. Зрівнювання геодезичного чотирикутника</i> .....	25
<i>Додатки</i> .....	30
<i>Завдання для контрольних робіт</i> .....	33
<i>Література</i> .....	49